UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JOSÉ AILTON RODRIGUES SOARES

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE TÓPICOS DE ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO BÁSICA TÉCNICA

ARRAIAS-TO
2017

JOSÉ AILTON RODRIGUES SOARES

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE TÓPICOS DE ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO BÁSICA TÉCNICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.
Coorientador: Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza.

ARRAIAS-TO
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S676m Soares, José Ailton Rodrigues.

Modelagem matemática como estratégia de ensino de tópicos de estatística na formação básica técnica. / José Ailton Rodrigues Soares. – Arraias, TO, 2017.

72 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2017.

Orientador: Eudes Antonio da Costa

Coorientador: Wallysonn Alves de Souza

1. Matemática. 2. Tópicos de estatística. 3. Modelagem matemática. 4. Formação técnica. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

JOSÉ AILTON RODRIGUES SOARES *

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE TÓPICOS DE ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO BÁSICA TÉCNICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 14/06/2017.

BANCA EXAMINADORA

Eudes AC

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa (Orientador)
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Prof. Dr. Ronaldo Antônio dos Santos
Universidade Federal de Goiás (UFT/IME)

Robson M. de Mesquita

Prof. Dr. Robson Martins de Mesquita
Universidade Federal do Tocantins (UFT)

Wallysonn Alves de Souza.

Prof. Dr. Wallysonn Alves de Souza (Coorientador)
Instituto Federal do Tocantins (IFTO)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Ao Senhor de todas as coisas.
À minha esposa Aline e minha mãe Creuza.

Agradecimentos

À Deus por oportunizar e concretizar essa conquista.

À minha família, especialmente minha esposa Aline Amorim pela orientação, dedicação e amor e minha mãe Creuza Soares pelo apoio, incentivo e amor.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

À UFT por disponibilizar a realização de um mestrado.

Ao IFTO pela ajuda na concessão das viagens.

Ao meu orientador professor Dr. Eudes Costa e coorientador professor Dr. Wallysonn Souza pelas contribuições, dedicação e orientações.

À professora e amiga Dra. Joana Patrícia pela cooperação e fornecimento de informações relevantes à pesquisa.

A todos os colegas do mestrado, principalmente os parceiros Euvaldo, Onésimo e Roney, por compartilhar conhecimento e anseios.

A todos os professores do programa PROFMAT da UFT Arraias, pelas aulas e presteza no processo de ensino.

Enfim, a todos que compartilham desta felicidade em consubstanciar este sonho.

"Porque sou eu que conheço os planos que tenho para vocês, diz o Senhor, planos de fazê-los prosperar e não de causar dano, planos de dar a vocês esperança e um futuro."

(Jeremias 29:11)

Resumo

Este trabalho propõe uma abordagem de ensino de tópicos de estatística no ensino médio técnico, tendo como referência os procedimentos adotados pela modelagem matemática e inseridos num ambiente investigativo, contextualizado e interdisciplinar. Previamente, para viabilizar estas relações, apresenta as definições dos principais temas estatísticos abordados pela componente curricular matemática no ensino médio, fundamentando o objeto de estudo. Em seguida, de forma sintética, descreve as habilidades e competências designadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino de estatística, complementada por uma análise dos conteúdos de livros didáticos, que mostram ser insuficientes na formação básica técnica. Neste, encontra uma pesquisa sobre modelagem matemática, seu histórico, conceitos e processos. E ainda, contribuições para o ensino de estatística, sendo considerada uma ferramenta metodológica na orientação e direcionamento do ensino, por meio das etapas de interação do conteúdo abordado, matematização da situação e avaliação dos resultados. Tem-se como proposta uma aplicação na criação de frangos caipiras, que conduziu à análise de dois modelos de regressão para representar a relação entre as variáveis envolvidas, sendo estes: modelo linear e modelo quadrático. A avaliação dos modelos permitiu a escolha da regressão mais adequada, optando pelo modelo quadrático por apresentar maior coeficiente de explicação (R-quadrado). A culminância do trabalho reflete na utilização da "tríplice": planejamento de ações, inserção dos conteúdos à realidade dos discentes e na associação estabelecida entre as diversas disciplinas, como tendência na promoção de um efetivo aprendizado.

Palavras-chaves: Estatística, Modelagem Matemática, Aplicação.

Abstract

This work proposes an approach to teaching statistical topics in secondary technical education, taking as reference the procedures adopted by mathematical modeling and inserted in a investigation environment, contextualized and interdisciplinary. Previously, to make feasible these relationships, it presents the definitions of the main statistical themes approached by the mathematics curriculum component in secondary education, based on the object of study. Then, in a synthetic way, it describes the ability and competences designated by the National Curricular Parameters (NCP) for the teaching of statistics, complemented by an analysis of the contents of textbooks, which demonstrate to be insufficient in basic technical education. In this, find a research on mathematical modeling, its history, concepts and processes. Also, contributions to the teaching of statistics, being considered a methodological tool in the orientation and direction of teaching, through the stages of interaction of the content approached, mathematization of the situation and evaluation of the results. An application in the caipira broiler has been proposed, which conducted to the analysis of two regression models to represent the relationship between the variables involved, being: linear model and quadratic model. The evaluation of the models allowed the choice of the most adequate regression, opting for the quadratic model because it presented a higher coefficient of explanation (R-squared). The culmination of the work reflects in the use of the “triple”: planning of actions, insertion of the contents to the reality of the students and in the established association between the several disciplines, as a tendency in the promotion of an effective learning.

Key-words: Statistics, Mathematical Modeling, Application.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

A estatística é uma componente curricular presente nos planos de ensino do currículo básico, técnico e tecnológico, no entanto, seu conteúdo é, na maioria dos casos, abordado de forma abstrata e descontextualizada, dificultando sua compreensão e aplicabilidade. Porém, o ensino de estatística é indispensável nos cursos que envolvem experimentação, coleta de dados, interpretação e tomada de decisão na análise de informações.

Com o objetivo de facilitar o entendimento dos termos empregados na estatística utilizamos da modelagem matemática, que é constantemente empregada em praticamente toda vida escolar básica dos alunos. Embora a expressão "modelando matematicamente" não seja muito disseminada entre eles, sua aplicação é rotineira e frequente.

A modelagem pode ser utilizada no processo de compreensão de diversas situações, tais como no estudo da proliferação de doenças infecciosas, na teoria da tomada de decisão, na construção de prédios e residências, crescimento populacional, índices radioativos, planejamento familiar, cronogramas de vacinação, estimativa de acidentes no trânsito, ou seja, uma variedade de áreas correlatas.

Durante as aulas no Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), entramos em contato com estudos sobre modelagem matemática, oportunidade em que fomos instigados a realizar um estudo sobre um dado fenômeno/situação da vida real. O fato de ser professor do Instituto Federal do Tocantins e atuar como colaborador num projeto sobre criação de frangos que dispõe de uma série de dados e informações sobre o assunto, vislumbrou-se a possibilidade de elaborar modelos matemáticos que descrevam o ganho de peso das aves em determinado período de criação.

O projeto citado foi desenvolvido no curso técnico em agropecuária do Instituto Federal do Tocantins campus Dianópolis, onde os alunos participaram efetivamente na criação das aves, no registro e na coleta dos dados para avaliação estatística. Com isso, ao observar o empenho dos alunos na prática da realização do projeto, na demonstração de interesse em compreender os meios e interpretar os resultados, identificou-se uma oportunidade de ensino aprendizagem da estatística básica fazendo uso de modelos matemáticos e aplicativos computacionais (softwares).

Apresentamos uma proposta de ensino da estatística básica com utilização dos dados (pesos vivos das aves) coletados a partir deste projeto, de modo a proporcionar um relacionamento interdisciplinar e vinculado ao ensino médio técnico na área de agropecuária.

Esta pesquisa tem como objetivo trabalhar a matemática no ensino médio integrado ao técnico, fazendo uso de uma metodologia de ensino com modelos matemáticos que auxiliem o entendimento do aluno quanto ao uso da estatística, tendo como aplicação uma abordagem na criação de frangos caipiras. Possibilitando assim, uma análise estatística dos dados para tomada de decisão, que, nesse caso, é descobrir qual o percentual ideal de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão na alimentação dos frangos, visando melhorias na relação custo-benefício para os produtores.

O trabalho apresenta inicialmente, definições e conceitos da estatística descritiva, seguido de uma breve análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio no que tange ao ensino da estatística. Na terceira etapa é realizado um estudo detalhado e fundamentado sobre modelagem matemática, possibilitando a quarta parte do trabalho: aplicação na criação de frangos caipira para a contextualização do ensino.

1 TÓPICOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA

Com o objetivo de fundamentar o objeto de estudo deste trabalho, neste capítulo, vamos estabelecer as definições dos principais tópicos de estatística descritiva que é, de modo geral, a parte da Estatística constituída por uma série de procedimentos que permitem a organização, representação, análise e interpretação de informações numéricas obtidas a partir de uma determinada pesquisa.

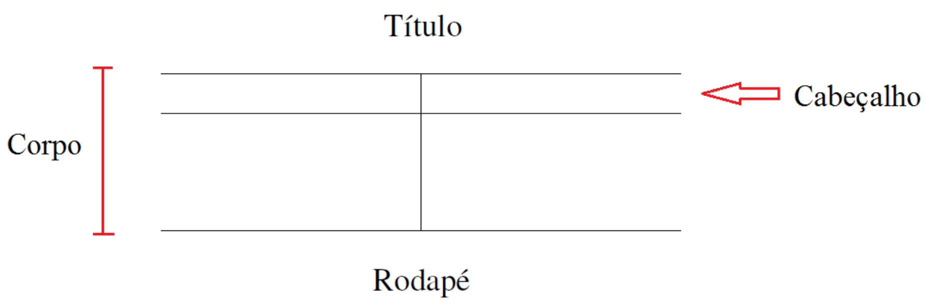
1.1 Tabelas de uso estatístico

Trata-se de uma "espécie" de figura geométrica plana dividida em colunas e linhas, usada para organizar e agrupar dados ou informações coletados. Uma tabela deve apresentar os seguintes elementos estruturais:

- título
- corpo
- rodapé

A Figura 1 mostra um esboço estrutural da construção de uma tabela.

Figura 1 – Estrutura de uma Tabela



Fonte: elaborada pelo autor

Para a confecção de uma tabela deve-se considerar os seguintes critérios, de acordo com Andrade e Ogliari (2005, p. 30):

1. Uma tabela deve apresentar um título completo, de modo que seja possível responder três questões: O que está sendo estudado? Onde foi realizado o estudo? Quando este estudo foi concretizado? O título deve ser colocado na parte superior da tabela, logo acima do corpo;

2. Caso a fonte dos dados não seja do próprio autor, deve-se indicá-la logo abaixo do corpo, ou seja, no rodapé;

3. As notas e as chamadas são usadas para fazer esclarecimentos de modo geral e específico, respectivamente. Ambas são, geralmente, representadas por algarismos arábicos, contudo pode-se utilizar letras minúsculas ou caracteres simbólicos como, por exemplo, o asterisco. Também são colocadas no rodapé;

4. Os totais e subtotais devem ser apresentados de forma destacada;

5. Preferencialmente, usar a mesma quantidade de algarismos para as partes decimais;

6. As tabelas não devem ser fechadas em suas laterais, porém deve-se colocar linhas horizontais no início e no final do corpo;

7. Os valores nulos, ou seja, iguais a zero observados pela própria natureza do fenômeno, devem ser substituídos por um hífen (-). Quando algum valor não é conhecido, deve-se colocar reticências (...). Quando a informação é considerada duvidosa, deve-se usar ponto de interrogação (?). Caso algum valor seja ocultado ou omitido para evitar conclusões individuais, deve-se usar a letra "x" para representá-lo. Para retificar uma informação publicada anteriormente deve-se usar o símbolo de parágrafo (§).

1.2 Variáveis

Na coleta de informações, a partir de uma pesquisa, obtém-se dados sobre uma determinada característica de indivíduos ou objetos, que é denominada variável. Destacam-se dois tipos:

- variáveis qualitativas, ou seja, aquelas que são caracterizadas através de categorias, qualidades ou atributos;

- variáveis quantitativas ou numéricas, em que a representação é constituída por valores numéricos.

Há dois tipos de variáveis quantitativas, as **discretas** que podem ser representadas pontualmente por números inteiros, ou seja, a variável não assume valores entre dois dados consecutivos; e as **contínuas** que são representadas por números reais, assim sempre será possível obter valores entre dois dados quaisquer.

1.3 População e amostra

O termo população é usado para definir um conjunto de elementos que possuem ao menos uma característica em comum, de modo geral, é o conjunto de indivíduos ou objetos dos quais se observou uma ou mais variáveis.

A amostra é uma parte retirada da população, ou seja, é um subconjunto da população. Assim, pode-se generalizar leis de comportamento da população através da análise de sua amostra.

1.4 Dados brutos e Rol

Ao conjunto de valores numéricos extraídos de uma pesquisa dar-se o nome de **dados brutos**. A organização dos dados brutos em ordem crescente ou decrescente gera o que chamamos de **Rol**. O Rol possibilita, de imediato, a percepção do menor e do maior valor assumidos pela varáveis em estudo.

1.5 Distribuição de frequências

Considerada o tipo de tabela mais importante na estatística descritiva, pois permite a representação dos dados de forma resumida e concisa. Muitas vezes aplicada quando há repetição ou um número consideravelmente alto de dados numéricos. Assim, esses dados são indicados de forma agrupada com suas respectivas repetições, ou seja, frequências.

Para a construção de uma distribuição de frequências simples, abre-se duas colunas, uma com os valores distintos assumidos pela variável e outra com suas frequências de modo correspondente. Tem-se então, uma distribuição de frequências sem intervalo de classes. Ver a Tabela 1. No entanto, torna trabalhoso e com pouca utilidade a construção desse tipo de tabela quando os dados coletados (nesse caso a amostra) estão em grande número.

Tabela 1 – Distribuição de Frequências

Variável	Frequência
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

Fonte: elaborada pelo autor

Assim, faz-se uso de uma distribuição de frequências com intervalos de classes, em que um intervalo da forma $a \vdash b$ inclui todos os valores da variável entre a, inclusive e

b, exclusive, com a frequência desta classe sendo designada pela quantidade de valores observados no intervalo.

Segundo Fonseca e Martins (2011, p. 113), são elementos constituintes ou retirados de uma distribuição de frequências:

- número de classes (k) - é a quantidade de linhas da tabela que são destinadas aos valores ou intervalos da variável. Há várias fórmulas para a determinação de k, sendo as mais usuais:

$$k \cong 1 + 3,22 \log n \tag{1.1}$$

  conhecida como fórmula de Sturges e

$$k = \sqrt{n}$$

  sendo n a quantidade de valores que compõem a amostra;

- limites de classes - cada classe apresenta dois limites: o limite inferior (l) e o limite superior (L). Para a classe que contém o intervalo $a \vdash b$ temos $l = a$ e $L = b$;

- amplitude das classes (h) - é a diferença entre o limite superior e o limite inferior de uma classe. Logo,

$$h = L - l$$

- amplitude total (AT) - obtida pela subtração entre o maior e menor valor observado da variável;

- ponto médio da classe (x_i) - é o valor que a representa, sendo este o ponto médio dos limites inferior e superior da classe, ou seja,

$$x_i = \frac{l_i + L_i}{2} \tag{1.2}$$

- frequência acumulada (F_i) - a frequência acumulada de uma determinada classe i é a soma das frequências simples das classes de ordem menor ou igual à classe i, ou seja,

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = f_1 + f_2 + \cdots + f_i. \tag{1.3}$$

1.6 Gráficos

Os gráficos são representações geométricas dos dados de uma pesquisa. Têm por objetivo levar ao leitor uma ideia rápida e de fácil compreensão das informações obtidas. Existem vários tipos de gráficos, destes destacam-se o gráfico em colunas, gráfico em linhas, gráfico em setores, histograma, polígono de frequências entre outros. Para a escolha do tipo de gráfico não há uma regra fixa, mas é conveniente fazer uso de elementos como simplicidade, clareza e veracidade na representação dos dados da amostra.

1.7 Medidas de posições

Geralmente há a necessidade de representar um conjunto de dados (amostra) através de um único valor, de modo que centralize as observações e possibilite comparações. Então, recorre-se às medidas de posições também conhecidas como medidas de tendência central. Outra característica dessas medidas é a de orientar quanto à posição da distribuição analisada na reta real.

1.7.1 Média aritmética

Definição 1.7.1. *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, os n valores da variável X. A média aritmética simples de X, representada por $\bar{x}$, é definida por:*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum x_i}{n}. \tag{1.4}$$

Quando há repetição de valores da variável ou dados agrupados, deve-se considerar suas frequências.

Definição 1.7.2. *Considere $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com frequências $f_1, f_2, \ldots, f_n$, respectivamente. Definimos média aritmética ponderada por:*

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}. \tag{1.5}$$

sendo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observação 1.7.1. *Em muitos casos usaremos a notação $\sum$ para representar $\sum\limits_{i=1}^{n}$, buscando simplicidade no desenvolvimento dos cálculos.*

1.7.2 Mediana

Ao organizar, em ordem crescente (ou decrescente), os valores observados por uma variável, chama-se mediana o valor que ocupa a posição central, ou seja, aquele que divide ao meio o conjunto de valores. Mais precisamente, tem-se

Definição 1.7.3. *Consideremos as* n *observações de uma variável, organizadas na sequência* $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. *Definimos a mediana como sendo*

$$Md = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & , \textit{ se } n \textit{ é ímpar,} \\ \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & , \textit{ se } n \textit{ é par.} \end{cases}$$

Observamos que, se n é ímpar a mediana ocupa a posição central $\frac{n+1}{2}$, e se n é par a mediana é a média dos dois termos centrais, neste caso, não necessariamente encontraremos um valor verificado na amostra.

1.7.3 Moda

Chamamos de moda o valor que aparece com maior frequência dentre os valores assumidos pela variável. Assim, um conjunto de valores de uma amostra pode não apresentar uma moda (amodal), apresentar um único valor para a moda ou ainda, apresentar dois (bimodal) ou mais valores para a amostra.

1.8 Medidas de dispersão

As medidas de dispersão têm por objetivo avaliar o quão dispersos estão os valores da variável em comparação com suas medidas de tendência central. A amplitude total (AT) é uma medida de dispersão ou variabilidade que considera apenas os valores mínimo e máximo observados, sendo assim, de pouca utilidade na avaliação da dispersão dos dados. As medidas de variabilidade mais utilizadas são a variância e o desvio padrão.

1.8.1 Variância

A variância é uma medida de dispersão que considera os desvios de cada observação em relação à média aritmética, ou seja, $x_i - \bar{x}$. Observemos que a adição desses desvios é sempre nula, assim, de modo conveniente, a variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios.

Definição 1.8.1. *Dadas as observações $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de uma variável. A variância deste conjunto de valores é definida por*

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}. \tag{1.6}$$

1.8.2 Desvio padrão

A variância nos fornece um valor numérico cuja unidade de medida encontra-se elevada ao quadrado. Para encontrar uma medida de dispersão na mesma unidade de medida dos valores assumidos pela variável, faz-se uso do desvio padrão, que é a raiz quadrada da variância.

Definição 1.8.2. *Consideremos os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de uma variável, seu desvio padrão é definido por*

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}}. \tag{1.7}$$

Quanto mais próximo de zero é o desvio padrão, mais homogêneo é o conjunto de valores.

Recomendamos Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2013) para uma análise mais detalhada dos tópicos da estatística descritiva.

2 PARÂMETROS CURRICULARES E LIVRO DIDÁTICO

Apresenta-se neste capítulo um estudo sobre as concepções da Estatística na visão dos Parâmetros Curriculares Nacionais e uma análise da relação de conteúdos adotados por alguns autores.

2.1 Perspectivas dos Parâmetros Curriculares Nacionais sobre Ensino de Estatística

De forma substanciada, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) BRASIL (2000b), na abordagem dos conhecimentos matemáticos dentre as faces da Estatística, consideram que:

1. As aplicações da Matemática no mundo real tiveram um elevado crescimento, tornando-se cada vez mais complexas, sendo responsáveis por despertar as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano. Métodos e formas de aguçar o raciocínio estatístico e probabilístico são, obviamente, ferramentas presentes tanto nas Ciências da Natureza quanto nas Ciências Humanas. Comprovando assim, a importância de uma cuidadosa abordagem dos conteúdos relacionados à contagem, estatística e probabilidade no ensino médio e ampliando o ambiente de correlação entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas;

2. Os conceitos matemáticos referentes ao grupamento de informações ou conjunto de dados ganham ênfase nas Ciências Humanas e para o cidadão comum, inserido numa sociedade que apresenta elevados números informativos de natureza estatística ou probabilística. Neste contexto, a mídia, as calculadoras e o computadores contraem relevância natural como recursos didáticos que possibilitam a abordagem de problemas com dados reais que requerem destreza na apuração e análise de informações;

3. As metas e princípios que conduzam a escolha de temas e conceitos são insuficientes. Sendo essenciais escolhas de caráter metodológica e didática, para agregar o par “conteúdo e forma” de modo indissociável. Diretrizes devem ser estabelecidas objetivando equilíbrio entre temática e metodologia.

Selecionamos as competências e habilidades a serem desenvolvidas e que julgamos ser atribuição da Estatística (não apenas da estatística) no Ensino Médio. As quais são descritas pelos PCNEM BRASIL (2000b) da seguinte forma:

- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc);
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;
- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes;
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

Em concordância com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio BRASIL (2000a), pressupomos que

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

2.2 Conteúdos Estatísticos Abordados pelos Livros Didáticos no Ensino Médio

As Diretrizes e os Parâmetros Curriculares norteiam, por meio de objetivos, competências e habilidades, os conteúdos a serem adotados para o ensino de cada temática.

Na maioria das escolas públicas, é realizado um processo de escolha do livro didático para cada disciplina, disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Geralmente esta escolha ocorre a cada três anos, período considerado como "vida útil" do material. Os livros escolhidos no último processo compreende o triênio 2015, 2016 e

2017 de utilização. Logo, para 2018, 2019 e 2020 deverá ser feita nova escolha (indicação) durante este ano.

Segundo PNLD 2015 BRASIL (2014), em 2014 foram avaliados 20 livros didáticos da componente curricular Matemática e apenas 6 foram aprovados pelos avaliadores. São eles:

- BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**. vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Moderna;
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Ática;
- PAIVA, M. **Matemática: Paiva**. vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Moderna;
- IEZZI, G. [et al.] **Matemática: ciência e aplicações**. vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Saraiva, 2015;
- SMOLE, K. C. S. e DINIZ, M. I. d. S. V. **Matemática: ensino médio**. vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Saraiva;
- SOUZA, J. R. d. **Novo olhar matemática**. vol. 1, 2 e 3. são Paulo: FTD.

Assim, cabe aos professores e gestores optar pelo material que fornece melhor adequação aos interesses educacionais e que possibilitem um aprendizado confiável.

O livro didático é uma das principais ferramentas de construção do processo de ensino e aprendizagem para o discente. Sua escolha, praticamente, define os conteúdos que serão apresentados em cada ano/série.

Relatamos a seguir os tópicos de Estatística empregados, de modo geral, pelos autores das obras aprovadas pelo PNLD 2015 BRASIL (2014) para o Ensino Médio.

1. Termos de uma pesquisa estatística:
    - População e amostra;
    - Indivíduo ou objeto;
    - Variável;
    - Frequência absoluta e frequência relativa;
    - Tabela de frequências.
2. Representação gráfica:
    - Gráfico de segmentos;

- Gráfico de barras;
- Gráfico de setores;
- Histograma;
- Construção de gráficos.

3. Medidas de tendência central:
   - Média aritmética;
   - Média aritmética ponderada;
   - Mediana;
   - Moda.
4. Medidas de dispersão:
   - Variância;
   - Desvio padrão
5. Estatística e probabilidade.

Quase todos os livros apresentam estes conteúdos em seu terceiro volume que corresponde ao terceiro ano do ensino médio. Há uma boa variedade de ilustrações, exemplos comuns à sociedade urbana e uma série de exercícios propostos que, de modo geral, contribuem para o ensino da organização e descrição dos dados de uma pesquisa.

Contudo, falta aplicações direcionadas ao público que não se enquadra nos parâmetros de uma sociedade urbanizada, consumista, e tecnológica, ou seja, situações que considerem as diferentes regiões do país ou mesmo as distintas classes sociais.

Para os cursos técnicos integrados ou concomitantes ao ensino médio, em especial aos cursos da área de agropecuária, é necessário um estudo mais elaborado da Estatística, envolvendo inferências para análise e tomada de decisão, sendo que, experimentos são usados frequentemente no ensino de disciplinas técnicas.

Acreditamos que é necessário uma ampliação dos temas estatísticos trabalhados no ensino médio, buscando a formação de cidadãos críticos, capazes de analisar e tomar decisões satisfatórias ao bem comum.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Abordaremos aqui os conceitos e procedimentos utilizados pela modelagem matemática na construção do saber, atuando como processo metodológico de ensino aprendizagem.

3.1 Breve histórico da Modelagem Matemática

Em pesquisas realizadas por Biembengut (2009), objetivando apresentar um mapeamento de ações pedagógicas com modelagem matemática na educação brasileira, observa-se que, nos primórdios do século XX, a expressão "modelagem matemática" tem seus primeiros usos no cenário mundial para descrever, formular e solucionar situações problemas em áreas do conhecimento como Engenharia e Ciências Econômicas.

A pesquisadora menciona Pollack da literatura mundial em Educação Matemática, por apresentar em seu trabalho informações a respeito de quem e quando a modelagem matemática começou a ser utilizada. Entre os anos de 1966 e 1970 nos EUA, em trabalhos realizados pelo *School Mathematics Study Group* (SMSG), Pollack procedimenta em um capítulo a modelagem matemática sem uso explícito do termo no 69º anuário da *National Society for the Study of Education*. Ainda, com base nos anais do *International Congress on Mathematical Education III* (ICME III) apresentou uma perspectiva sobre as aplicações matemáticas no ensino e pormenoriza o processo de construção de modelos no *New Trends in Mathematics Teaching IV* (BIEMBENGUT, 2009 apud POLLACK, 2001).

Na paisagem internacional, um movimento chamado "utilitarista" abre os primeiros debates sobre modelagem e suas aplicações na Educação Matemática na década 1960, relacionando-a como aplicação dos conceitos matemáticos na ciência e sociedade, o que alavancou a criação de grupos de pesquisadores sobre essa nova temática. Praticamente ao mesmo tempo, a modelagem matemática no Brasil contou com movimentos que buscavam sua inserção na educação com a colaboração de representantes brasileiros da comunidade internacional de Educação Matemática. Nomes como Aristides C. Barreto, Ubiratan D' Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani são considerados precursores no ensino e desenvolvimento da modelagem matemática no âmbito brasileiro (BIEMBENGUT, 2009).

3.2 Conceituando Modelagem Matemática

Na visão de Biembengut e Hein (2011, p. 11) a formulação de modelos com a finalidade de interpretar os fenômenos naturais e sociais é imanente ao ser humano. A intuição de modelo está presente em praticamente todas as áreas do conhecimento desde as Artes, História, Economia até à Matemática. Existem diversas formas de expressar os modelos matemáticos: equações algébricas, gráficos, programas computacionais, fórmulas, representações geométricas, tabelas e diagramas são bastante usuais. Essencialmente, a representação encontrada deve fornecer a solução do problema ou permitir a dedução de uma solução.

Estudos sobre modelagem matemática indicam a possibilidade de associar conhecimentos de situações ou fenômenos a conceitos matemáticos, que ao serem formulados por técnicas lógicas, podem emular acontecimentos ou situações reais. "Entretanto, a qualidade e a confiabilidade das informações extraídas com auxílio do modelo matemático dependem do quanto o modelo se ajusta aos dados da situação ou fenômeno em estudo" (RONDÓN; MURAKAMI; SAKAGUTI, 2002).

O processo de modelagem matemática fornece uma descrição matemática de um dado fenômeno do mundo real e tal descrição, geralmente feita por meio de equações, é chamada de modelo matemático. Isso significa que o modelo matemático é uma representação da realidade, o que não se pode confundir com a própria realidade (ANTUNES, 2010).

Para Biembengut e Hein (2011, p. 12), a Modelagem Matemática é definida como

> (...) processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

De acordo com Bassanezi (2014, p. 24), a Modelagem Matemática

> (...) é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Burak (1992) em sua tese, entende a modelagem matemática como um "conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

3.3 Procedimentos para Modelagem Matemática

No Capítulo 4 utilizaremos uma aplicação para o ensino de tópicos de Estatística sob um conjunto de etapas adotadas pela modelagem matemática e em concordância com as concepções de Biembengut e Hein (2011), as quais são aqui relacionadas da seguinte forma:

A) Interação:

Etapa onde o pesquisador tem contato direto com o assunto a ser estudado, investigando de forma ampla as informações disponíveis em livros, artigos, ou qualquer outro meio confiável. Assim, constrói-se uma relação estreita entre situação e familiarização do tema abordado.

B) Matematização:

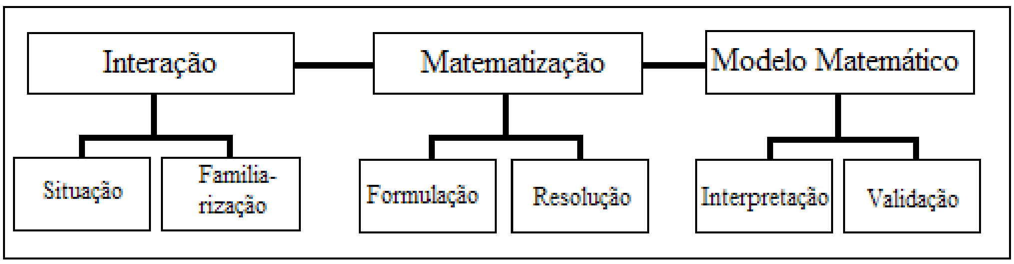
Parte do processo no qual se deve estabelecer as variáveis de importância e o relacionamento entre elas, formulando matematicamente o problema de modo que uma solução possa ser determinada. É necessário um conhecimento prévio e poder de associação das ferramentas matemáticas que foram adquiridas em séries/anos/estudos anteriores à situação observada para um agrupamento de hipóteses.

Posteriormente, uma análise sobre as hipóteses, definirá os termos relevantes, sendo preciso um profundo conhecimento da relações matemáticas, tais como, funções, gráficos, diagramas, que traduzam a situação em moldes puramente matemáticos.

C) Modelo Matemático:

Para conclusão e escolha do modelo matemático, deve-se avaliar o(s) modelo(s) e verificar qual melhor representa a situação problema estudada, aproximando-se da realidade. Escolhido o modelo, deve-se verificar o grau de confiança na sua aplicação. No caso dos modelos não atenderem as especificações e necessidades que os originaram, o processo deve retornar à parte da matematização, e as alterações essenciais deverão ser efetuadas. Esta etapa é também conhecida como validação do modelo obtido. Os procedimentos que acabamos de descrever seguem o esquema da Figura 2.

Figura 2 – Processos para Modelagem Matemática



Fonte: adaptado de Biembengut e Hein (2011)

Já, segundo Bassanezi (1999), os processos que sistematizam as etapas da modelagem matemática são: escolha do tema, levantamento de dados, ajustes de curvas, construção do modelo, validação do modelo, construção de modelos alternativos, previsão de fenômenos ainda não observados e discussões e críticas.

Assim, a modelagem matemática converte a linguagem usual em linguagem matemática ou ainda, transforma relações puramente matemáticas em relações textuais de compreensão mais acessível. Permitindo representações de problemas inicialmente estabelecidos por meio de expressões, fórmulas ou modelos (BARBOSA; BUENO; LIMA, 2011).

A Modelagem Matemática, de um modo geral, inserida no ambiente escolar pode trazer vários benefícios para o processo de ensino e aprendizagem, pois sua implantação pode proporcionar um significativo grau de motivação para introduzir novas ideias e conceitos matemáticos, explorando o conhecimento de forma interdisciplinar, contribuindo assim para a compreensão e interpretação do mundo real (MOREIRA; MAGINA, 2013).

3.4 Modelagem Matemática no ensino de Estatística

O ensino de estatística vem a tempos apresentando problemas, sendo responsável por muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos em assimilar conteúdos estatísticos. E o resultado é que eles ficam temerosos quando se veem frente a frente com a necessidade de aprender tais conteúdos (CAMPOS; WODEWOTZKI; JACOBINI, 2013, p. 9-10).

A modelagem matemática trabalha de forma contextual e realista, com situações-problemas retiradas do cotidiano do aluno, assim há uma sinergia entre modelagem e estatística, visto que, a estatística trabalha com pesquisas que incluem a coleta e análise de dados, ou seja, há uma complementaridade, uma associação do uso de modelos matemáticos no ensino de estatística. Tal relação pode ser verificada na Figura 3, elaborada por (MENDONÇA; LOPES, 2011 apud BURAK, 1992).

Autores têm avaliado o uso de modelos matemáticos no ensino de estatística, como o trabalho realizado por Fietz (2011) que avaliou o ensino de estatística por meio da modelagem matemática para o ensino médio e constatou que a modelagem matemática é uma estratégia de ensino no qual o docente estimula seus alunos a terem uma postura mais autônoma e crítica, bem como motiva seu pensamento reflexivo para alcançar uma solução satisfatória a fim de resolver situações do cotidiano.

Já os autores Mendonça e Lopes (2011) realizaram uma investigação estatística em um ambiente de modelagem matemática e constataram que os conceitos estatísticos foram aprendidos de forma natural no contexto do tema e que a modelagem matemática pode contribuir para a educação estatística no ensino médio.

Adicionalmente, a nível de ensino médio, utilizar-se da modelagem matemática

Figura 3 – Modelagem Matemática e Investigação Estatística

PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA	PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO ESTATÍSTICA EM UM AMBIENTE DE MODELAGEM MATEMÁTICA
1 - Escolha do tema Início do processo de Modelagem. O tema pode ser sugerido pelo professor ou escolhido pelos alunos.	1 - Escolha do tema Formação dos grupos por tema de interesse ou escolha de um tema pelos grupos previamente formados.
2 - Pesquisa exploratória Interação entre os membros dos grupos e destes com o tema por meio da coleta de informações sobre o assunto, buscando um aprofundamento.	2 - Interação Interação com o tema ou estudo do fenômeno e período de interação nos grupos, possibilitando as negociações dos interesses envolvidos e discussões sobre o tema.
3 - Levantamento dos problemas Formulação do problema de interesse, na linguagem natural, de forma correta e clara.	3 - Definição da questão ou problema - Escolha do(s) aspecto(s) do tema. - Estabelecimento de hipóteses. - Elaboração da(s) questão(ões) para a verificação da(s) hipótese(s).
4 - Resolução dos problemas - Construção de modelos Tradução do problema em linguagem matemática. Neste caso, o modelo são as relações estabelecidas entre as variáveis escolhidas.	4 - Compreensão do problema - Pesquisa de campo. - Análise exploratória de dados. - Uso dos conceitos e dos modelos matemáticos e estatísticos. - Construção de modelos representativos dos resultados encontrados. - Cálculo de índices e medidas estatísticas com os quais é possível estabelecer relações e tirar conclusões.
5 - Análise crítica *Validação do modelo* Retomada da situação inicial para checar se o modelo a representa adequadamente. *Reformulação do modelo* Se constatado que o modelo não representa adequadamente a situação em estudo, este deve ser reformulado, e as variáveis escolhidas têm de ser repensadas. *Interpretação dos resultados* Verificação da resolução do problema, em termos do modelo. Às vezes o modelo, mesmo estando matematicamente correto, não resolve o problema.	5 - Deduções, conclusões, inferência e comunicação de resultados De posse das relações verificadas no processo investigativo, estas são analisadas e comparadas às hipóteses estabelecidas. Estas análises devem possibilitar tirar conclusões e fazer previsões para a população com base nos resultados observados na amostra consultada. Os resultados encontrados são analisados criticamente, observando-se sua validade, capacidade de generalização e possibilidade de inferência na população em estudo. A comunicação tem o intuito de informar aos outros os resultados encontrados e as atitudes que estes resultados sugerem.

Fonte: Mendonça e Lopes (2011)

como “caminho” para o processo de ensino e aprendizagem da Estatística possibilita uma formação investigativa, reflexiva e crítica do aluno enquanto cidadão participativo na sociedade. Assim, o ambiente escolar é transformado e o professor atua como orientador na jornada didática e pedagógica (ANDRADE, 2008).

Percebe-se na literatura uma relação bem aprofundada, direta e complementar entre as temáticas Modelagem Matemática e Estatística. Enquanto a modelagem nos fornece procedimentos e metodologias para viabilizar o ensino e aprendizagem, a estatística permeia práticas, aplicações e validação de situações problemas e suas soluções. Juntos, proporcionam uma contextualização e interdisciplinaridade dos conceitos abordados.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DE TÓPICOS DE ESTATÍSTICA NA FORMAÇÃO BÁSICA TÉCNICA: UMA APLICAÇÃO NA CRIAÇÃO DE FRANGOS CAIPIRAS

O tema aborda o uso da aplicação na criação de frangos caipiras como ferramenta de contextualização e interdisciplinaridade na compreensão da estatística para alunos de cursos técnicos integrados ao ensino médio, em especial aos cursos técnicos em agropecuária, fazendo uso dos procedimentos da Modelagem Matemática.

Problemática

A matemática está inclusa em todos os níveis acadêmicos, desde a formação básica à pós-graduação, seja como base de ensino de simples equações ou mesmo na interpretação e resolução de problemas complexos. Enquanto professor da rede federal de ensino percebo, na maioria dos alunos, uma grande dificuldade em assimilar situação-problema e dados matemáticos, ou seja, representar matematicamente uma problematização. Em muitos casos, conseguem "decorar" fórmulas ou métodos para uso de forma mecânica, sem questionar e compreender os processos utilizados. Assim, emerge uma problemática: como e quando utilizar os conceitos matemáticos?

É ainda mais preocupante quando se avalia o aprendizado da matemática inserida na estatística, pois apesar do uso constante de fórmulas e regras, é necessário entender todo o contexto, para assim interpretar os resultados e tomar decisões baseadas no estudo realizado. Quando se trabalha com alunos de nível médio técnico, fica evidente a grande dificuldade encontrada por eles em assimilar o conteúdo transmitido na sala de aula e sua utilização na prática.

Nesse sentido, o ensino básico, técnico e tecnológico, ofertado pelos Institutos Federais, tem como objetivo qualificar o aluno do ensino médio para o mercado de trabalho, bem como estimular áreas de pesquisa e extensão. Para tanto, é preciso buscar meios alternativos e eficientes de trabalhar a matemática, buscando plena assimilação pelos alunos, para uma verdadeira aprendizagem.

A Estatística no ensino médio técnico se apresenta de forma importante, não só na coleta dos dados, mas também, na interpretação dos resultados que vão inferir no grau de confiança ou no quão significativo é/foi o trabalho de pesquisa desenvolvido.

A partir deste raciocínio, levantamos o seguinte questionamento: Como viabilizar a aprendizagem de estatística para alunos do ensino médio técnico?

Hipótese

Aponta-se como hipótese para este estudo a modelagem matemática como estratégia no desenvolvimento do aprendizado de tópicos de estatística, destinada a formação profissional de alunos do ensino médio da rede federal de ensino técnico e tecnológico, tendo como aplicação a criação de frangos caipiras.

O ensino de estatística no ensino básico ainda deixa muito a desejar, mesmo com os parâmetros curriculares nacionais determinando que o ensino de estatística no Brasil deve ser durante toda a educação básica, desde as séries iniciais. Grande parte dos professores não trabalham este conteúdo na educação básica, alegando como motivo a não abordagem do assunto nos livros didáticos, que não estudaram tópicos de estatística na graduação, ou que o assunto é complexo e eles não tem domínio do conteúdo (CARVALHO, 2015).

Mas a questão é que o ensino de estatística na educação básica é atribuição do professor de matemática e, portanto, cabe a ele conhecer e propor novos métodos de ensino-aprendizagem, utilizar-se de ferramentas e propostas que auxiliam a compreensão e despertem o interesse dos alunos pela estatística.

Uma vez que a Modelagem Matemática trabalha com aproximações da realidade, utilizando os modelos para representação de um sistema ou parte dele, os modelos matemáticos obtidos devem servir tanto para uma expressão particular como suporte para outras aplicações.

Esse espectro de possibilidades, em que a modelagem utiliza resultados e instrumentos de diferentes situações/fenômenos e contextos como ponto de partida para o seu desenvolvimento, confere-lhe um caráter interdisciplinar, o que a potencializa como motivação para o processo de ensino e aprendizagem, como metodologia de ensino e/ou ainda como forma de aprofundamento e ampliação da compreensão de conceitos tanto de matemática como das demais áreas do conhecimento.

Apresentamos como proposta uma aplicação na criação de frangos caipiras para abordagem da estatística, visando contextualizar o estudo, ao mesmo tempo que, promovemos interdisciplinaridade entre conteúdos técnicos e da base comum ofertados no ensino médio técnico.

A teoria inserida por meio de conceitos possibilita um aprendizado incompleto ou deficiente, sendo necessário o uso de aplicações que ilustre sua importância. Seguindo essa linha de raciocínio, a aplicabilidade e contextualização de um problema, desperta no aluno uma motivação e interesse em solucioná-lo, justificando o uso da aplicação na criação de frangos caipiras para o ensino de tópicos de estatística usando modelagem matemática.

Aplicação na criação de Frangos Caipiras

O principal objetivo deste trabalho é propor uma alternativa eficiente para o ensino de Estatística direcionada aos alunos de cursos Técnicos em Agropecuária e áreas afins, seguindo a metodologia e procedimentos adotados pela Modelagem Matemática.

Para tanto, propomos inicialmente um "problema-base" que, na busca de soluções, norteará todo o processo de ensino e aprendizagem dos tópicos de Estatística presentes no ensino médio técnico.

Problema Base 4.0.1. *Na criação de frangos caipiras é conveniente buscar alternativas alimentares a fim de baratear os custos com sua produção e maximizar os lucros. Para a formulação da ração deseja-se substituir a proteína do farelo de soja (custo mais elevado) pela proteína do farelo de algodão (custo menor) sem que haja perdas de nutrientes ou no desenvolvimento das aves. Qual o percentual de substituição entre essas substâncias que oferece maior ganho de peso para os frangos?*

O aluno é desafiado e estimulado a pesquisar temáticas que lhe permita propor soluções. Observa-se que o problema apresentado contextualiza a situação pois, envolve uma prática inserida no curso e no cotidiano da maioria dos alunos que buscam esta área do conhecimento. Ademais, acreditamos que esta aplicação pode ser trabalhada em outras áreas por si tratar de um tema de fácil compreensão.

Obedecendo à primeira etapa da Modelagem Matemática, a **Interação**, deve-se realizar uma pesquisa sobre a criação dos frangos para familiarização e reconhecimento do objeto de pesquisa.

4.1 Primeira etapa: Interação

Nos últimos anos os consumidores tornaram-se mais cuidadosos com a saúde o que, necessariamente perpassa pela qualidade dos produtos alimentícios, isto é, passaram a fazer uso de produtos naturais, os quais estão aliados à imagem de produtos saudáveis e que atendem os padrões de bem-estar, inclusive dos animais utilizados na alimentação. Esta realidade abre as portas à avicultura alternativa, administrada geralmente por pequenos produtores que sobrevivem da agricultura familiar.

As aves criadas em sistema alternativo (aves caipiras) devem se alimentar com dietas exclusivamente vegetais e, aos 25 dias de idade, ter acesso a piquete. A criação é dividida em três fases (inicial - de 1 a 30 dias de idade, crescimento - de 31 a 56 dias de idade e terminação - de 57 a 85 dias de idade), em que, para cada uma delas deve-se formular uma ração balanceada de modo a atender as exigências nutricionais. O fim da fase de terminação marca a idade mínima para o abate (BRASIL, 1999). Dentre as aves das linhagens de frango caipira, a Isa label (conhecida popularmente como pescoço pelado) tem sido a preferida por grande parte dos produtores. Isso se deve ao fato das aves atingirem peso de abate de 2,5kg, por volta dos 90 dias (CAIRES; CARVALHO; CAIRES, 2010).

De acordo com Amorim *et al.* (2015), a alimentação das aves acarreta grande parte do custo de produção, chegando a aproximadamente 75% do custo total. Comumente o milho (fonte de energia) e o farelo de soja (fonte de proteína) configuram como as principais matérias primas na composição da ração para aves. Trata-se de produtos com alto valor de mercado (o custo do farelo de soja é maior que do milho), o que torna a ração desses animais bastante onerosa.

As demandas do mercado e o alto custo da produção dos frangos propiciam as condições para a busca de fontes alternativas para o uso de novos ingredientes na composição da ração das aves, de modo a garantir o fornecimento dos nutrientes essenciais e necessários ao bom desempenho das aves e, ao mesmo tempo, baratear o custo da produção.

Um coproduto em fase de estudo pelos pesquisadores é o farelo de algodão, cujas características nutricionais ainda são pouco conhecidas. Segundo Rostagno *et al.* (2011) o farelo de algodão pode conter 30% de proteína bruta e 24% de fibra bruta ou 39% de proteína bruta e 14% de fibra bruta, esses valores são dependentes do tipo de extração, moagem e quantidade de inclusão de casca no farelo. Dado seu alto valor proteico, o farelo de algodão pode entrar na ração em substituição ao farelo de soja.

O principal produto do cultivo do algodão é a fibra, também chamada de pluma, utilizada na indústria têxtil, e o óleo de algodão produzido a partir do caroço, local em que se encontra a amêndoa, rica em óleo e proteína. Então no processamento da extração do óleo de algodão é obtido o línter, que é uma fibra que reveste o caroço; ao quebrar o caroço obtém-se a casca, também rica em fibra, e a amêndoa, que possui de 30 a 40% de proteína e de 35 a 40% de lipídios. A partir da prensagem hidráulica da amêndoa ou usando extratores químicos, como éter, o óleo é extraído e o resíduo é chamado de torta de algodão. A moagem da torta dá origem ao farelo de algodão (EMBRAPA, 2014).

Segundo Butolo (2002) a forma de processamento para extração do óleo é que mais interfere no teor proteico, energético e fibroso do farelo de algodão. O farelo de algodão que é obtido por prensagem hidráulica possui maior teor de lipídios, devido ao óleo residual, e menor teor de proteína que o farelo obtido pela extração por solventes, este último contém menos óleo residual, e possui maior teor de proteína (EMBRAPA, 2014). A casca do algodão também pode ser adicionada ao farelo de algodão, porém irá influenciar em maior teor de fibra bruta.

Encontrar o nível ótimo do coproduto, no caso em tela, o farelo de algodão, para melhorar o desempenho no ganho de peso dos frangos e alcançar máximo retorno econômico tem sido um desafio. Nesse sentido, são relevantes as tentativas de definir os efeitos dos níveis de farelo de algodão para que, a partir do conhecimento das exigências proteicas das aves, seja possível ajustar os nutrientes das rações, resultando na correta formulação dietética.

Para auxiliar na tomada de decisões e definição de melhores níveis de utilização do farelo de algodão em substituição ao farelo de soja, estabelecemos como objetivo deste estudo: elaborar um modelo matemático para representar o ganho de peso de frangos caipira da linhagem Isa label, ao substituir na alimentação das aves, a proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão. Assim, constituímos a escolha do objeto de investigação (equivalente à primeira etapa da modelagem), ocasião em que nos inteiramos da realidade da situação a ser estudada, nesse caso, o desempenho de frangos da linhagem Isa label, ao se substituir o farelo de soja pelo farelo de algodão, a partir de um experimento conduzido no setor de avicultura do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Tocantins - Campus de Dianópolis.

A continuidade do estudo nos conduz ao levantamento de dados, momento em que conhecemos ainda mais o processo de criação de frangos em suas distintas fases de crescimento até a fase de terminação, o que permite avaliar os efeitos da inclusão do farelo de algodão nas rações.

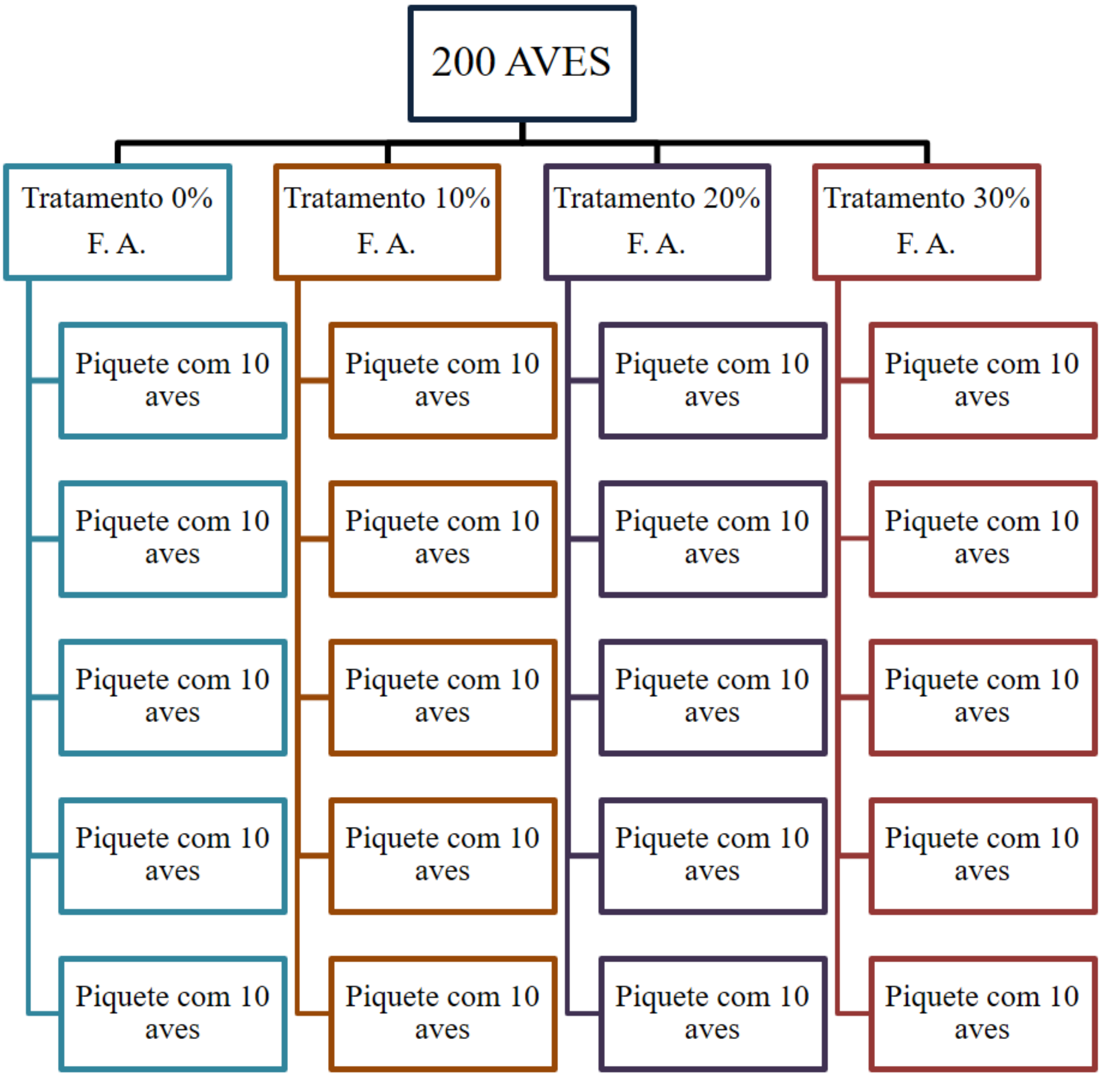
O experimento contou com 200 pintinhos (frangos), os quais foram alojados em galpão convencional de alvenaria. Do 1º ao 30º dia de idade, os frangos foram expostos à luz continuamente (luz natural + artificial), fornecendo-lhes ração e água à vontade.

No 30º dia eles foram pesados um a um e distribuídos aleatoriamente em piquetes, gramado com capim Tifton 85, com quatro níveis de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão (0%, 10%, 20% e 30%), cada nível de substituição corresponde a um tratamento e cada tratamento possui cinco repetições contendo 10 aves por unidade experimental, logo os frangos foram alocados em vinte piquetes, em que cada piquete corresponde a uma unidade experimental, o que pode ser representado pela esquema da Figura 4.

As rações para o período de 30 a 86 dias de idade, foram formuladas para atender as exigências nutricionais das aves. Na fase de crescimento (30 a 56 dias), os níveis nutricionais da dieta foram de 16,78% de proteína bruta e 3050 kcal de energia metabolizável, 0,7113% de cálcio, 0,3545% de fósforo disponível. Na fase de terminação (57 a 86 dias) os níveis nutricionais foram de 15,08% de proteína bruta, 3100 kcal de energia metabolizável, 0,5286% de cálcio e 0,2623% de fósforo disponível (ROSTAGNO *et al.*, 2011). Os dados estão dispostos na Tabela 2.

Aos 86 dias de idade fez-se a pesagem dos frangos. Em seguida, foram selecionadas duas aves de cada unidade experimental para avaliação estatística dos dados.

Figura 4 – Distribuição das aves



Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 2 – Exigências nutricionais para formulação das rações

Rações	Proteína Bruta	Energia Metabolizável	Cálcio	Fósforo Disponível
Crescimento	16,78%	3050 kcal/kg	0,7113%	0,3545%
Terminação	15,08%	3100 kcal/kg	0,5286%	0,2623%

Fonte: elaborada pelo autor

4.2 Segunda etapa: Matematização

A estatística é a ciência dos dados, proveniente da necessidade de manipulação de dados coletados e de como obter informações características desses dados. Ela objetiva extrair, organizar e explorar dados estatísticos cujo propósito é representar e explicar, além de estabelecer possíveis correlações, evidenciando a parir dos dados, a produção da informação crível (ANDRADE, 2008).

Com referência e estímulo à citação anterior, inicia-se nesse momento o estudo estatístico baseado nos dados coletados a partir do Peso Vivo (PV) dos frangos, visualizados nas Tabelas 3, 4, 5 e 6.

Tabela 3 – PV dos Frangos aos 86 dias de idade alimentados com ração sem a proteína do farelo de algodão (0% de substituição)

Repetição (R)	R1	R2	R3	R4	R5
Peso Vivo (kg)	2,190	2,800	2,465	3,020	2,550
	2,380	2,870	2,415	1,820	2,520

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 4 – PV dos Frangos aos 86 dias de idade alimentados com ração contendo 10% de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão

Repetição (R)	R1	R2	R3	R4	R5
Peso Vivo (kg)	2,496	2,350	2,230	2,360	2,960
	2,300	2,565	3,490	2,449	3,000

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 5 – PV dos Frangos aos 86 dias de idade alimentados com ração contendo 20% de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão

Repetição (R)	R1	R2	R3	R4	R5
Peso Vivo (kg)	3,500	3,630	3,610	3,670	...
	3,560	3,525	3,775	3,800	...

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 6 – PV dos Frangos aos 86 dias de idade alimentados com ração contendo 30% de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão

Repetição (R)	R1	R2	R3	R4	R5
Peso Vivo (kg)	2,450	2,810	3,900	2,395	...
	2,990	2,339	3,010	2,930	...

Fonte: elaborada pelo autor

A caracterização Peso Vivo (PV) é uma **variável quantitativa contínua**, pois pode assumir qualquer valor real dentro de um intervalo convenientemente estabelecido. Por exemplo, uma ave pode ter peso $2,5$kg, ou $2,54$kg, ou $2,547$kg, a depender da precisão do instrumento usado para obter as medidas.

O conjunto das aves, ou seja, os 200 frangos utilizados no experimento, formam a **população**. E o subconjunto composto pelos 36 frangos selecionados para análise, formam a **amostra**.

Observa-se que nas Tabelas 5 e 6 há ausência de dados para a repetição R5, ocasionada pelo desaparecimento das aves que, segundo informações dos envolvidos no projeto, havia um lobo-guará na região se alimentando das aves. Essas ocorrências ou imprevistos são normais em experimentos dessa natureza. Fato que leva os alunos terem uma ideia real do que ocorre em experimentações.

É interessante também analisar os dados como um todo. A Tabela 7 fornece os **dados brutos** obtidos, ou seja, os pesos dos frangos provenientes da amostra sem uma necessária ordenação. Esse tipo de tabela recebe o nome de **tabela primitiva**.

Tabela 7 – PV dos Frangos Caipiras aos 86 dias de idade alimentados com diferentes níveis de farelo de algodão - IFTO Dianópolis - 2014 - Tabela Primitiva

Repetição (R)	Tratamento 0% (PV em kg)	Tratamento 10% (PV em kg)	Tratamento 20% (PV em kg)	Tratamento 30% (PV em kg)
R1	2,190	2,496	3,500	2,450
	2,380	2,300	3,560	2,990
R2	2,800	2,350	3,630	2,810
	2,870	2,565	3,525	2,339
R3	2,465	2,230	3,610	3,900
	2,415	3,490	3,775	3,010
R4	3,020	2,360	3,670	2,395
	1,820	2,449	3,800	2,930
R5	2,550	2,960	...	...
	2,520	3,000	...	...

Fonte: elaborada pelo autor

Ao organizar os dados brutos considerando uma ordenação crescente ou decrescente, encontra-se uma tabela denominada **rol**. É o que ocorre na Tabela 8.

Tabela 8 – PV de Frangos Caipiras - IFTO campus Dianópolis - 2014 - Rol

1,820	2,360	2,465	2,810	3,010	3,610
2,190	2,380	2,496	2,870	3,020	3,630
2,230	2,395	2,520	2,930	3,490	3,670
2,300	2,415	2,550	2,960	3,500	3,775
2,339	2,449	2,565	2,990	3,525	3,800
2,350	2,450	2,800	3,000	3,560	3,900

Fonte: elaborada pelo autor

Observando a Tabela 8 pode-se tirar algumas conclusões a respeito da variável peso vivo. Verifica-se, com certa facilidade, o menor e maior valor assumidos, que há um número maior de aves com pesos entre 2kg e 3kg, ou ainda, que há poucos valores abaixo de 2kg.

Na busca por uma apresentação de dados de forma resumida e concisa, pode-se utilizar das tabelas de **distribuição de frequências**. As Tabelas 9 e 10 descrevem **distribuições de frequências sem intervalo de classes**.

Tabela 9 – Notas dos alunos do curso de Engenharia Elétrica na disciplina de Estatística - IFTO campus Palmas - Semestre 2016/2

Notas	Número de Alunos frequência (f)
4,0	2
6,0	3
7,0	6
8,0	4
9,0	1
Total	16

Fonte: Dados fictícios - elaborado pelo autor

Tabela 10 – PV dos Frangos aos 86 dias de idade alimentados com ração contendo 30% de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão - IFTO campus Dianópolis - 2014

Peso Vivo (PV em kg)	Número de Aves frequência (f)
2,339	1
2,395	1
2,450	1
2,810	1
2,930	1
2,990	1
3,010	1
3,900	1
Total	8

Fonte: elaborada pelo autor

Observação 4.2.1. *Os dados da Tabela 9 são fictícios e usaremos estes dados em exemplos futuros para comparar os conceitos da estatística descritiva entre dados não agrupados em classes e dados agrupados em classes.*

Para os dados da Tabela 8 é conveniente usar uma distribuição de frequências com intervalo de classes, devido o grande número de valores distintos assumidos pela variável peso vivo. A construção desse tipo de distribuição de frequências necessita da determinação de elementos conceituados no Capítulo 1.

4.2.1 Elementos de uma Distribuição de Frequências

Número de Classes (k)

Pela Fórmula (1.1) de Sturges, em que $n = 36$, obtemos

$$k \cong 1 + 3,22(\log 36) \cong 1 + 5 = 6.$$

Assim, a distribuição de frequências deve apresentar 6 classes.

Amplitude das Classes (h)

Determinada pela razão entre a diferença do maior valor com o menor valor observados, e o número de classes. Logo,

$$h = \frac{3,900 - 1,820}{6} \cong 0,350.$$

Então, os intervalos das classes com $i = 1, 2, \ldots, 6$ são, respectivamente, $1,820 \vdash 2,170$; $2,170 \vdash 2,520$; $2,520 \vdash 2,870$; $2,870 \vdash 3,220$; $3,220 \vdash 3,570$ e $3,570 \vdash 3,920$.

Um critério muito importante na descrição de dados estatísticos é o bom senso, ou seja, para evitar exclusões de dados da amostra, realiza-se aproximação por excesso para o valor de h.

A Tabela 11 apresenta uma **distribuição de frequências com intervalo de classes** constituída pelos elementos essenciais (intervalos da variável e quantidade de valores observados em cada intervalo).

Tabela 11 – PV de Frangos Caipiras - IFTO campus Dianópolis - 2014 (distribuição de frequências com intervalo de classes)

Peso Vivo (PV em kg)	Número de Aves frequência (f_i)
$1,820 \vdash 2,170$	1
$2,170 \vdash 2,520$	13
$2,520 \vdash 2,870$	5
$2,870 \vdash 3,220$	7
$3,220 \vdash 3,570$	4
$3,570 \vdash 3,920$	6
Total	36

Fonte: elaborada pelo autor

Outros elementos bastante usuais numa distribuição de frequência com intervalos de classe estão apresentados a seguir.

Ponto Médio das Classes (x_i)

O ponto médio de uma classe é geralmente usado para representar o intervalo constante na classe, ou mesmo a classe. Da Equação 1.2 tem-se,

$$x_1 = \frac{l_1 + L_1}{2} = \frac{1,820 + 2,170}{2} = \frac{3,990}{2} = 1,995.$$

De modo análogo, obtém-se:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{l_2 + L_2}{2} = 2,345; \\
x_3 &= \frac{l_3 + L_3}{2} = 2,695; \\
x_4 &= \frac{l_4 + L_4}{2} = 3,045; \\
x_5 &= \frac{l_5 + L_5}{2} = 3,395; \\
x_6 &= \frac{l_6 + L_6}{2} = 3,745.
\end{aligned}$$

Frequências Acumuladas (F_i)

A frequência acumulada de uma classe i indica a quantidade de dados da variável observados até a classe i. Pela Equação 1.3 encontra-se,

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sum_{j=1}^{1} f_j = f_1 = 1; \\
F_2 &= \sum_{j=1}^{2} f_j = f_1 + f_2 = 1 + 13 = 14; \\
F_3 &= \sum_{j=1}^{3} f_j = f_1 + f_2 + f_3 = 1 + 13 + 5 = 19; \\
F_4 &= \sum_{j=1}^{4} f_j = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 + 13 + 5 + 7 = 26; \\
F_5 &= \sum_{j=1}^{5} f_j = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 + 13 + 5 + 7 + 4 = 30; \\
F_6 &= \sum_{j=1}^{6} f_j = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 1 + 13 + 5 + 7 + 4 + 6 = 36.
\end{aligned}$$

A Tabela 12 mostra uma distribuição de frequências com intervalos de classe de modo mais completo, apresentando os pontos médios e as frequências acumuladas das classes. Tais frequências permitem, de modo simples, verificar, por exemplo, que há 26 aves com peso menor que $3,220$kg.

Tabela 12 – PV de Frangos Caipiras - IFTO campus Dianópolis - 2014 (ponto médio e frequências acumuladas)

classe i	Peso Vivo (PV em kg)	Frequência f_i	Ponto Médio x_i	Frequência Acumulada F_i
1	$1,820 \vdash 2,170$	1	1,995	1
2	$2,170 \vdash 2,520$	13	2,345	14
3	$2,520 \vdash 2,870$	5	2,695	19
4	$2,870 \vdash 3,220$	7	3,045	26
5	$3,220 \vdash 3,570$	4	3,395	30
6	$3,570 \vdash 3,920$	6	3,745	36
		$\Sigma f_i = 36$		

Fonte: elaborada pelo autor

4.2.2 Representação Gráfica de uma Distribuição de Frequências

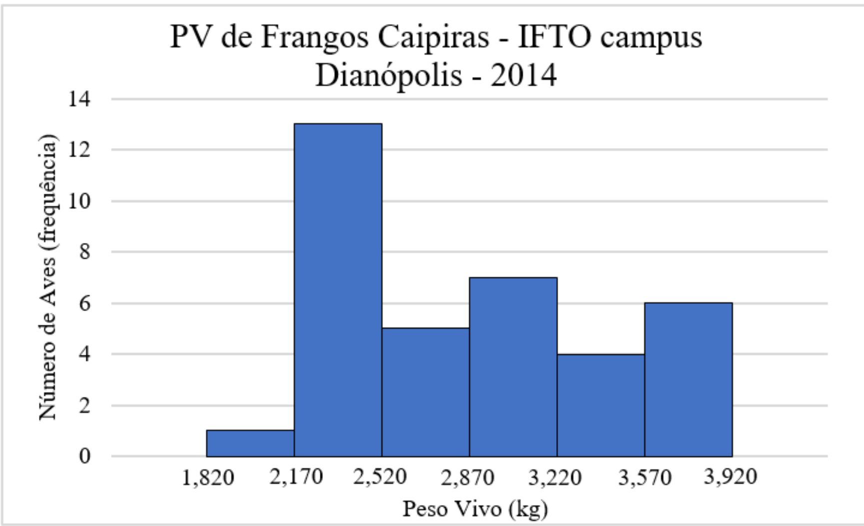
Para a representação gráfica de uma distribuição de frequências tem-se o histograma, o polígono de frequências e o polígono de frequências acumuladas. Todos têm como base o sistema de eixos coordenados cartesianos ortogonais. No eixo das abscissas coloca-se os valores da variável e no eixo das ordenadas, as frequências.

Histograma

Gráfico em colunas justapostas de comprimento igual à amplitude das classes e altura definida pela respectiva frequência da classe.

A Figura 5 mostra o histograma para os dados da Tabela 11.

Figura 5 – Histograma do PV dos frangos caipiras



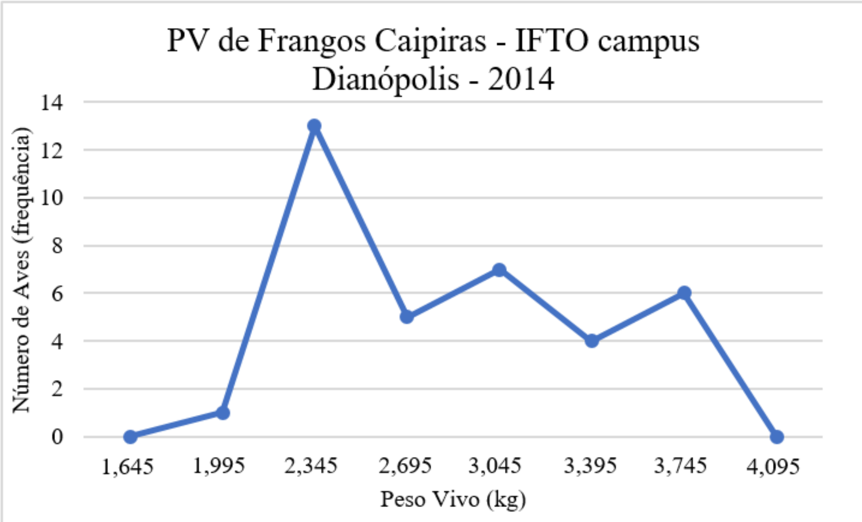
Fonte: elaborada pelo autor

Polígono de Frequências

Gráfico em linha, consiste na junção de segmentos de reta que unem pontos obtidos pelos pontos médios das classes com suas respectivas frequências.

O polígono de frequências para a Tabela 12 pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 – Polígono de Frequências do PV dos frangos caipiras



Fonte: elaborada pelo autor

Polígono de Frequências Acumuladas

Gráfico em linha, traçado a partir dos pontos formados pelos limites superiores das classes com suas respectivas frequências acumuladas.

A Figura 7 apresenta o polígono de frequências acumuladas referente à Tabela 12.

As representações gráficas destacam-se como os principais elementos em Estatística por disponibilizar informações de modo atrativo, resumido e conciso. Analisando os gráficos percebe-se rapidamente a evolução da variável observada.

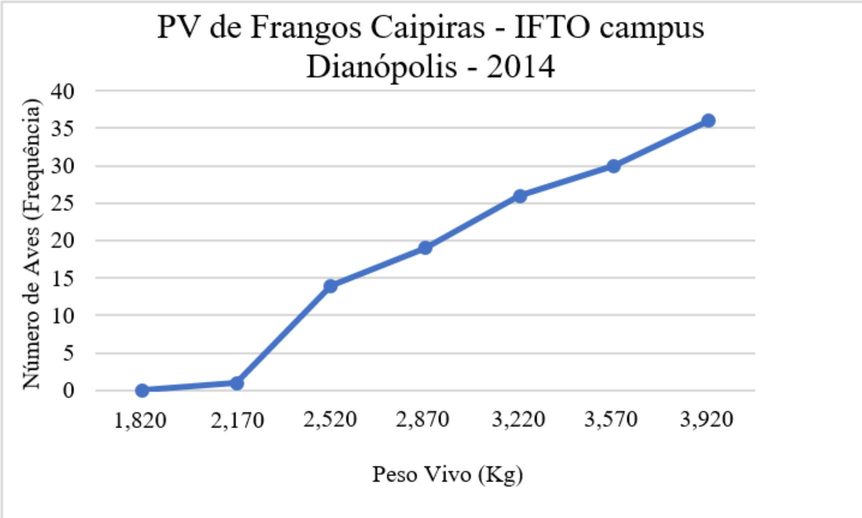
4.2.3 Medidas de Tendência Central ou Medidas de Posições

Na descrição dos dados coletados, as **medidas de posições** apresentam-se como valores representativos de todo o conjunto (população). São elas:

Média Aritmética ($\bar{x}$)

Medida de posição que considera todos os dados da amostra. Atua como "valor substitutivo" pois, pode-se substituir todos os valores da amostra pela média sem alterá-

Figura 7 – Polígono de Frequências Acumuladas do PV dos frangos caipiras



Fonte: elaborada pelo autor

la. Pela Equação 1.5 obtemos a média aritmética dos dados das Tabelas 9 e 12:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4+f_5x_5}{f_1+f_2+f_3+f_4+f_5}\\ &= \frac{2(4,0)+3(6,0)+6(7,0)+4(8,0)+1(9,0)}{2+3+6+4+1}\\ &= \frac{109}{16} = 6,8125.\end{aligned}$$

Logo, a média das notas dos alunos do curso de Engenharia Elétrica na disciplina de Estatística é aproximadamente $6,8$.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+f_4x_4+f_5x_5+f_6x_6}{f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6}\\ &= \frac{1(1,995)+13(2,345)+5(2,695)+7(3,045)+4(3,395)+6(3,745)}{1+13+5+7+4+6}\\ &= \frac{103,320}{36} = 2,870kg.\end{aligned}$$

Logo, em média, o peso das aves é de $2,870$kg.

Outra forma de determinar a média aritmética a partir da Tabela 12, por exemplo, é incluir uma coluna com os produtos f_ix_i para obter a soma Σf_ix_i. Observar a Tabela 13.

Assim, de modo prático, tem-se

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{103,320}{36} = 2,870kg.$$

Tabela 13 – PV de Frangos Caipiras - IFTO campus Dianópolis - 2014 (produtos $f_i x_i$)

classe i	Peso Vivo (PV em kg)	Frequência f_i	Ponto Médio x_i	Produto $f_i x_i$
1	$1,820 \vdash 2,170$	1	1,995	1,995
2	$2,170 \vdash 2,520$	13	2,345	30,485
3	$2,520 \vdash 2,870$	5	2,695	13,475
4	$2,870 \vdash 3,220$	7	3,045	21,315
5	$3,220 \vdash 3,570$	4	3,395	13,580
6	$3,570 \vdash 3,920$	6	3,745	22,470
		$\Sigma f_i = 36$		$\Sigma f_i x_i = 103,320$

Fonte: elaborada pelo autor

Mediana (Md)

Valor que se posiciona de modo que a quantidade de valores "menores que" é igual a quantidade de valores "maiores que", em comparação à propria mediana. Em outras palavras, a mediana é o valor da variável que possui 50% dos valores observados menores ou iguais à própria mediana e, obviamente, os outros 50% com valores maiores ou iguais a ela.

Para exemplificar, considere os valores 2, 8, 5, 3 e 1. Colocando-os em ordem crescente obtém-se: 1, 2, 3, 5, 8. Onde o valor 3 ocupa a posição central, ou seja, $Md = 3$.

Nos dados da Tabela 9, para facilitar a determinação da mediana, inclui-se uma coluna com as frequências acumuladas obtendo a Tabela 14. Como há 16 notas (quantidade par de notas), a mediana é a média aritmética das notas que ocupam a oitava e nona posições. Logo, pelas frequências acumuladas, essa notas pertencem à classe $i = 3$ o que implica $Md = 7,0$. Assim, a nota mediana dos alunos é $7,0$.

Tabela 14 – Notas dos alunos do curso de Engenharia Elétrica na disciplina de Estatística - IFTO campus Palmas - Semestre 2016/2 (frequências acumuladas)

Classe i	Notas	Número de Alunos frequência (f)	Frequência Acumulada (F)
1	4,0	2	2
2	6,0	3	5
3	7,0	6	11
4	8,0	4	15
5	9,0	1	16
	Total	16	

Fonte: Dados fictícios - elaborado pelo autor

Ao considerar a Tabela 12 (distribuição de frequências com intervalo de classes), primeiramente encontra-se a classe mediana (classe que contém a mediana), tomando a classe que possui a frequência acumulada imediatamente superior a $\frac{n}{2} = \frac{36}{2} = 18$. Logo, a classe mediana é $i = 3$ pois, tem $F_3 = 19$ e a mediana é o valor que ocupa a $18^{\underline{a}}$ posição.

Devido as classes apresentarem intervalos da variável e não valores pontuais, deve-se estimar um valor para a mediana. Como na terceira classe há 5 valores ($f_3 = 5$), faz-se uma inserção de cinco pesos uniformemente distribuídos no intervalo, ou seja, divide-se o intervalo $2,520 \vdash 2,870$ em cinco partes iguais. Assim, cada parte tem "tamanho"

$$\frac{2,870 - 2,520}{5} = \frac{0,350}{5} = 0,070.$$

Logo, a partir de $l_3 = 2,520$ adicionamos

$$(18 - 14)0,070 = 0,280.$$

Então, a mediana é dada por

$$Md = 2,520 + 0,280 = 2,800.$$

De modo equivalente, pode-se utilizar a fórmula

$$Md = l_{md} + \frac{[\frac{n}{2} - F_{(md-1)}]h}{f_{md}} \tag{4.1}$$

onde,

l_{md}: limite inferior da classe mediana;

$F_{(md-1)}$: frequência acumulada da classe anterior à classe mediana;

h: amplitude das classes;

f_{md}: frequência simples da classe mediana.

Aplicando a Equação (4.1), tem-se

$$\begin{aligned} Md &= l_3 + \frac{[\frac{n}{2} - F_2]h}{f_3} \\ &= 2,520 + \frac{[\frac{36}{2} - 14]0,350}{5} \\ &= 2,800. \end{aligned}$$

Portanto, o peso mediano das aves é de 2,800kg.

Moda (Mo)

Dado um conjunto de valores, moda é o valor mais típico (comum) do conjunto.

Da Tabela 9 a moda é verificada simplesmente observando a nota que possui maior frequência. Logo, como a maior frequência é $f = 6$ que corresponde a nota 7,0, tem-se $Mo = 7,0$.

Agora, para a Tabela 12, a forma mais prática de determinar a moda é considerá-la como sendo o ponto médio da classe modal (classe que possui maior frequência). Assim, a classe modal é a $2^{\underline{a}}$ classe (possui $f = 13$), logo

$$Mo = \frac{l_2 + L_2}{2} = \frac{2,170 + 2,520}{2} = \frac{4,690}{2} = 2,345.$$

Portanto, o peso mais comum entre as aves gira em torno de $2,345$kg.

4.2.4 Medidas de Dispersão ou Variabilidade

Medidas que avaliam a diversificação dos valores de um conjunto de dados em relação á sua média representativa, ou seja, indica se os dados apresentam-se de forma mais homogênea ou heterogênea.

Amplitude Total (AT)

Determina a maior variação entre os valores de todo um conjunto. Dada pela Equação

$$AT = x_{max} - x_{min} \tag{4.2}$$

sendo,
x_{max}: maior valor observado da variável;
x_{min}: menor valor observado da variável.

Assim, aplicando a Equação (4.2) para as Tabelas 9 e 11 têm-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} AT &= 9,0 - 4,0 = 5,0; \\ AT &= 3,920 - 1,820 = 2,100kg. \end{aligned}$$

Logo, a maior dispersão entre as notas dos alunos é $5,0$ e entre os pesos das aves é $2,100$kg.

A amplitude total é uma medida de variabilidade considerada instável, pois envolve apenas os valores extremos observados por isso, pouca usada na caracterização da dispersão dos dados.

Desvios em torno da Média (d_i)

São as subtrações entre cada valor observado da variável e a média aritmética do conjunto de valores, isto é,

$$d_i = x_i - \bar{x}. \tag{4.3}$$

Para exemplificar, considere os números 1, 2, 3, 6 e 8, que possuem média aritmética

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+6+8}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Logo, aplicando a Equação (4.3) seus desvios são:

$$\begin{aligned}
d_1 &= x_1 - \bar{x} = 1 - 4 = -3;\\
d_2 &= x_2 - \bar{x} = 2 - 4 = -2;\\
d_3 &= x_3 - \bar{x} = 3 - 4 = -1;\\
d_4 &= x_4 - \bar{x} = 6 - 4 = 2;\\
d_5 &= x_5 - \bar{x} = 8 - 4 = 4.
\end{aligned}$$

Observa-se que a soma dos desvios é sempre nula, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} d_i &= \sum (x_i - \bar{x})\\
&= (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_n - \bar{x})\\
&= (x_1 + \cdots + x_n) - (\bar{x} + \cdots + \bar{x})\\
&= n\bar{x} - n\bar{x} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, a soma dos desvios não determina uma medida para a dispersão dos dados, mas sedimenta uma base para definir a variância.

Variância (σ^2)

Medida de dispersão que considera o quadrado de cada desvio, evitando assim, que ocorra sempre $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$. Neste sentido, tem-se:

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Desenvolvendo algebricamente a fórmula de variância, obtém-se

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}\\
&= \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum \bar{x}^2}{n}\\
&= \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}(n\bar{x}) + n\bar{x}^2}{n}\\
&= \frac{\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n}\\
&= \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n}\\
&= \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\\
&= \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \tag{4.4}$$

fornece de modo mais prático a variância.

Para o caso de valores com repetição, deve-se considerar suas frequências. Assim,

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2.$$

Estas fórmulas para o cálculo de variância são aplicadas quando se conhece cada valor assumido pela variável, ou seja, quando se trabalha com todos os dados da população. Agora, quando se tem apenas os dados de uma amostra e, a partir dela, deseja-se tirar conclusões a respeito de toda a população, é conveniente utilizar $(n-1)$ no lugar de n, na Equação $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$.

Crespo (2004, p. 112) afirma que

> (...) quando nosso interesse não se restringe à descrição dos dados mas, partindo da amostra, visamos tirar inferências válidas para a respectiva população, convém efetuar uma modificação, que consiste em usar o divisor $(n-1)$ em lugar de n.

Assim,

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-1} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}.$$

Portanto, para dados amostrais e representativos de uma população, utiliza-se a fórmula

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 f_i - \frac{(\sum x_i f_i)^2}{n}\right] \tag{4.5}$$

obtida de modo análogo ao desenvolvimento algébrico feito na Equação (4.4).

No cálculo da variância para a Tabela 9, é cômodo acrescentar duas colunas, uma com os produtos $x_i f_i$ e outra com os produtos $x_i^2 f_i$, como pode ser visto na Tabela 15.

Tabela 15 – Notas dos alunos do curso de Engenharia Elétrica na disciplina de Estatística - IFTO campus Palmas - Semestre 2016/2 (produtos $f_i x_i$ e $f_i {x_i}^2$)

Notas x_i	Número de Alunos f_i	Produtos $f_i x_i$	Produtos $f_i {x_i}^2$
4,0	2	8	32
6,0	3	18	108
7,0	6	42	294
8,0	4	32	256
9,0	1	9	81
Total	16	109	771

Fonte: elaborada pelo autor

Assim, ao observar a Tabela 15, obtém-se

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - \left(\frac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2 \\
&= \frac{771}{16} - \left(\frac{109}{16}\right)^2 \\
&= \frac{771}{16} - \frac{11881}{256} \\
&= \frac{12336 - 11881}{256} \\
&= \frac{455}{256} \cong 1,8.
\end{aligned}$$

Logo, o valor $1,8$ nos dá, aproximadamente, um grau de dispersão entre as notas obtidas pelos alunos.

Para os dados da Tabela 13, basta o acréscimo de uma coluna com os produtos $x_i^2 f_i$, como pode ser visto na Tabela 16.

Tabela 16 – PV de Frangos Caipiras - IFTO campus Dianópolis - 2014

classe i	Peso Vivo (PV em kg)	Frequência f_i	Ponto Médio x_i	Produto $f_i x_i$	Produtos $f_i {x_i}^2$
1	$1,820 \vdash 2,170$	1	1,995	1,995	3,980
2	$2,170 \vdash 2,520$	13	2,345	30,485	71,487
3	$2,520 \vdash 2,870$	5	2,695	13,475	36,315
4	$2,870 \vdash 3,220$	7	3,045	21,315	64,904
5	$3,220 \vdash 3,570$	4	3,395	13,580	46,104
6	$3,570 \vdash 3,920$	6	3,745	22,470	84,150
		$\Sigma f_i = 36$		$\Sigma f_i x_i = 103,320$	$\Sigma f_i {x_i}^2 = 306,940$

Fonte: elaborada pelo autor

Então, utilizando os dados da Tabela 16 e aplicando a Equação (4.5) tem-se,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 f_i - \frac{(\sum x_i f_i)^2}{n}\right] \\
&= \frac{1}{36-1}\left[306,940 - \frac{(103,320)^2}{36}\right] \\
&= \frac{1}{35}[306,940 - 296,528] \\
&= \frac{10,412}{35} \\
&\cong 0,297 kg^2.
\end{aligned}$$

Assim, a variabilidade dos pesos das aves é em torno de 0,297kg^2.

Desvio Padrão (σ)

Na busca por uma medida de dispersão na mesma unidade apresentada pelos dados da variável, utiliza-se o desvio padrão.

Utilizando a Equação (1.7) e aplicando aos dados que envolvem as notas dos alunos e aos pesos das aves, encontram-se, respectivamente,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}8} \cong 1{,}34$$

e

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0{,}297} \cong 0{,}545kg.$$

A variância e o desvio padrão são medidas de dispersão consideradas estáveis (confiáveis), pelo fato de envolver em seus cálculos a totalidade dos valores da variável.

Coeficiente de Variação (CV)

Medida de variabilidade utilizada, principalmente, quando se deseja comparar as dispersões de dois ou mais conjuntos de valores, ou quando se quer obter uma medida de dispersão relativa ao "tamanho" do conjunto.

O coeficiente de variação é dado por

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100. \tag{4.6}$$

Para as notas dos alunos, obtém-se

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{1{,}34}{6{,}8} \times 100 \cong 19{,}7\%.$$

Quando verificado para os pesos das aves, tem-se

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{0{,}545}{2{,}870} \times 100 \cong 19{,}0\%.$$

Logo, em termos relativos, a dispersão é praticamente a mesma na comparação entre as notas dos alunos e o peso das aves, com uma ligeira superioridade na dispersão das notas dos alunos.

Segundo Fonseca e Martins (2011, p. 148), quando $CV \leq 10\%$ diz-se que há pequena dispersão, para $10\% < CV \leq 20\%$ há média dispersão e quando $CV > 20\%$ há grande dispersão.

Neste momento, concluímos o estudo dos tópicos de estatística descritiva fundamentais ou necessários para propor uma solução ao problema base.

4.2.5 Estatística Inferencial Básica

Também conhecida como indução estatística, a inferência apresenta procedimentos e técnicas que possibilitam tecer observações sobre uma dada população a partir de uma amostra. Em geral, no que se refere a pesquisas e experimentações, o número de elementos de uma população se mostra muito elevado, tornado trabalhoso e até mesmo impossível a análise de cada elemento.

A inferência estatística recorre ao conjunto amostral com objetivo de estimar parâmetros, tirar conclusões e auxiliar no processo de tomada de decisão para a caracterização de uma determinada população.

Os temas abordados pela indução estatística são, em sua grande maioria, conceitos direcionados a níveis de ensino superior (graduação e pós-graduação). Este trabalho apresenta temas necessários e suficientes para propor uma solução ao problema base, ou seja, conteúdos que tem como base para sua compreensão as referências do ensino médio técnico.

Diagrama de Dispersão

Quando se deseja estudar os efeitos ou relações existentes entre duas ou mais variáveis, faz-se uso da **correlação**, conceitos utilizados para descobrir e mensurar estas relações. Nos limitaremos a análise de duas variáveis.

A priori, é conveniente analisar o **diagrama de dispersão**, nuvem de pontos plotados no sistema cartesiano ortogonal xOy, visando uma ideia da correlação existente.

A fim de verificar a correlação entre as variáveis Peso Vivo (PV) e nível de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão ($FA =$ Farelo de Algodão) do problema base, primeiramente, determina-se a média aritmética dos pesos das aves em cada tratamento (0%, 10%, 20%, 30%). A partir dos dados da Tabela 7, tem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{(0\%)} &= \frac{25,030}{10} = 2,503kg;\\
\bar{x}_{(10\%)} &= \frac{26,200}{10} = 2,620kg;\\
\bar{x}_{(20\%)} &= \frac{29,070}{8} \cong 3,634kg;\\
\bar{x}_{(30\%)} &= \frac{22,824}{8} = 2,853kg.
\end{aligned}$$

Assim, com estes valores constrói-se a Tabela 17.

Observação 4.2.2. *A utilização das médias de cada tratamento para representá-los, é devido à diferença na quantidade de aves entre os tratamentos, buscando-se um "equilíbrio" nas contribuições de cada tratamento. Por exemplo, na determinação de uma única*

Tabela 17 – PV médio de cada tratamento em função de FA

Nível de Farelo de Algodão (%)	Peso Vivo (kg)	Par Ordenado ($FA; PV$)
0	2,503	(0; 2,503)
10	2,620	(10; 2,620)
20	3,634	(20; 3,634)
30	2,853	(30; 2,853)

Fonte: elaborada pelo autor

média para todos os 36 pesos, os pesos das 10 aves do Tratamento 0% pode influenciar de forma mais acentuada que os pesos das 8 aves do Tratamento 30%.

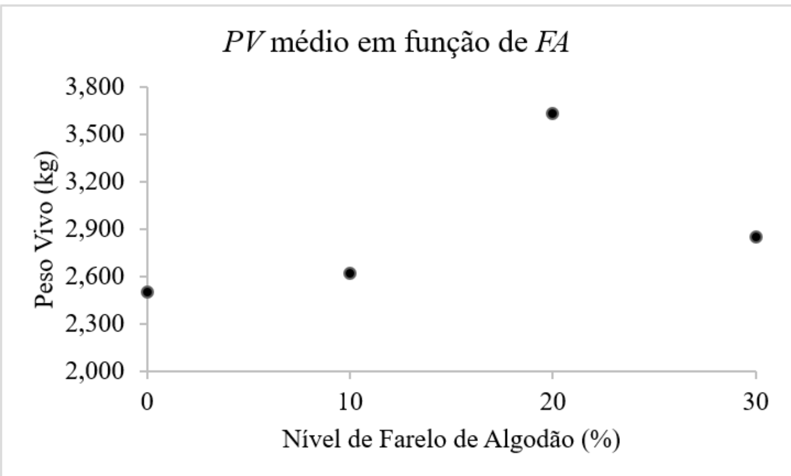
Pela Equação (4.6) verifica-se que o coeficiente de variação para as quatro médias obtidas é

$$CV \cong \frac{0,44}{2,9025} \cong 15,2\%. \tag{4.7}$$

O coeficiente de variação, é utilizado como uma medida da precisão experimental, pois segundo Pimentel-Gomes (2009), CV entre 0% e 10% indica ótima precisão experimental, entre 10% e 20% indica boa precisão, entre 20% e 30% uma precisão ruim e acima de 30% péssima precisão experimental, com a ressalva de que esses valores podem variar, dependendo da variabilidade natural da característica em estudo. Logo, o CV das médias, Equação (4.7), indica boa precisão experimental.

Representando, no diagrama de dispersão, os pares ordenados (FA, PV) com FA no eixo horizontal (eixo das abscissas) e PV no eixo vertical (eixo das ordenadas), obtém-se a Figura 8.

Figura 8 – Gráfico de Dispersão para os pontos (FA, PV)



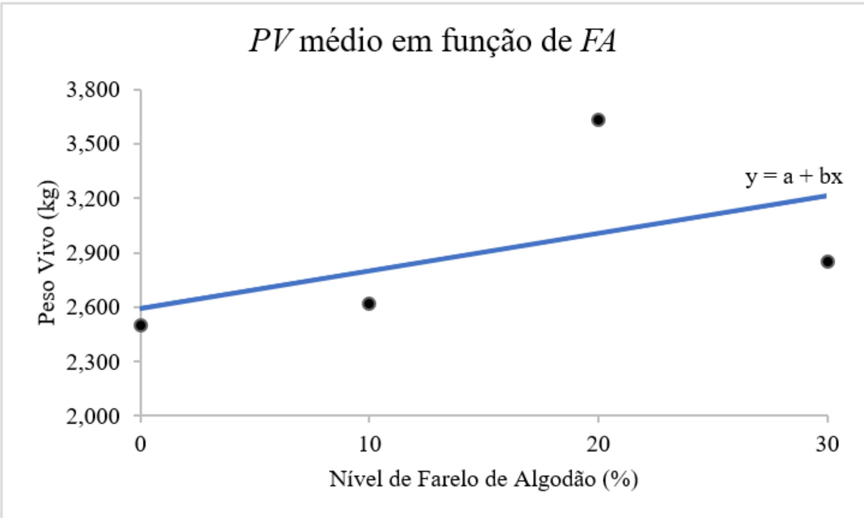
Fonte: elaborada pelo autor

A escolha de FA como variável independente e PV como variável dependente, foi motivada pela análise que se deseja, ou seja, explicar o ganho de peso das aves através dos níveis de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão. Também, é natural esperar que a alimentação esteja diretamente ligada ao crescimento e desenvolvimento das aves.

Procura-se então, uma função (relação) matemática que melhor se ajuste (aproxime) aos pontos plotados. A observação do conjunto de pontos obtidos no gráfico de dispersão fornece, a grosso modo, essa relação. No entanto, para este caso, a relação não está bem clara, ou seja, pode-se imaginar uma reta crescente ou uma parábola côncava para representar tal relação.

As Figuras 9 e 10 expressam essa situação, sendo $y = a + bx$ e $y = a + bx + cx^2$, respectivamente, a reta estimada e a parábola estimada, na tentativa de estabelecer as verdadeiras relações funcionais, que aqui denotaremos por $Y = \alpha + \beta x$ e $Y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

Figura 9 – Regressão Linear



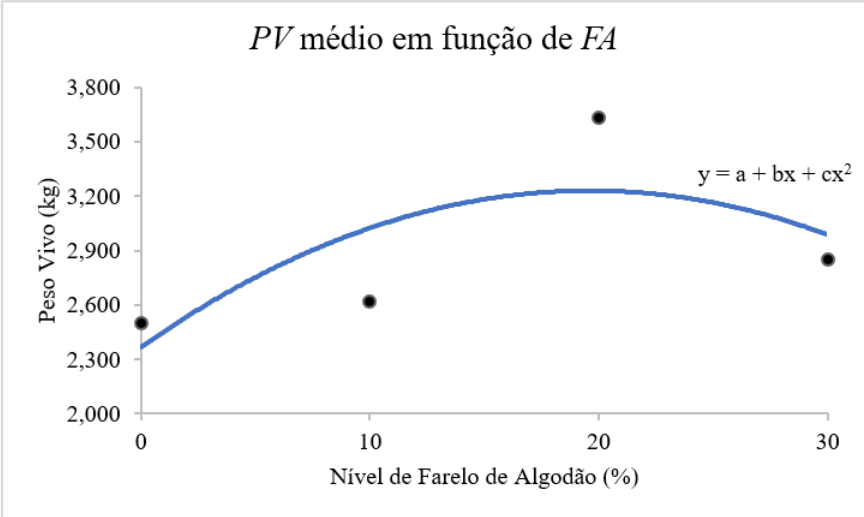
Fonte: elaborada pelo autor

Segundo Bassanezi (2014, p. 56), o modelo matemático, em geral, depende de parâmetros (constantes a, b, c, ...) e sua determinação exige a estimação desses parâmetros, de maneira que a função ajustada represente, da forma mais fiel possível, a situação estudada.

Serão analisados os dois tipos, ajuste linear e ajuste quadrático. Na próxima seção será feita a **validação** do modelo: processo de avaliação dos modelos e escolha daquele que apresenta melhor adequação ao dados.

Utilizaremos o **método dos mínimos quadrados** para estimação dos parâmetros e ajuste das curvas (funções).

Figura 10 – Regressão Quadrática



Fonte: elaborada pelo autor

Definição 4.2.1. *Considere um conjunto de n dados observados $\{x_i, Y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e uma função $y(x) = f(x; a_1, a_2, \ldots, a_k)$, em que a_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, são os parâmetros. O método dos mínimos quadrados consiste em determinar estes parâmetros de modo que "minimize" o valor de*

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - f(x_i; a_1, \ldots, a_k)]^2, \tag{4.8}$$

isto é, deve-se minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores Y_i observados e os valores y_i ajustados. A Figura 11 ilustra tal situação com $d_i = Y_i - y_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

4.2.6 Regressão Linear Simples

Um ajuste da forma

$$y(x) = f(x; b, a), \text{ ou seja, } y = a + bx \text{ (equação da reta)}$$

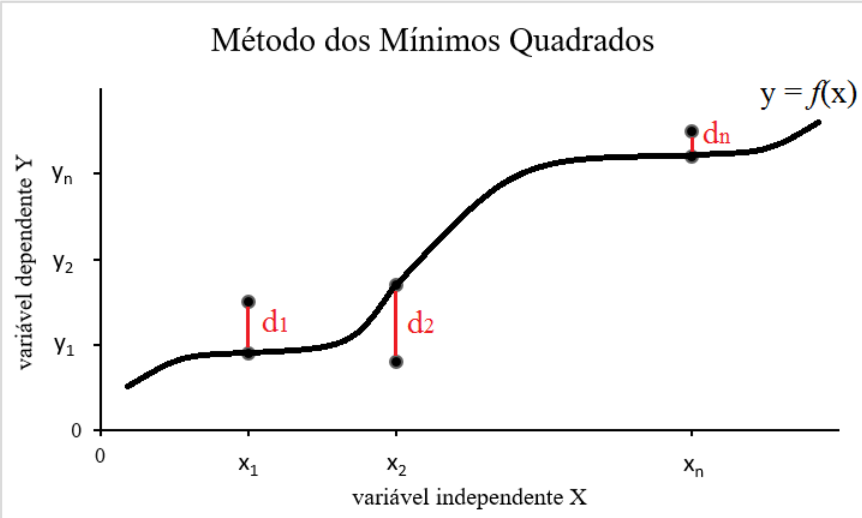
é denominado **ajuste linear**, sendo a, b e y, respectivamente, os estimadores de α, β e $Y = \alpha + \beta x$. Assim, deve-se encontrar os valores dos parâmetros a e b, cuja soma dos quadrados dos desvios seja mínima:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a - bx)^2.$$

Para tanto, devem ser satisfeitas as condições:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \text{ e } \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Figura 11 – Desvios entre Pontos Observados e Curva Ajustada



Fonte: elaborado pelo autor

O que é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} \sum(Y-a-bx)=0 \\ \sum[x(Y-a-bx)]=0. \end{cases}$$

Mas,

$$\Sigma(Y-a-bx)=0 \Leftrightarrow \Sigma Y-\Sigma a-\Sigma bx=0 \Leftrightarrow \Sigma Y=na+b\ \Sigma x \tag{4.9}$$

e

$$\Sigma[x(Y-a-bx)]=0 \Leftrightarrow \Sigma xY-\Sigma ax-\Sigma bx^2=0 \Leftrightarrow \Sigma xY=a\ \Sigma x+b\ \Sigma x^2. \tag{4.10}$$

Dividindo ambos os membros da Equação (4.9) por n, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma Y}{n} &= \frac{na}{n}+\frac{b\ \Sigma x}{n} \\ &= a+b\ \frac{\Sigma x}{n}. \end{aligned}$$

Como as médias das variáveis x e Y são, respectivamente, $\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$ e $\bar{Y}=\frac{\Sigma Y}{n}$, tem-se

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= a+b\bar{x} \\ a &= \bar{Y}-b\bar{x}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de a na Equação (4.10), tem-se

$$\begin{aligned}
\Sigma xY &= (\bar{Y} - b\bar{x})\ \Sigma x + b\ \Sigma x^2 \\
\Sigma xY &= \bar{Y}\ \Sigma x - b\bar{x}\ \Sigma x + b\ \Sigma x^2 \\
\Sigma xY - \bar{Y}\ \Sigma x &= b(\Sigma x^2 - \bar{x}\ \Sigma x) \\
b &= \frac{\Sigma xY - \bar{Y}\ \Sigma x}{\Sigma x^2 - \bar{x}\ \Sigma x} \\
b &= \frac{\Sigma xY - \frac{\Sigma Y}{n}\ \Sigma x}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}.
\end{aligned}$$

Ainda, pode-se usar as equivalências:

$$\Sigma xY - \frac{\Sigma x\ \Sigma Y}{n} = \Sigma(x - \bar{x})(Y - \bar{Y})$$

e

$$\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n} = \Sigma(x - \bar{x})^2.$$

Assim,

$$b = \frac{\Sigma(x - \bar{x})(Y - \bar{Y})}{\Sigma(x - \bar{x})^2},$$

se bem que, em termos práticos, a primeira expressão para b é mais fácil de ser calculada.

Portanto, a reta estimada $y = a + bx$ estará bem definida ao se determinar os parâmetros

$$a = \bar{Y} - b\bar{x} \tag{4.11}$$

e

$$b = \frac{\Sigma xY - \frac{\Sigma Y}{n}\ \Sigma x}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}. \tag{4.12}$$

É possível obter as expressões (4.11) e (4.12) para o cálculo dos parâmetros a e b, no ajuste linear, usando somente conceitos abordados no ensino médio sobre funções quadráticas, ou seja, sem o uso das derivadas parciais. Recomendamos Carneiro (2002) para um verificação mais detalhada do método.

Para aplicação no problema base, constrói-se uma tabela com os dados necessários. Ver Tabela 18.

Observação 4.2.3. *A partir deste momento, usaremos $n = 4$ para o problema base, pois estamos considerando as médias dos quatro tratamentos.*

Assim, tem-se

$$\bar{x} = \tfrac{60}{4} = 15 \text{ e } \bar{Y} = \tfrac{11{,}610}{4} = 2{,}9025.$$

Tabela 18 – Dados para Ajuste da Reta

$x = FA$ (%)	$Y = PV$ (kg)	$x \cdot Y$	x^2
0	2,503	0	0
10	2,620	26,20	100
20	3,634	72,68	400
30	2,853	85,59	900
$\Sigma x = 60$	$\Sigma Y = 11,610$	$\Sigma xY = 184,47$	$\Sigma x^2 = 1400$

Fonte: elaborada pelo autor

Logo, da Equação (4.12) vem

$$b = \frac{184,47 - 174,15}{1400 - \frac{60^2}{4}} = \frac{10,32}{500} = 0,02064.$$

E pela Equação (4.11) tem-se

$$a = 2,9025 - 0,02064(15) = 2,9025 - 0,3096 = 2,5929.$$

Tomando os valores $a = 2,5929$ e $b = 0,02064$, obtém-se a reta ajustada

$$y = 2,5929 + 0,02064x.$$

4.2.7 Regressão Quadrática

Um modelo do tipo

$$y(x) = a + bx + cx^2 \text{ com } c \neq 0 \text{ (equação da parábola)}$$

constitui-se no modelo de regressão polinomial de grau 2 em x. O **ajuste quadrático** ocorre quando se determina os estimadores a, b e c dos parâmetros α, β e γ da relação $Y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$.

Assim, a soma dos quadrados dos desvios entre os pontos observados e a parábola estimada será dada por

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a - bx - cx^2)^2.$$

Logo, as condições que devem ser necessariamente satisfeitas para minimizar a expressão de S, são

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0.$$

De modo equivalente, tem-se o sistema

$$\begin{cases} \Sigma Y = na + b\ \Sigma x + c\ \Sigma x^2 \\ \Sigma xY = a\ \Sigma x + b\ \Sigma x^2 + c\ \Sigma x^3 \\ \Sigma x^2 Y = a\ \Sigma x^2 + b\ \Sigma x^3 + c\ \Sigma x^4. \end{cases} \tag{4.13}$$

Aplicando ao problema base, inicialmente confecciona-se a Tabela 19, da qual obtém-se:

Tabela 19 – Dados para Ajuste da Parábola

$x = FA$ (%)	$Y = PV$ (kg)	$x \cdot Y$	x^2	$x^2 \cdot Y$	x^3	x^4
0	2,503	0	0	0	0	0
10	2,620	26,20	100	262,0	1000	10000
20	3,634	72,68	400	1453,6	8000	160000
30	2,853	85,59	900	2567,7	27000	810000
$\Sigma = 60$	$\Sigma = 11,610$	$\Sigma = 184,47$	$\Sigma = 1400$	$\Sigma = 4283,3$	$\Sigma = 36000$	$\Sigma = 980000$

Fonte: elaborada pelo autor

$$11,610 = 4a + 60b + 1400c \tag{4.14}$$

$$184,47 = 60a + 1400b + 36000c \tag{4.15}$$

$$4283,3 = 1400a + 36000b + 980000c. \tag{4.16}$$

Ao multiplicar a Equação (4.14) por (-15) e adicionar a Equação (4.15), encontra-se

$$10,32 = 500b + 15000c. \tag{4.17}$$

Agora, ao multiplicar a Equação (4.14) por (-350) e adicionar a Equação (4.16), tem-se

$$219,8 = 15000b + 490000c. \tag{4.18}$$

Multiplicando a Equação (4.17) por (-350) e adicionando a Equação (4.18), obtém-se

$$-89,8 = 40000c \Rightarrow c = -0,002245.$$

Logo,

$$b = 0,08799 \text{ e } a = 2,3684.$$

Tomando os valores $c = -0,002245$, $b = 0,08799$ e $a = 2,3684$, concluímos que a parábola ajustada possui Equação

$$y = 2,3684 + 0,08799x - 0,002245x^2.$$

Observação 4.2.4. *As derivadas parciais foram usadas para minimizar a soma dos quadrados dos desvios, demonstrando a origem das fórmulas utilizadas para o cálculo dos estimadores, no entanto, na maioria das escolas de nível médio, este conceito não se encontra presente nos conteúdos das componentes curriculares. Em contra partida, acreditamos que a simples utilização dos sistemas lineares pode "ocultar", sem grandes perdas, a ideia geral para determinação dos estimadores.*

Precisamos então, escolher entre as duas curvas ajustadas, a que melhor se adapta aos dados observados. Este papel fica a cargo da terceira etapa da modelagem matemática.

4.3 Terceira etapa: Modelo Matemático

Compreende o estudo dos modelos ajustados para verificação do modelo mais adequado. É nessa etapa que se faz a validação do modelo, apresentando uma solução ao problema estabelecido (problema base). Existem vários métodos de avaliação dos modelos ajustados, ficaremos restritos à análise do desvio padrão e coeficiente de determinação.

De modo geral, deseja-se o modelo que apresenta menor dispersão entre os dados ajustados (y) e os dados observados (Y).

4.3.1 Avaliação da Reta Ajustada

Análise pelo Desvio Padrão

Obtém-se, inicialmente, os valores de cada peso vivo (y_i) referente aos níveis de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão (x_i) da reta ajusta

$$\begin{aligned} y_i &= 2,5929 + 0,02064x_i : \\ y_{(0\%)} &= 2,5929 + 0,02064(0) = 2,5929; \\ y_{(10\%)} &= 2,5929 + 0,02064(10) = 2,7993; \\ y_{(20\%)} &= 2,5929 + 0,02064(20) = 3,0057; \\ y_{(30\%)} &= 2,5929 + 0,02064(30) = 3,2121. \end{aligned}$$

Em seguida, para facilitar os cálculos, constrói-se a Tabela 20 com os valores observados, valores ajustados, desvios e quadrado dos desvios.

Logo, tem-se a variância

$$\sigma^2 = \frac{\sum(Y-y)^2}{4} = \frac{0,564}{4} = 0,141kg^2.$$

Tabela 20 – Dados para avaliação da reta ajustada - Análise pelo Desvio Padrão

Valores Observados Y	Valores Ajustados y	Desvios $d = Y - y$	Quadrado dos Desvios $d^2 = (Y - y)^2$
2,503	2,5929	$-0,0899$	$\cong 0,0081$
2,620	2,7993	$-0,1793$	$\cong 0,0321$
3,634	3,0057	$0,6283$	$\cong 0,3948$
2,853	3,2121	$-0,3591$	$\cong 0,1290$
			$\Sigma(Y - y)^2 = 0,5640$

Fonte: elaborada pelo autor

Portanto, obtém-se como desvio padrão entre os valores observados e os valores ajustados

$$\sigma = \sqrt{0,141} \cong 0,375kg.$$

Análise pelo Coeficiente de Determinação (R^2)

O coeficiente de determinação funciona como um indicador da validade do modelo idealizado. Também conhecido como coeficiente de explicação, é definido por:

$$R^2 = \frac{VE}{VT} \tag{4.19}$$

em que,

$VE = \sum(y - \bar{Y})^2$ é a Variação Explicada pela regressão, ou seja, é a soma dos quadrados dos desvios da linha de regressão y (valores ajustados) em torno da média $\bar{Y}$;

$VT = \sum(Y - \bar{Y})^2$ é a Variação Total, ou seja, é a soma dos quadrados dos desvios calculados entre os valores observados Y e a média $\bar{Y}$.

A Figura 12 ilustra a definição.

O coeficiente de explicação fornece o percentual que a variação explicada pela regressão representa da variação total dos dados. Logo,

$$0 \leq R^2 \leq 1.$$

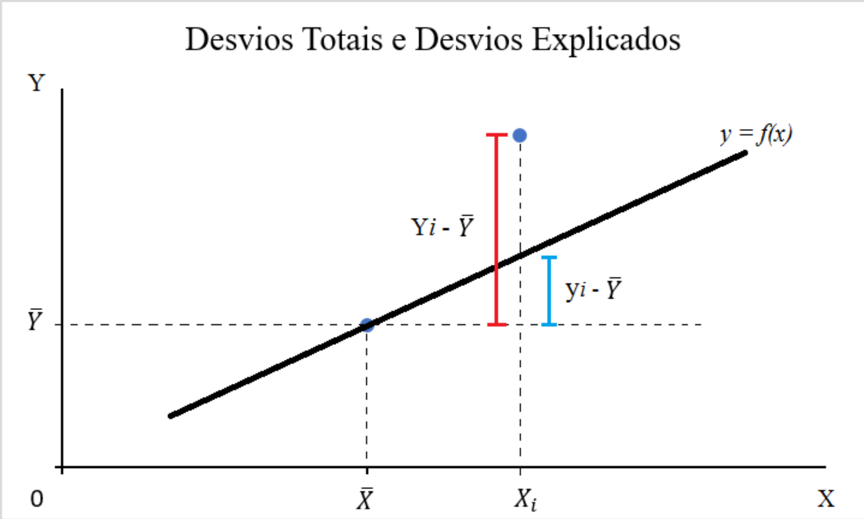
Assim, um valor de R^2 próximo de 1 (um), indica que as variações da variável dependente Y são "perfeitamente" explicadas pelas variações da variável independente X. Por conseguinte, se R^2 assume valor próximo de 0 (zero), então a variável Y não é afetada pela variação de X.

Para encontrar o coeficiente de determinação da reta ajustada $y = 2,5929 + 0,02064x$, constrói-se as Tabelas 21 e 22, lembrando que $\bar{Y} = 2,9025$.

Logo, ao aplicar a Equação (4.19), obtém-se

$$R^2 = \frac{0,2132}{0,777} \cong 0,2744.$$

Figura 12 – Variações Total e Explicada



Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 21 – Dados para cálculo da Variação Explicada - Reta Ajustada

Valores Ajustados y	Desvios Explicados $y - \bar{Y}$	Quadrado dos Desvios Explicados $(y - \bar{Y})^2$
2,5929	$-0,3096$	$\cong 0,0959$
2,7993	$-0,1032$	$\cong 0,0107$
3,0057	$0,1032$	$\cong 0,0107$
3,2121	$0,3096$	$\cong 0,0959$
		$\Sigma(y - \bar{Y})^2 = 0,2132$

Fonte: elaborada pelo autor

Tabela 22 – Dados para cálculo da Variação Total - Reta Ajustada e Parábola Ajustada

Valores Observados Y	Desvios Totais $Y - \bar{Y}$	Quadrado dos Desvios Totais $(Y - \bar{Y})^2$
2,503	$-0,3995$	$\cong 0,1596$
2,620	$-0,2825$	$\cong 0,0798$
3,634	$0,7315$	$\cong 0,5351$
2,853	$-0,0495$	$\cong 0,0025$
		$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 0,777$

Fonte: elaborada pelo autor

Portanto, este resultado indica que o ajuste linear $y = 2,5929 + 0,02064x$ explica, aproximadamente, $27,44\%$ da variação total do peso vivo dos frangos.

4.3.2 Avaliação da Parábola Ajustada

Análise pelo Desvio Padrão

Considerando a parábola ajustada, obtém-se os valores de cada peso vivo (y_i) dos frangos em correspondência aos níveis de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão (x_i).

$$\begin{aligned} y_i &= 2,3684 + 0,08799x_i - 0,002245x_i^2 : \\ y_{(0\%)} &= 2,3684 + 0,08799(0) - 0,002245(0)^2 = 2,3684; \\ y_{(10\%)} &= 2,3684 + 0,08799(10) - 0,002245(10)^2 = 3,0238; \\ y_{(20\%)} &= 2,3684 + 0,08799(20) - 0,002245(20)^2 = 3,2302; \\ y_{(30\%)} &= 2,3684 + 0,08799(30) - 0,002245(30)^2 = 2,9876. \end{aligned}$$

Para o cálculo da variância e desvio padrão, constrói-se a Tabela 23.

Tabela 23 – Dados para avaliação da parábola ajustada - Análise pelo Desvio Padrão

Valores Observados Y	Valores Ajustados y	Desvios $d = Y - y$	Quadrado dos Desvios $d^2 = (Y - y)^2$
2,503	2,3684	$0,1346$	$\cong 0,0181$
2,620	3,0238	$-0,4038$	$\cong 0,1631$
3,634	3,2302	$0,4038$	$\cong 0,1631$
2,853	2,9876	$-0,1346$	$\cong 0,0181$
			$\Sigma(Y - y)^2 = 0,3624$

Fonte: elaborada pelo autor

Logo, a variância encontrada é

$$\sigma^2 = \frac{\sum(Y-y)^2}{4} = \frac{0,3624}{4} = 0,0906\text{kg}^2.$$

Portanto, obtém-se como desvio padrão entre os pesos observados e os pesos ajustados pela parábola, o valor de

$$\sigma = \sqrt{0,0906} \cong 0,301\text{kg}.$$

Análise pelo Coeficiente de Determinação (R^2)

Objetivando encontrar o coeficiente de explicação da parábola ajustada $y = 2,3684 + 0,08799x - 0,002245x^2$, confecciona-se a Tabela 24 para determinação da Variação Explicada (VE).

Tabela 24 – Dados para cálculo da Variação Explicada - Parábola Ajustada

Valores Ajustados y	Desvios Explicados $y-\bar{Y}$	Quadrado dos Desvios Explicados $(y-\bar{Y})^2$
2,3684	$-0,5341$	$\cong 0,2853$
3,0238	$0,1213$	$\cong 0,0147$
3,2302	$0,3277$	$\cong 0,1074$
2,9876	$0,0851$	$\cong 0,0072$
		$\Sigma(y-\bar{Y})^2 = 0,4146$

Fonte: elaborada pelo autor

Logo,

$$VE = 0,4146.$$

Nota-se que a Variação Total (VT) da parábola ajustada é a mesma da reta ajustada pois, por definição, o cálculo da variação total considera os desvios entre os valores observados (Y_i) e a média ($\bar{Y}$), ou seja, independe da curva ajustada.

Assim,

$$VT = 0,777.$$

Aplicando a Equação (4.19), tem-se

$$R^2 = \frac{0,4146}{0,777} \cong 0,5336.$$

Portanto, aproximadamente $53,36\%$ da variação total do peso vivo dos frangos, é explicada pela parábola ajustada $y = 2,3684 + 0,08799x - 0,002245x^2$.

4.3.3 Escolha do Modelo

Após a avaliação dos modelos ajustados, obtemos ferramentas que fornecem condições para a escolha da regressão apropriada, ou seja, a que melhor representa as relações entre as variáveis envolvidas.

Com base na Tabela 25, que agrupa os desvios padrão e coeficientes de determinação das curvas ajustadas, podemos concluir que o ajustamento quadrático é o que melhor representa os dados observados, em virtude de apresentar menor desvio padrão e maior coeficiente de explicação.

Logo, a função escolhida é

$$y = 2,3684 + 0,08799x - 0,002245x^2$$

ou, de modo equivalente,

$$PV = 2,3684 + 0,08799(FA) - 0,002245(FA)^2.$$

Tabela 25 – Comparativo dos Ajustes

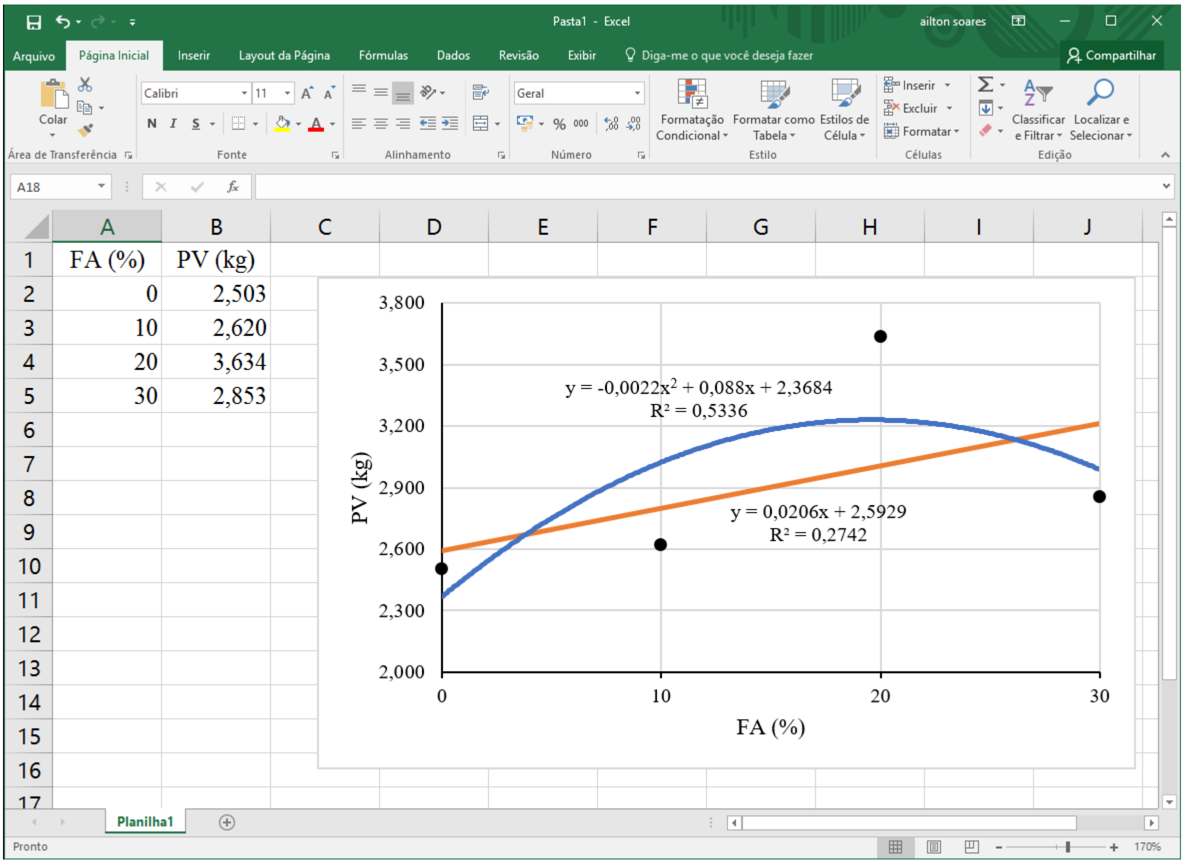
Método de Avaliação	Ajuste Linear $y = 2,5929 + 0,02064x$	Ajuste Quadrático $y = 2,3684 + 0,08799x - 0,002245x^2$
Desvio Padrão (σ)	0,375kg	0,301kg
Coeficiente de Determinação (R^2)	27,44%	53,36%

Fonte: elaborada pelo autor

As regressões e os coeficientes de determinação das curvas ajustadas também podem ser obtidos a partir de uma calculadora científica, ou pelo software *Excel*, entre outros.

Constatamos na Figura 13 que as regressões e os coeficientes de explicação encontrados em nossos cálculos se aproximam bastante dos verificados no *Excel*. As pequenas diferenças se devem a eventuais aproximações realizadas.

Figura 13 – Comparativo: Regressão Linear e Regressão Quadrática



Fonte: elaborada pelo autor - software *Excel*

Sugerimos o uso de ferramentas tecnológicas como instrumento de verificação dos resultados encontrados. Sobretudo, o ensino deve ser baseado na aplicação dos conceitos de forma manual e em contato direto entre aluno e professor. Acreditamos que as tecnologias complementam o processo de ensino e aprendizagem, no entanto, não o substitui.

4.3.4 Solução para o Problema Base

Estamos em condições de propor uma solução para o problema base, uma vez que, a regressão quadrática $PV = -0,002245(FA)^2 + 0,08799(FA) + 2,3684$ foi escolhida para representar o ganho de peso dos frangos em função da substituição da proteína do farelo se soja pela proteína do farelo de algodão, fundamentada pela análise do desvio padrão e pelo coeficiente de explicação.

A regressão obtida representa uma função quadrática com coeficiente angular negativo, admitindo assim, valor máximo, ou seja, os frangos atingem um peso máximo, que ocorre quando o nível de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão é de

$$FA = \frac{-0,08799}{2(-0,002245)} \cong 19,60\%.$$

Logo, o peso vivo máximo dos frangos, estimado pela regressão, é de

$$PV = -0,002245(19,60)^2 + 0,08799(19,60) + 2,3684 \cong 3,231\text{kg}.$$

Portanto, com base no desempenho dos frangos de corte caipira da linhagem pescoço pelado, recomenda-se a substituição de $19,60\%$ da proteína do farelo se soja pela proteína do farelo de algodão, por oferecer maior ganho de peso para as aves.

Observação 4.3.1. *O valor de R^2 do ajuste quadrático indica que 53,36% da variação do peso vivo pode ser explicada pela variação dos níveis de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão. Assim, 46,64% da variação da regressão depende de outras variáveis, não estudadas no trabalho. É natural esperar que existem outros fatores que explicam o ganho de peso das aves, por exemplo, as demais substâncias que compõem a ração.*

5 CONSIDERAÇÕES

Reconhecemos que a estatística tem valiosa importância no ensino médio, em especial nos cursos técnicos que promovem experimentos na busca por melhorias na produção, na qualidade de vida e uso consciente dos recursos naturais. Consideramos ainda, que o espaço ocupado pela estatística no ensino médio deve ser ampliado, diligenciando um estudo mais aprofundado do tema.

Qualificamos a utilização da modelagem matemática como instrumento didático no processo de ensino e aprendizagem da estatística. Direcionando, por intermédio de seus procedimentos, as etapas a serem percorridas, ou seja, a interação no tema abordado, a formulação do modelo matemático para representar a situação problema e a validação para verificar a proximidade do modelo com a realidade.

Em conformidade à experiência vivenciada na participação do projeto no Instituto Federal do Tocantins campus Dianópolis, acreditamos que a proposta de uso da aplicação na criação de frangos caipiras, na formação básica técnica, atua de forma efetiva na contextualização e interdisciplinaridade dos tópicos de estatística e disciplinas técnicas dos cursos da área de agropecuária.

Entendemos que o modelo matemático escolhido foi determinante para estabelecer o relacionamento entre as variáveis de importância, a saber: peso vivo e os níveis de substituição da proteína do farelo de soja pela proteína do farelo de algodão, sendo essencial para a avaliação e determinação do nível nutricional adequado de utilização do farelo de algodão para obter melhor desempenho e rendimento no sistema de produção de frangos caipiras.

Portanto, findamos este trabalho reconhecendo que um ensino delineado em planejamento de ações, inserção dos conteúdos à realidade dos discentes e na associação estabelecida entre as diversas disciplinas, tem como tendência a promoção de um aprendizado concreto, principalmente no ensino técnico.

Referências

AMORIM, A. F.; SIQUEIRA, J. C. de; RODRIGUES, K. F.; VAZ, R. G. M. V.; BARBOSA, S. M.; SANTOS, H. D.; ROSA, F. C.; SOUSA, J. P. L. de; SILVA, E. G. da; MOUFARREG, I. M. M. de O.; PARENTE, I. P.; SOARES, J. A. R. Níveis de inclusão do bagaço de mandioca na ração de frangos de crescimento lento: características físico-químicas da carne. **Semina: Ciências Agrárias**, Londrina, v. 36, n. 3, p. 1685–1700, mai./jun. 2015. Citado na página 36.

ANDRADE, D. F. de; OGLIARI, P. J. **Estatística básica para as ciências agronômicas e biológicas com noções de experimentação**. 1. ed. Florianópolis: UFSC, 2005. Citado na página 16.

ANDRADE, M. M. **Ensino e aprendizagem de Estatística por meio da Modelagem Matemática: uma investigação com o ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, dez. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 39.

ANTUNES, G. Palestra "modelagem matemática: o que é, para que serve e como fazer". In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. **Conversando sobre Matemática: Seminários de Ensino e Matemática Básica**. Rio de Janeiro, 2010. Citado na página 28.

BARBOSA, T. A.; BUENO, S.; LIMA, M. A. M. Modelagem matemática: um método de ensino e aprendizagem. In: CIAEM - CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII., 2011, Universidade Federal de Pernambuco. **Anais...** Recife: Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2011. ISBN 978-8563823-01-4. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/1343.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2017. Citado na página 30.

BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática: Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. **IX Biomatemática - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica IMECC**, Campinas, p. 9–22, 1999. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2017. Citado na página 30.

______. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 56.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Blumenau, v. 2, n. 2, p. 7–32, julho 2009. Citado na página 27.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011. ISBN 978-85-7244-136-0. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 29.

BRASIL. **Oficio Circular DOI/DIPOA N. 007 de 19 de maio 1999. Dispõe sobre as normas para criação de frango caipira e produção de ovos caipiras**. Brasília, 1999. Disponível em: <http://www.agricultura.gov.br/sislgis>. Acesso em: 3 de jan. 2017. Citado na página 35.

_____. **Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) do ensino médio**. Brasília, 2000. Citado na página 24.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): ensino médio**. Brasília, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

_____. **Guia de livros didáticos PNLD 2015 ensino médio**. Brasília, 2014. Citado na página 25.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. Tese (Doutorado em Psicologia Educacional) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas, junho 1992. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 30.

BUTOLO, J. E. **Qualidade de ingredientes na alimentação animal**. Campinas: J. E. Butolo, 2002. ISBN 9788590247319. Citado na página 36.

CAIRES, C. M.; CARVALHO, A. P. de; CAIRES, R. M. Criação alternativa de frangos de corte. **Revista Eletrônica Nutritime**, v. 7, n. 2, p. 1169–1174, mar./abr. 2010. ISSN 1983-9006. Disponível em: <http://www.nutritime.com.br/arquivos_internos/artigos/106V7N2P1169_1174MAR2010_.pdf>. Acesso em: 3 de jan. 2017. Citado na página 36.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatıstica: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. (Tendências em Educação Matemática). ISBN 9788582170878. Citado na página 30.

CARNEIRO, J. P. Q. Uma aplicação das funções quadráticas. **RPM Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 48, p. 7–12, 2002. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/48/2.htm>. Acesso em: 25 jan. 2017. Citado na página 59.

CARVALHO, A. A importância do ensino de estatística na formação inicial do professor de matemática. In: EBRAPEM - ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIX., 2015, UFJF. **Anais...** Juiz de Fora: EBRAPEM, 2015. ISSN 2237-8448. Citado na página 34.

CRESPO, A. A. **Estatítica Fácil**. 18. ed. São Paulo: Saraiva, 2004. ISBN 85-02-02056-0. Citado na página 51.

EMBRAPA. **Cultura do algodão herbáceo na agricultura familiar**. 3. ed. Brasília, 2014. Disponível em: <https://www.spo.cnptia.embrapa.br/conteudo?p_p_id=conteudoportlet_WAR_sistemasdeproducaolf6_1ga1ceportlet&p_p_lifecycle=0&p_p_state=normal&p_p_mode=view&p_p_col_id=column-1&p_p_col_count=1&p_r_p_-76293187_sistemaProducaoId=3718&p_r_p_-996514994_topicoId=3313>. Acesso em: 5 de fev. 2017. Citado na página 36.

FIETZ, H. M. **O ensino de estatística por meio de uma atividade de modelagem matemática**. 2011. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) - UFRGS. Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática, Porto Alegre, 2011. Citado na página 30.

FONSECA, J. S. da; MARTINS, G. de A. **Curso de estatística**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 53.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. M. **Fundamentos de Matemática Elementar: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva**. 2. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 11. 256 p. ISBN 9788535717600. Citado na página 22.

MENDONÇA, L. de O.; LOPES, C. E. Modelagem matemática: um ambiente de aprendizagem para implementação da educação estatística no ensino médio. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 24, n. 40, p. 701–724, dez. 2011. ISSN 0103-636X. Citado na página 30.

MOREIRA, F. M. B.; MAGINA, S. M. P. Modelagem matemática como estratégia de ensino-aprendizagem da matemática. In: ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI., 2013, Pontifícia Universidade Católica do Paraná. **Anais...** Curitiba: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013. ISSN 2178-034X. Citado na página 30.

PIMENTEL-GOMES, F. **Curso de Estatística Experimental**. 15. ed. Piracicaba: FEALQ, 2009. v. 15. ISBN 978-85-7133-055-9. Citado na página 55.

RONDÓN, E. O. O.; MURAKAMI, A. E.; SAKAGUTI, E. S. Modelagem computacional para produção e pesquisa em avicultura. **Revista Brasileira de Ciência Avícula**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 199–207, jan./mar. 2002. ISSN 1516-635X. Citado na página 28.

ROSTAGNO, H. S.; ALBINO, L. F. T.; DONZELE, J. L.; GOMES, P. C.; OLIVEIRA, R. F.; LOPES, D. C.; FERREIRA, A. S.; BARRETO, S. L. T.; EUCLIDES, R. F. **Tabela brasileira para aves e suínos: composição de alimentos e exigências nutricionais**. 3. ed. Viçosa: UFV - DZO, 2011. ISBN 978-85-6024-97-2-5. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.