



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ELISMAR RODRIGUES DA CUNHA

**ALGUMAS PROPRIEDADES ARITMÉTICAS DOS
NÚMEROS PALÍNDROMOS**

Arraias-TO
2024

Elismar Rodrigues da Cunha

Algumas propriedades aritméticas dos números palíndromos

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

Arraias-TO
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C972a Cunha, Elismar Rodrigues da.
Algumas propriedades aritméticas dos números palíndromos. /
Elismar Rodrigues da Cunha. – Arraias, TO, 2024.
63 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins –
Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2024.

Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Números Palíndromos. 2. Algoritmo de Trigg. 3. Base Nacional
Comum Curricular. 4. Proposta de Atividade. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de
qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que
citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime
estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha
catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**


Elismar Rodrigues Da Cunha

Algumas Propriedades Aritméticas Dos Números Palíndromos


Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 12/07/2024


Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 **EUDES ANTONIO DA COSTA**
Data: 23/07/2024 13:31:04-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
(UFT/Arraias/Matemática)

Documento assinado digitalmente
 **ADRIANO RODRIGUES**
Data: 19/07/2024 09:23:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Adriano Rodrigues
(UFT/Arraias/Matemática)

Documento assinado digitalmente
 **FABIO NUNES DA SILVA**
Data: 22/07/2024 08:23:26-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fábio Nunes da Silva
(UFOB/Barreiras/Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias)

A minha família, amigos/colegas, e todos que acreditaram e vivenciaram meu progresso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por todas as oportunidades e livramentos na minha vida.

Ao professor Dr. Eudes Antonio da Costa, pela paciência e dedicação durante o período da elaboração do trabalho, a todos os demais professores do curso, e aos professores da banca que aceitarem participar da mesma.

Em especial aos meus pais Josenita e Diosmar, as minhas irmãs Edineide, Edileia e Helles, por todos os incentivos, apoio e ajuda tanto durante o curso quanto na minha vida. Sou eternamente grato por estarem ao meu lado. E por serem minha inspiração.

Aos meus amigos Alana, Ana Beatriz, Cleidiane, Denize, Jaqueline, Marta, Mateus, Victor, Rafael e Ricardo, agradeço por todos os risos, conselhos e pelos momentos compartilhados dentro e fora da universidade, das palavras de incentivo em momentos de desistência.

A Universidade Federal do Tocantins pelo apoio financeiro e estrutural para minha evolução acadêmica.

“Os números são um catalisador que pode ajudar a transformar loucos delirantes em seres humanos educados.”

Philip J. Davis

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo a identificação de padrões numéricos acerca dos números palíndromos utilizando o algoritmo de Trigg. Neste intuito analisamos o uso dos algoritmos e tecnologias descritas na BNCC (2018), e fundamentando na mesma para a construção de uma proposta de atividades sobre os números palíndromos que possam ser desenvolvidas na educação básica, a fim de compreender as habilidades e competências descritas na BNCC (2018), assim, motivando os estudantes a analisar a importância da utilização dos recursos tecnológicos e dos procedimentos presentes em um algoritmo, sendo a favor do seu aprendizado e conhecimento na matemática e em outras áreas. Para além disso, destacamos a importância do uso das tecnologias, então utilizamos uma calculadora digital PALINDROME CALCULATOR importante recurso tecnológico no desenvolvimento deste trabalho. Os números palíndromos apresentamos as características, definições, propriedades e até mesmo curiosidades. Nosso resultado, na forma de proposições relacionadas a quantidade de iterações para formar um número palíndromo seguindo o algoritmo de Trigg.

Palavras-chave: Algoritmo de Trigg; Números Palíndromos; BNCC.

ABSTRACT

This work aimed to identify numerical patterns regarding palindromic numbers using the Trigg algorithm. To this end, we analyzed the use of algorithms and technologies described in BNCC (2018). We based on the same for the construction of a proposal for activities on palindromic numbers that can be developed in basic education, in order to understand the skills and competencies described in BNCC (2018), thus motivating students to analyze the importance of using technological resources and procedures present in an algorithm, being in favor of their learning and knowledge in mathematics and other areas. Furthermore, we highlight the importance of using technology, so we used a digital calculator PALINDROME CALCULATOR, an important technological resource in the development of this work. The palindromic numbers we present the characteristics, definitions, properties, and even curiosities. Our results, in the form of propositions related to the number of iterations, form a palindromic number following the Trigg algorithm.

Keywords: Trigg Algorithm; Palindrome Numbers; BNCC.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo de aplicação	18
Tabela 2 – Números ab , com $a < b$	23
Tabela 3 – Iterações com 2 algarismos	35
Tabela 4 – Iterações com 3 algarismos	40
Tabela 5 – Iterações com 4 algarismos	44
Tabela 6 – Iterações com 5 algarismos	47
Tabela 7 – Repunidade ao quadrado	48

LISTA DE QUADROS

1	Unidade Temática de Números, da Matemática, no Ensino Fundamental Anos Finais da BNCC.	52
2	Competências Específicas 1 e 3 do Ensino Médio	53

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fatorando 10301	28
Figura 2 – Resolução do problema 5.1.a	58
Figura 3 – Resolução do problema 5.1.b	59
Figura 4 – Resolução do problema 5.2.a	59
Figura 5 – Resolução do problema 5.3.c	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS BÁSICOS	14
2.1	Fundamentação Histórica	14
2.2	CrITÉrios de divisibilidades	18
3	TEORIA DOS NÚMEROS	22
3.1	Problemas Motivadores	22
3.2	Propriedades dos Números Palíndromos	25
4	ALGORITMO DOS NÚMEROS PALÍNDROMOS	29
4.1	Números n com 2 algarismos	30
4.2	Números n com 3 algarismos	35
4.3	Números n com 4 algarismos	40
4.4	Números n com 5 algarismos	44
4.5	Repunidades ao quadrado	47
5	BNCC E CONTEXTO PARA O ENSINO	49
5.1	BNCC, Tecnologias e Algoritmos	49
5.2	Algoritmo de Trigg	53
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma das áreas mais antigas e fascinantes do conhecimento humano, que nos leva a descobrir verdades impressionantes sobre o universo matemático. Cientes disso, neste trabalho exploraremos algumas propriedades de um subconjunto dos números inteiros, denominado por números palíndromos e também apresentamos uma proposta de atividades com Auxílio de recursos tecnológicos para o ensino desta classe de números na educação básica. O desenvolvimento deste trabalho surgiu quando o tema em questão foi apresentado para elaboração do Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso com o seguinte problema a ser pesquisado: **Quais números palíndromos podemos formar um quadrado perfeito ou primo ou monodígitos? E quantas iterações são necessárias?** E também a partir da curiosidade das características do número do ano do meu nascimento que foi em 2002.

Os números palíndromos são os números que quando invertemos a ordem de seus algarismos, sendo que este número continua o mesmo. Considere um número $n_x = a_{x-1}a_{x-2}\dots a_1a_0$ e seu reverso $n'_x = a_0\dots a_{x-1}$, sendo $x \geq 2$ é um número natural, $a_i \in D = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$, com $i = 0, \dots, x-1$, $a_{x-1} \neq 0$ e $a_0 \neq 0$ (base 10). Dizemos que o número n_x é um palíndromo quando o número n_x for igual ao seu reverso, ou seja, $n_x = n'_x$. A exemplo de 2002, os números 101 é também um palíndromo e primo; enquanto $40804 = 202^2$ é palíndromo e quadrado perfeito.

Em relação ao procedimento metodológico utilizado para elaboração deste trabalho foi de natureza qualitativa, ou seja, sendo utilizado referências bibliográficas como livros, artigos, periódicos, sites e trabalhos acadêmicos com a finalidade de agregar na fundamentação da pesquisa em questão. Com relação a estrutura, este trabalho está dividido em cinco capítulos.

No primeiro capítulo temos a introdução a fim de nortear o leitor. Já no segundo capítulo apresentaremos a fundamentação histórica acerca dos conceitos matemáticos fundamentais da aritmética. Com isso, apresentaremos o sistema de numeração posicional, elementos dos números inteiros, alguns critérios de divisibilidade que serão uteis em resolução de problemas e demonstrações no restante do trabalho.

No terceiro capítulo exploraremos alguns conceitos da Teoria dos Números como a permutação de algarismos, números monodígitos, repunidades, quadrado perfeito e algumas propriedades e definições dos números palíndromos. Em alguns casos utilizaremos problemas motivadores referentes aos conceitos descritos anteriormente, tais problemas podem ser encontrados nos bancos de questões e provas da OBMEP.

No quarto capítulo apresentamos, os resultados matemáticos acerca dos números palíndromos, ou seja, desenvolvemos proposições em relação a quantidade de iterações em que são necessárias para formar um número palíndromo. As proposições foram desenvolvidas a partir do algoritmo de Trigg. Exploramos também outra maneira de formar números palíndromos, quando elevamos uma repunidade ao quadrado, ou seja, resultados da seguinte equação $R_x \cdot R_x = \frac{10^{2x} - 2 \cdot 10^x + 1}{9^2}$, com $2 \leq x \leq 9$.

No quinto capítulo analisamos e discutimos os usos de tecnologias e algoritmos em atividades de ensino de matemática tendo como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Destacamos que o algoritmo de Trigg pode ser explorado tanto para o desenvolvimento das proposições no Capítulo 4, quanto para a elaboração de uma proposta de desenvolvimento de atividades com auxílio de recursos tecnológicos para o ensino dos números palíndromos na educação básica.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentamos algumas noções históricas com intuito de facilitar o entendimento deste trabalho, e alguns conceitos fundamentais da Aritmética para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Diante disso, utilizamos as seguintes referências: Boyer (2010); Carvalho e Costa (2015); Costa e Soares (2024); Domingues (2009); Eves (2011); Fomín (1975); Ifrah (2005); Niven (1991); Santos (2003); Rodrigues (2015); Roque (2012).

2.1 Fundamentação Histórica

Segundo Eves (2011) como usualmente se considera a matemática mais antiga aquela resultante dos primeiros esforços do homem para sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número, enfatizando de início o surgimento do homem primitivo no conceito de número e do processo de contar.

O conceito de números e o processo de contar foi desenvolvido muito antes dos primeiros registros históricos, há evidências arqueológicas que a humanidade, cerca de 50000 anos, já era capaz de quantificar ou contar seu rebanho ou objetos. A partir da evolução da sociedade tornaram inevitáveis contagens simples e algum processo de registro do mesmo. O homem pré-histórico praticava a aritmética básica antes mesmo de ter consciência e de saber o que era um número abstrato. Por aritmética básica, entendemos o processo de juntar ou adicionar coisas, ou ainda retirar.

Os milhares de anos que foram necessários para que a humanidade fizesse uma distinção entre os conceitos abstratos e as repetidas situações concretas mostram as dificuldades que devem ter sido experimentadas para se estabelecer uma devida fundamentação, ainda mesmo que muito primitiva, para a matemática. Assim, de acordo com Boyer (2010) existem evidências que o processo de contar surgiu em uma conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal dos números precedeu o conceito quantitativo.

As primeiras caracterizações dos numerais não eram símbolos criados para representar números, mas sim sinais impressos que indicavam medidas de grãos, pois o registro das quantidades poderiam servir para coisas de naturezas distintas, no entanto surgiu a necessidade da indicação do que estava sendo contado. Além disso, as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que referiam aos objetos que estavam sendo contados. Diante disso, conforme Roque (2012) existem registros que as sociedades antigas possuíam uma vida econômica ativa, e com a variedade de objetos com os quais os mesmos lidavam poderiam ser muito grandes, assim, nesses casos representavam símbolos distintos

para quantidade iguais desses objetos.

De acordo com Ifrah (2005) ao contrário da percepção direta dos números para representar quantidades, a contagem não é uma aptidão natural. Pelo o que sabemos a contagem é um atributo humano, sendo um fenômeno mental, intimamente ligado ao desenvolvimento da inteligência humana.

O sistema de numeração posicional decimal demorou muito para ocupar uma posição dominante em que ocupa atualmente. Em diversos períodos históricos, muitos povos usaram sistemas de numeração diferentes do decimal. Para esse sistema, depois de se escolher uma base b , adotam-se símbolos para $0, 1, 2, \dots, b-1$. Assim, há no sistema b símbolos básicos, no caso do nosso sistema frequentemente chamamos de dígitos ou algarismos. Qualquer número n pode ser escrito de maneira única na forma:

$$n = a_x b^x + a_{x-1} b^{x-1} + \dots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 ,$$

no qual $0 \leq a_i < b$, $i = 0, 1, \dots, x$. Com isso, representamos o número n na base b pela sequência de símbolos

$$n = (a_x a_{x-1} \dots a_1 a_2 a_0)_b .$$

Conforme Domingues (2009), o sistema de base 10 que utilizamos atualmente, por exemplo, Aristóteles¹ observou que a escolha da base decorre do acidente anatômico de termos dez dedos nas mãos. O vocábulo dígito, em que indicamos os algarismos de 0 a 9, originado do termo latino *dígitos*, que significa dedo.

Sabemos que os números naturais ou inteiros positivos têm uma impressionante história no decorrer dos tempos. Vimos que surgiram a partir da necessidade de contar e representar quantidades. Assim, civilizações antigas, como babilônicos e egípcios utilizavam sistemas de contagens rústicos. Porém na Grécia antiga, os filósofos começaram a explorar conceitos matemáticos sofisticado. Entretanto, os gregos não possuíam um conceito compreensível para os números negativos.

De acordo com Domingues (2009,) coube aos hindus a introdução dos números negativos na matemática. O objetivo era indicar débitos. Os primeiros registros dos números negativos foram feitos pelo matemático Brahmagupta² (598-668 d.C.).

Numa perspectiva informal, novos números adotados, correspondentes da diferença $a - b$ ($a < b$), interpretados completamente (como débitos) e agregados aos naturais. Tendo resultado desta união o surgimento do conjunto dos números inteiros. De maneira análoga

¹ Aristóteles (384-322 a.C.) foi um discípulo de Platão, sendo antes de tudo um filósofo e biólogo, mas que estava completamente ligado as atividades dos matemáticos. Os estudos matemáticos de Aristóteles, embora menos técnicos que os de outros matemáticos gregos, foram cruciais para a fundamentação filosófica da matemática. (Boyer, 2010).

² Brahmagupta (viveu em 628 d.C.), vivendo na Índia Central, foi um matemático e astrônomo. Sendo o primeiro a dar regras para calcular o número zero. (Boyer, 2010).

surgem os números negativos $(-1, -2, -3, -4, -5, \dots)$. Sendo n um número natural, o conjunto dos números inteiros pode ser representado por \mathbb{Z} , assim:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -(n+1), -n, \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +n, +(n+1), \dots\}.$$

A adição e multiplicação dos números inteiros são operações fundamentais na área da matemática de dois números inteiros. A adição dos inteiros envolve-se na combinação de dois ou mais inteiros, sendo obtido outro inteiro. A operação de adição atende as seguintes propriedades:

1. Associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
2. Comutativa: $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. Elemento Neutro: $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$ (0 é o elemento neutro da adição).
4. Elemento Simétrico: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $a + b = 0$.

As demonstrações das propriedades podem ser encontradas em Domingues (2009).

A multiplicação dos inteiros é nada mais que a adição de um número a si mesmo repetidamente. A multiplicação possui as mesmas propriedades da adição:

1. Associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
2. Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.
3. Elemento Neutro: $x \cdot 1 = x$, 1 é o elemento neutro da multiplicação.
4. Distributiva: $a \cdot (b + c) = ab + ac$ em relação a adição.

Igualmente as demonstrações podem ser encontradas em Domingues (2009).

Os conceitos de múltiplos e divisores de um número inteiro, ao tratarmos deste assunto referimos a um conjunto numérico que satisfazem algumas condições. A partir disso, encontramos um subconjunto dos números inteiros, pois os elementos dos conjuntos dos múltiplos e divisores são elementos dos inteiros. Então, os múltiplos são encontrados após a operação de multiplicação por um número inteiro, já os divisores são números divisíveis por um devido número inteiro.

De acordo com Domingues (2009), diz-se que um número inteiro a divide um inteiro b se $b = a \cdot c$ para algum $c \in \mathbb{Z}$. Quando isso acontece também diz que a é divisor de b ou que b é múltiplo de a , ou divisível por a .

O conceito de congruência módulo m na Teoria dos Números foi introduzida por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, sendo uma

notação matemática que está envolvida entre os números inteiros sob a operação de divisão euclidiana. Sendo uma área em que estuda propriedades dos inteiros com relação a um módulo específico. Uma congruência nada mais é do que uma afirmação sobre divisibilidade. No entanto, é mais do que apenas uma notação conveniente, muitas vezes torna mais fácil para descobrir provas.

Conforme Niven (1991, p. 48) se um inteiro m , $m \neq 0$, divide a diferença $a - b$, dizemos que a é congruente com b módulo m e escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$. Se $a - b$ não é divisível por m , dizemos que a não é congruente com b módulo m , e neste caso escrevemos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Por exemplo, se $a = 29$, $b = 4$ e $m = 5$, então, $29 \equiv 4 \pmod{5}$. Isto é verdade pois $29 - 4 = 25$, e 25 é divisível por 5. Por outro lado, temos que se $a = 31$, $b = 6$ e $m = 4$, então, $31 \not\equiv 6 \pmod{4}$, pois $31 - 6 = 25$, 25 que não é divisível por 4.

Na aritmética, a divisão euclidiana é um processo em que dividimos um número inteiro (o dividendo) por outro número inteiro (divisor), sendo que resulte em um quociente e um resto menor que o divisor. De acordo com Santos (2003), dados dois números inteiros a e b , com $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r , tais que $a = q \cdot b + r$, com $0 \leq r < b$, sendo que q chamamos de quociente e r de resto na divisão de a por b .

Considerando que $a = 29$, $b = 6$, assim, ao dividirmos 29 por 6 teremos o quociente e o resto $q = 4$ e $r = 5$, então, $29 = 6 \cdot 4 + 5$. O quociente e o resto da divisão de $a = -19$ por $b = 4$, resulta em $q = -5$ e $r = 1$, com isso, $-19 = 4 \cdot (-5) + 1$.

Considere que Elismar está gerenciando seu saldo bancário durante o mês de março. Assim, ele começa o mês com um saldo de 800 reais. Durante o mês, ele faz algumas transações que envolvem depósitos (valores positivos) e retiradas (valores negativos). Iremos acompanhar essas transações e calcular o saldo após cada uma delas. Logo, seguimos as seguintes transações feitas por Elismar:

- **Primeira Transação:** Elismar faz um depósito do seu salário de 1500 reais.
Saldo: $800 + 1500 = 2300$ reais.
- **Segunda Transação:** Elismar paga contas no valor de 900 reais.
Saldo: $2300 - 900 = 1400$ reais.
- **Terceira Transação:** Elismar faz compras no supermercado no valor de 500 reais.
Saldo: $1400 - 500 = 900$ reais.
- **Quarta Transação:** Elismar faz pagamento do aluguel no valor de 700 reais.
Saldo: $900 - 700 = 200$ reais.
- **Quinta Transação:** Elismar fez uma compra emergencial no valor de 220 reais.

Saldo: $200 - 220 = -20$ reais.

Seguimos a Tabela 1 com os seguintes valores das transações.

Tabela 1 – Exemplo de aplicação

Transação	Tipo	Valor (R\$)	Saldo (R\$)
Saldo Inicial	-	-	800
Salário	Depósito	1500	2300
Pagamentos de Contas	Retirada	900	1400
Compras no supermercado	Retirada	500	900
Aluguel	Retirada	700	200
Compras Emergenciais	Retirada	220	-20

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Esta é uma aplicação em que envolve os números inteiros em uma prática comum no cotidiano de muitas pessoas, ajudando a manter um controle financeiro eficaz e a tomar decisões informadas sobre suas finanças pessoais.

2.2 Critérios de divisibilidades

Nesta seção apresentaremos alguns critérios de divisibilidade que serão utilizados para demonstração ou resolução de questões nos próximos capítulos.

Os critérios de divisibilidades são regras que ajudam a determinar se um número é divisível por outro sem precisar fazer a divisão euclidiana entre eles. São úteis para simplificar cálculos.

A soma de algarismos ou dígitos de um número, está relacionada à soma de todos os algarismos individuais de um número qualquer. Assim, sendo um conceito simples e frequente utilizado na matemática básica, especialmente em problemas envolvendo divisibilidade. Segundo Costa e Soares (2024) podemos descrever a soma dos algarismos de um número $n = a_{x+1} \dots a_2 a_1 a_0$ com x algarismos por

$$s(n) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{x+1} .$$

Um número será divisível por 9 quando a soma de todos os seus algarismos ou dígitos resultarem em um número múltiplo de 9, então este número será divisível por 9.

Lema 2.1 (SANTOS, 2003). *Um número é divisível por 9, se a soma dos algarismos que formam o número seja divisível por 9.*

Prova: Para demonstrar o critério de divisibilidade por 9, vamos considerar $n = a_x a_{x-1} \dots a_1 a_0$, sendo que, cada a_j representa um dígito deste número. Logo, o número pode ser expresso

por,

$$n = a_x \cdot 10^x + a_{x-1} \cdot 10^{x-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 .$$

A soma dos dígitos de n é dado por:

$$y = a_x + a_{x-1} + \dots + a_1 + a_0 .$$

Assim, a diferença entre $n - y$ é expressa por:

$$n - y = (a_x \cdot 10^x + a_{x-1} \cdot 10^{x-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0) - (a_x + a_{x-1} + \dots + a_1 + a_0)$$

$n - y = (a_x \cdot 10^x - 1) + a_{x-1} \cdot (10^{x-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10 - 1)$, podemos observar que a cada termo de $a_j \cdot (10^j - 1)$ é obviamente divisível por 9, tendo que, $10^j - 1$ é sempre múltiplo de 9. Assim, $n - y$ é divisível por 9. Logo, se n é divisível por 9, então y também é múltiplo de 9. ■

Portanto, caso a soma dos algarismos de um número seja divisível por 9, então este número é divisível por 9.

Exemplo 2.1. O número 91548 é divisível por 9. De fato, $9 + 1 + 5 + 4 + 8 = 27$ a soma dos algarismos ($9 + 1 + 5 + 4 + 8 = 27$), divisível por 9, então segue o Lema 2.1 que o número é divisível por 9. Então o número será divisível por 9, sem precisar realizar a divisão, como sabemos, $91548 = 9 \cdot 10172$.

Um número é divisível por 11, caso a soma dos algarismos de ordem par subtraídos pela soma dos algarismos de ordem ímpar, resultar em um número divisível por 11. Caso o resultado seja igual a 0, pode-se afirmar também que é divisível por 11, a ordem par e ímpar diz a respeito a ordem dos algarismos do número, partindo da esquerda para direita.

Lema 2.2 (SANTOS, 2003). *Um número é divisível por 11, se a soma dos algarismos de ordem ímpar subtraídos pela soma dos algarismos de ordem par, resultar em um número divisível por 11. Então o número também será divisível por 11.*

Prova: Para demonstrar o critério de divisibilidade por 11, iremos utilizar a notação de congruência, assim, temos

Seja o número

$$\begin{aligned} n &= (a_x a_{x-1} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} \\ &= a_x \cdot 10^x + a_{x-1} \cdot 10^{x-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} 10^0 &\equiv 1 \pmod{11} \\ 10^1 &\equiv 10 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad 10^1 \equiv -10 \pmod{11} \\ 10^2 &\equiv 1 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad 10^2 \equiv -10 \pmod{11} \\ 10^3 &\equiv 10 \pmod{11} \quad \text{ou} \quad 10^3 \equiv -1 \pmod{11} , \end{aligned}$$

na forma geral

$$\begin{aligned} a_0 \cdot 10^0 &\equiv 1 \cdot a_0 \pmod{11} \\ a_1 \cdot 10^1 &\equiv -1 \cdot a_1 \pmod{11} \\ a_2 \cdot 10^2 &\equiv 1 \cdot a_2 \pmod{11} \\ a_3 \cdot 10^3 &\equiv -1 \cdot a_3 \pmod{11} , \end{aligned}$$

então concluímos que

$$\begin{aligned} n &\equiv a_x \cdot 10^x + a_{x-1} \cdot 10^{x-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\ &\equiv a_x \cdot 1 + a_{x-1} \cdot -1 + \dots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot -1 + a_0 \cdot 1 \pmod{11} \\ &\equiv a_x - a_{x-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11} . \end{aligned}$$

Portanto, um número n é divisível por 11 se a subtração das somas de ordem ímpar pela soma de ordem par for múltiplo de 11.

■

Exemplo 2.2. O número 65208 é divisível por 11, pois ao subtrairmos a soma de ordem ímpar com a soma de ordem par.

$$(S_i - S_p) = (6 + 2 + 8) - (5 + 0) = 16 - 5 = 11$$

logo, 11 é múltiplo de 11, então 65208 é divisível por 11. Novamente, sem precisar realizar a divisão euclidiana, como sabemos, $65208 = 11 \cdot 5928$.

O próximo resultado nos será útil mais adiante.

Proposição 2.1 (CARVALHO, COSTA, 2015). *Todo número de 4 algarismos formado com 2 algarismos distintos é composto.*

Prova: Veja que o número $n = aabb$ é múltiplo de 11, pois $a - a + b - b = 0$. Da mesma forma para $n = abba$, pois $a - a + b - b = 0$. Para $n = abab$, temos que

$$n = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b ,$$

assim,

$$\begin{aligned} n &= a(10^3 + 10) + b(100 + 1) \\ &= a(1010) + b(101) \\ &= 101(a \cdot 10 + b) , \end{aligned}$$

definindo ab como um número $ab = 10a + b$, podemos reescrever a expressão como

$$n = 101 \cdot ab .$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}n &= aabb \\ &= 11 \cdot a0b \\ n &= abab \\ &= 101 \cdot ab \\ n &= abba \\ &= 11 \cdot (91 \cdot a + 10 \cdot b) .\end{aligned}$$

Logo, nos três casos possíveis de distribuições dos dígitos, sempre temos um número composto. ■

3 TEORIA DOS NÚMEROS

Neste capítulo exploraremos os conceitos de permutação de algarismos, em que está envolvido no reposicionamento dos dígitos de um número, assim formando novos números reordenados. A reversão de algarismos é um dos mais simples conceitos de permutação de algarismos. Sendo utilizadas as seguintes referências: Costa e Santos (2022); Costa e Santos (2023); OBMEP (2009, 2010, 2023); Ochoviet (1995); Santos e Costa (2022).

3.1 Problemas Motivadores

Dado um número inteiro positivo $n_x = a_{x-1}a_{x-2} \dots a_2a_1a_0$ qualquer formado por x algarismos, com $x \geq 2$ e $a_{x-1} \neq 0$. Para $x \geq 2$, o número com x algarismos obtido pela inversão da posição dos algarismos de n_x é chamado de número reverso de n_x e é indicado por n'_x , logo, $n'_x = a_0 \dots a_{x-1}$.

Portanto, o reverso de um número inteiro de dois algarismos é o número que se obtém invertendo posição de seus algarismo. Por exemplo, 24 é o reverso de 42 e vice-versa.

Lembramos ainda que um número é considerado um quadrado perfeito quando for um produto de um número por si mesmo, assim, um número natural n é um quadrado perfeito se existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $n = a^2$.

Problema 3.1 (OBMEP 2010, Banco de Questões). *Quantos números inteiro de dois algarismos existem que, adicionados ao seu reverso, dão um quadrado perfeito?*

Resolução: Dado o número ab de dois algarismos, em que a é o algarismo das dezenas e b o das unidades, $ab = a \cdot 10 + b$, seu reverso é, então, $ba = 10 \cdot b + a$. Temos que,

$$ab + ba = (a \cdot 10 + b) + (b \cdot 10 + a) = (a + b) \cdot 11 .$$

Por outro lado admitindo que, $a \leq b \leq 9$, de modo que $a + b \leq 18$. Como 11 é um número primo e $a + b \leq 18$. Portanto, 11 divide $a + b$ se, e somente se, $a + b = 11$. Na Tabela 2, listamos os casos possíveis.

Tabela 2 – Números ab , com $a < b$

a	b	ab
2	9	29
3	8	38
4	7	47
5	6	56

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Logo, temos 8 números satisfazendo a condição do problema: 29, 38, 47, 56, e seus reversos que são 65, 74, 83, 92. •

Considere um número $n_x = a_{x-1}a_{x-2} \dots a_1a_0$ e seu reverso $n'_x = a_0 \dots a_{x-1}$, sendo $x \geq 2$ um número natural, $a_i \in D = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$, com $i = 0, \dots, x-1$ e $a_{x-1} \neq 0$ (base 10). Dizemos que o número n_x é um palíndromo quando o número n_x for igual ao seu reverso, ou seja, $n_x = n'_x$.

Os números palíndromos é uma classe fascinante dos números inteiros, tendo características únicas, sendo que estes números conseguimos ler tanto da direita para a esquerda, quanto da esquerda para direita e tem se o mesmo valor. Compreendemos que os número palíndromos podem ser denotados como um número par $x = 2k$ algarismos ou ímpar $x = 2k + 1$ algarismos. O termo palíndromo vem do grego: *palín* (novo ou inverso) e *dromo* (caminho, curso). Por exemplo, os números 2002, 2112, 9669, 23432 e 18781 são palíndromos.

Problema 3.2 (OBMEP 2009, Banco de Questões). *Quantos números palíndromos de 4 algarismos são divisíveis por 9?*

Resolução: Um número palíndromo de 4 algarismos é da forma $abba$, sendo que a é um algarismo entre 1 e 9 e b é um algarismo entre 0 e 9. Tendo que o número é divisível por 9, assim utilizando Lema 2.1, então a soma de seus algarismos: é $2a + 2b = 2(a + b)$. Para que $2(a + b)$ seja divisível por 9, temos duas possibilidades : (1) $a + b = 9$ ou (2) $a + b = 18$. Se $a + b = 9$, temos 9 soluções, à saber:

$$\begin{aligned} a = 1 \text{ e } b = 8; & \quad a = 2 \text{ e } b = 7; & \quad a = 3 \text{ e } b = 6; \\ a = 4 \text{ e } b = 5; & \quad a = 5 \text{ e } b = 4; & \quad a = 6 \text{ e } b = 3; \\ a = 7 \text{ e } b = 2; & \quad a = 8 \text{ e } b = 1; & \quad a = 9 \text{ e } b = 0. \end{aligned}$$

Se $a + b = 18$, então temos uma única solução que é $a = b = 9$.

Logo, palíndromos de 4 algarismos divisível por 9 são 10. São eles 1881, 2772, 3663, 4554, 8118, 7227, 6336, 5445, 9009 e 9999. •

No próximo problema exploramos o conceito de números monodígito. Os números monodígitos são aqueles formados pela repetição do mesmo dígitos, ou seja, podemos

identificar que todo o número monodígito são palíndromos. Um número monodígito é representado por $a_{[x]} = \underbrace{aaa \dots aaa}_{x \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot 11 \dots 11}_{x \text{ vezes}} = a \cdot R_x$, para $x \geq 2$ e $a \in \{2, 3, \dots, 8, 9\}$. Assim, algumas propriedades e definições sobre os números monodígitos podem ser encontrados em (COSTA, SANTOS, 2022), como descrevemos anteriormente. De acordo com Costa e Santos (2023) um número repunidade “ $R_x = \underbrace{11 \dots 11}_{x \text{ vezes}}$ ”, sendo x um número natural. Veja que as repunidades formam uma subclasse de monodígito, pois consiste apenas na repetição do algarismos 1. Por exemplo usando a notação de monodígitos, escrevemos os números “1, 11, 111, 1111, ...”, na forma de $1_{[1]}, 1_{[2]}, 1_{[3]}, 1_{[4]}, \dots, 1_{[x]}$.

Problema 3.3 (OBMEP 2023, Prova 2ª Fase Nível 1-Adaptado). *Carlinhos fez todas as adições possíveis com três parcelas diferentes, em que cada parcela é um número de três algarismos iguais, sempre colocando as parcelas em ordem crescente. Por exemplo, $2_{[3]} + 5_{[3]} + 8_{[3]}$ e $4_{[3]} + 7_{[3]} + 8_{[3]}$ foram adições feitas por Carlinhos. Ele não fez a adição $2_{[3]} + 8_{[3]} + 5_{[3]}$, pois as parcelas não estão em ordem crescente, nem a adição $4_{[3]} + 4_{[3]} + 7_{[3]}$, pois nela existem parcelas iguais.*

- Escreva uma adição que Carlinhos fez em que o resultado é 1332.
- Escreva todas as adições que Carlinhos fez em que o resultado é 2109.
- Explique por que 2109 é o único resultado das adições que Carlinhos fez em que o algarismo das dezenas é diferente do algarismo das centenas.

Resolução:

- Há diversas possibilidades de soluções, por exemplo, $1_{[3]} + 5_{[3]} + 6_{[3]}$; $2_{[3]} + 3_{[3]} + 7_{[3]}$; $3_{[3]} + 4_{[3]} + 5_{[3]}$. Verificamos que cada parcela é um número de três algarismos iguais, e que as parcelas devem está em ordem crescente.
- Todos os números que Carlinhos considerou são múltiplos de $1_{[3]}$, $1 \cdot 1_{[3]} = 1_{[3]}$, $2 \cdot 1_{[3]} = 2_{[3]}$, $3 \cdot 1_{[3]} = 3_{[3]}$, e assim por diante. Por este motivo, 2109, que é resultado da soma de três desses números, também é múltiplo de $1_{[3]}$. Ao dividirmos 2109 por $1_{[3]}$, obtemos 19, ou seja, $2109 = 19 \cdot 1_{[3]}$.

Em outras palavras, devemos encontrar todos as somas ordenadas de três parcelas para obtermos $19 \cdot 1_{[3]}$. Assim, existem 5 possibilidades, que são elas:

$$\begin{aligned} (2 + 8 + 9) \cdot 1_{[3]} &= 2_{[3]} + 8_{[3]} + 9_{[3]} \\ (3 + 7 + 9) \cdot 1_{[3]} &= 3_{[3]} + 7_{[3]} + 9_{[3]} \\ (4 + 6 + 9) \cdot 1_{[3]} &= 4_{[3]} + 6_{[3]} + 9_{[3]} \\ (4 + 7 + 8) \cdot 1_{[3]} &= 4_{[3]} + 7_{[3]} + 8_{[3]} \\ (5 + 6 + 8) \cdot 1_{[3]} &= 5_{[3]} + 6_{[3]} + 8_{[3]} . \end{aligned}$$

- c) As somas de três parcelas resultando em um número menor que $9_{[3]}$ possuem todos os mesmos algarismos do deslocamento de um grupo de 10 ou da dezena e centena (não ocorre o “vai um”). Vimos no item anterior que os resultados das contas de Carlinhos são sempre múltiplos de $1_{[3]}$. Ao somarmos $1_{[3]}$ e $9_{[3]}$ obtemos $1_{[3]} + 9_{[3]} = 1110$, cujos algarismos da dezena e centena são iguais. Ao somarmos múltiplos de $1_{[3]}$ até $8_{[3]}$ percebemos que não há alteração na igualdade dos algarismos da dezena e centena, portanto, esses algarismos continuam iguais até $1110 + 8_{[3]} = 1998$. Mas agora, ao somar $1_{[3]}$, obtemos exatamente $1_{[3]} + 1998 = 2109$, que possui algarismos de dezena e centena distintos. Continuando, notamos que ao adicionar a $1_{[3]}$, a esse número obtemos $2109 + 111 = 2220$, que volta a ter os mesmos números da dezena e centena, e qualquer soma de múltiplos de $1_{[3]}$ até $7_{[3]}$ não vai mudar essa situação. O maior número que Carlinhos pode obter é $7_{[3]} + 8_{[3]} + 9_{[3]} = 7 \cdot 1_{[3]} + 8 \cdot 1_{[3]} + 9 \cdot 1_{[3]} = (7 + 8 + 9) \cdot 1_{[3]} = 24 \cdot 1_{[3]} = 2664$. Portanto, 2109 é o único número que Carlinhos obtém com algarismos distintos na dezena e centena.

•

3.2 Propriedades dos Números Palíndromos

Conforme Ochoviet (1995) o número 1221 é um palíndromo de quatro algarismos no sistema decimal, é divisível por 11 pela Proposição 3.1, ou seja, $1221 = 11 \cdot 111$, assim, uma primeira curiosidade de um número palíndromo n é:

Proposição 3.1 (OCHOVIET, 1995). *Qualquer número n palíndromo que seja formado por uma quantidade par de algarismos é divisível por 11.*

Prova: Seja n o número palíndromo com $x = 2k$ algarismos, ou seja, n é da forma

$$n = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 .$$

Utilizando o critério de divisibilidade por 11, Lema 2.2, devemos fazer a diferença entre S_i , a soma de elementos da posição ímpar, e S_p , a soma de elementos da posição par. Vamos tomar dois casos, k par ou k ímpar.

- Considerando que k seja par, então a soma dos termos de índice ímpar é

$$S_i = \{(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-3} + a_{k-1}) + (a_k + \dots + a_4 + a_2)\}$$

e a soma dos termos de índice par é

$$S_p = \{(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-2} + a_k) + (a_{k-1} + a_{k-3} + \dots + a_3 + a_1)\}$$

fazendo a diferença, temos

$$\begin{aligned}
S_i - S_p &= \{(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-3} + a_{k-1}) + (a_k + \dots + a_4 + a_2)\} \\
&\quad - \{(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-2} + a_k) + (a_{k-1} + a_{k-3} + \dots + a_3 + a_1)\} \\
&= (a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2k}) \\
&\quad - (a_{2k} + \dots + a_4 + a_2) + (a_{2k-1} + a_3 + a_1) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Considerando que k seja ímpar, então a soma dos termos de índice ímpar é

$$S_i = \{(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-3} + a_{k-1}) + (a_k + \dots + a_4 + a_2)\}$$

e a soma dos termos de índice par é

$$S_p = \{(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-2} + a_k) + (a_{k-1} + a_{k-3} + \dots + a_3 + a_1)\}$$

fazendo a diferença, temos

$$\begin{aligned}
S_i - S_p &= \{(a_1 + a_3 + \dots + a_{k-3} + a_{k-1}) + (a_k + \dots + a_4 + a_2)\} \\
&\quad - \{(a_2 + a_4 + \dots + a_{k-2} + a_k) + (a_{k-1} + a_{k-3} + \dots + a_3 + a_1)\} \\
&= (a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-2} + a_{2k}) + (a_{2k+1} + \dots + a_4 + a_2) \\
&\quad - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2k+1}) + (a_{2k} + a_{2k-2} + \dots + a_3 + a_1) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k-2} + a_{2k+1} + a_{2k}) \\
&\quad - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k-2} + a_{2k+1} + a_{2k}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, de qualquer modo, a diferença das somas de algarismos de ordens pares e ímpares é igual a zero, que é um número múltiplo por 11, logo, temos que para todo número palíndromo formado por uma quantidade par de algarismos é divisível por 11. Logo, a divisão euclidiana de n por 11 tem como resultado é um número inteiro. ■

Por fim, segue imediatamente da Proposição 3.1 o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Todo número monodígito com a quantidade par de algarismos é múltiplo de 11.*

Outra consequência da Proposição 3.1 é que existe apenas um número primo palíndromo formado por uma quantidade par de algarismos, ou seja, o número 11.

Exemplo 3.1. O número 2002 é palíndromo formado por uma quantidade par de algarismos. Veja que:

$$S_i - S_p = (a_0 + a_2) - (a_1 + a_3) = (2 + 0) - (0 + 2) = 2 - 2 = 0 .$$

Como, 0 é múltiplo de 11, então 2002 também é divisível por 11, pela Proposição 3.1.

Um conceito fundamental para resolução do próximo problema, para que um número seja considerado primo palíndromo, aqueles números que obedecem as propriedades dos números primos e dos números palíndromos ao mesmo tempo, ou seja, possuem apenas dois divisores, o próprio número e o número 1.

Problema 3.4 (OBMEP 2008, Banco de Questões). *O ano de 2002 é palíndromo.*

- Qual será o próximo ano palíndromo depois de 2002?
- Antes de 2002, o último ano palíndromo, 1991, era ímpar. Quando será o próximo ano palíndromo ímpar?
- O último ano palíndromo primo ocorreu há mais de 1000 anos, em 929. Quando ocorrerá o próximo ano palíndromo primo?

Resolução:

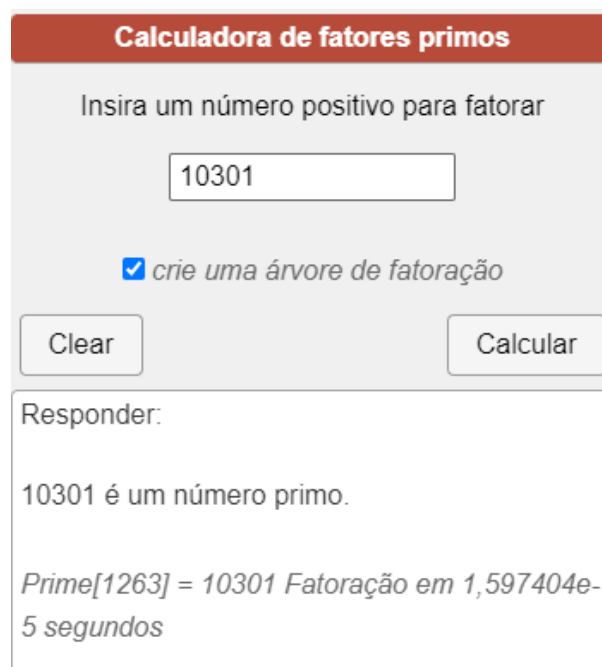
- O próximo ano palíndromo depois de 2002 ocorrerá em 2112. Pois a leitura do ano 2112 de trás para frente é o mesmo, assim, confirmando que é um número palíndromo. Sendo que não há nenhum outro ano palíndromo entre 2002 e 2112, tornando-o no próximo ano palíndromo.
- Sendo que o número deve ser ímpar, então, se o ano começar com o número 2 que é um número par em que para ser palíndromo deverá terminar com o número 2 assim tornando em um número par. Logo, o próximo ano ímpar palíndromo será em 3003.
- O número em questão não pode ter 4 algarismos, pois todo número de 4 algarismos do tipo $abba$ é divisível por 11, pois a soma de ordem ímpar é $a + b$ e a soma de ordem par é $b + a$, logo $a + b = b + a$. Assim, o primeiro número com 5 algarismos é 10001, mas $10001 = 73 \cdot 137$, que não é primo. Um próximo candidato é 10201, mas $10201 = 101 \cdot 101$, que não é primo. Por fim o número 10301 será um número primo, e 10301^1 será o próximo ano primo palíndromo.

•

¹ O que pode ser consultado na lista de números primos em <https://oeis.org/A000040>.

Por fim, utilizando uma calculadora online que pode ser encontrada em <https://www.calculatorsoup.com/calculators/math/prime-factors.php>, assim na Figura 1 verificamos a fatoração do número 10301, que resulta em um número primo.

Figura 1 – Fatorando 10301



Calculadora de fatores primos

Insira um número positivo para fatorar

crie uma árvore de fatoração

Clear Calcular

Responder:

10301 é um número primo.

Prime[1263] = 10301 Fatoração em 1,597404e-5 segundos

Fonte: <https://www.calculatorsoup.com/calculators/math/prime-factors.php>

4 ALGORITMO DOS NÚMEROS PALÍNDROMOS

Denotaremos por n um número inteiro qualquer e n' o seu reverso, assim, ao utilizarmos o processo básico de adicionarmos n com seu reverso. Segundo Trigg (1972, p.184) dado um número n não palíndromo e n' seu reverso, façamos $s_1 = n + n'$, então temos duas possibilidades: (1) s_1 é palíndromo; (2) s_1 não é palíndromo. Sendo s_1 não palíndromo podemos repetir o processo obtendo $s_2 = s_1 + s'_1, \dots$, ou seja, $n + n' = s_1, s_1 + s'_1 = s_2, \dots, s_{k-1} + s'_{k-1} = s_k$. Ainda segundo Trigg foi conjecturado que existe um inteiro k , tal que s_k é um palíndromo. Seguindo o algoritmo descrito por Trigg, veremos que formar um número palíndromo usando a operação do número pelo seu reverso é relativamente simples para alguns n . Ao adicionarmos um número qualquer com seu reverso, geraremos um número que pode ou não ser palíndromo, assim, pode acontecer com uma única iteração ou realizar diversas iterações.

De maneira formal considere o algoritmo a seguir para formar números palíndromos.

Algoritmo 4.1. *Formar um número Palíndromo $P(n)$*

1. *Considere um número n qualquer não palíndromo;*
2. *Escreva o reverso de n , ou seja, n' ;*
3. *Adicione o número n com seu reverso n' , ou seja, $s_1 = n + n'$;*
4. *Verifique se o resultado s_1 obtido é um número palíndromo;*
5. *Se s_1 é palíndromo, então $P(n) = s_1$. Caso s_1 não seja um número palíndromo, faça $s_1 = n$ e volte ao passo 1.*

Exemplo 4.1. Considere o número 238, aplicando o processo descrito em 4.1. Temos que $n = 238$ e seu reverso $n' = 832$, então,

$$s_1 = n + n' ,$$

assim,

$$s_1 = 238 + 832 = 1070 ,$$

sendo que $s_1 = 1070$ não é palíndromo, daí ,

$$s_2 = s_1 + s'_1 ,$$

logo,

$$s_2 = 1070 + 0701 = 1771 .$$

Logo, verificamos que o número 238 com 2 iterações utilizando o Algoritmo 4.1 chegamos em 1771 que é palíndromo.

De acordo com Nogueira (2014) a aplicação do processo de adicionar um número qualquer com seu reverso para todos os números inferiores a 10^5 mostra a porcentagem daqueles que originam um número palíndromo. Assim, as seguintes porcentagens, em intervalos considerados.

10	$\leq x \leq$	99	\rightarrow	100%
100	$\leq x \leq$	999	\rightarrow	98,6%
1000	$\leq x \leq$	9999	\rightarrow	97,1%
10000	$\leq x \leq$	99999	\rightarrow	93,5%

4.1 Números n com 2 algarismos

Nesta seção vamos estudar os números palíndromos obtidos pelo Algoritmo 4.1, em que n é formado por 2 algarismos, ou seja, $n = ab$, com a, b em $D = \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$. Devemos ter $a \neq b$, isto é ab não é monodígito, assim $1 \leq a + b \leq 17$. Temos os seguintes resultados para identificar quantas iterações seriam necessárias.

Proposição 4.1. *Se ab é um número tal que $a + b = 1$, então $P(n)$ é palíndromo com 1 iteração.*

Prova: Sejam $n = ab = 10a + b$ e $n' = ba = 10b + a$, assim,

$$\begin{aligned}
 s_1 &= n + n' \\
 &= ab + ba \\
 &= 10a + b + 10b + a \\
 &= 11a + 11b \\
 &= 11(a + b),
 \end{aligned}$$

como $a + b = 1$, então,

$$s_1 = 11 \cdot (a + b) = 11 \cdot 1 = 11.$$

Portanto, com 1 iteração chegamos ao número 11 que é palíndromo e monodígito. ■

Proposição 4.2. *Se ab é um número tal que $a + b = 3$, então $P(n)$ é palíndromo com 1 iteração.*

Prova: Temos, $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 3$, então,

$$s_1 = 11 \cdot (a + b) = 11 \cdot 3 = 33.$$

Portanto, com 1 iteração chegamos ao número 33 que é palíndromo e monodígito. ■

Na Proposição 4.2 podemos substituir o 3 por 2, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 e teremos o mesmo argumento.

Proposição 4.3. *Se ab é um número tal que $a + b = 10$, então $P(n)$ é palíndromo com 2 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 10$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= 11(a + b) \\ &= 11(10) \\ &= 110, \end{aligned}$$

agora,

$$\begin{aligned} s_2 &= 110 + 011 \\ &= 121. \end{aligned}$$

Portanto, com 2 iterações chegamos ao número 121 que é palíndromo e quadrado perfeito. ■

Proposição 4.4. *Se ab é um número tal que $a + b = 11$, então $P(n)$ é palíndromo com 1 iteração.*

Prova: Temos, $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 11$, então,

$$s_1 = 11 \cdot (a + b) = 11 \cdot 11 = 121.$$

Portanto, com 1 iteração chegamos ao número 121 que é palíndromo e quadrado perfeito. ■

Proposição 4.5. *Se $n = ab$ é um número tal que $a + b = 14$, então $P(n)$ é palíndromo com 3 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 14$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= 11(a + b) \\ &= 11(14) = 154, \end{aligned}$$

daí,

$$s_2 = 154 + 541 = 605,$$

assim,

$$s_3 = 605 + 506 = 1111.$$

Portanto, com 3 iterações chegamos ao número 1111 que é palíndromo e monodígito. ■

Proposição 4.6. *Se ab é um número tal que $a + b = 15$, então $P(n)$ é palíndromo com 4 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 15$, então

$$\begin{aligned} s_1 &= 11(a + b) \\ &= 11(15) = 165 \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 165 + 561 = 726 ,$$

daí,

$$s_3 = 726 + 627 = 1353 ,$$

logo,

$$s_4 = 1353 + 3531 = 4884 .$$

Portanto, com 4 iterações chegamos ao número 4884 que é palíndromo. ■

Proposição 4.7. *Se ab é um número tal que $a + b = 16$, então $P(n)$ é palíndromo com 6 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 16$, então

$$\begin{aligned} s_1 &= 11(a + b) \\ &= 11(16) = 176 , \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 176 + 671 = 847 ,$$

assim,

$$s_3 = 847 + 748 = 1595 ,$$

também,

$$s_4 = 1595 + 5951 = 7546 ,$$

daí,

$$s_5 = 7546 + 6457 = 14003 ,$$

pois,

$$s_6 = 14003 + 30041 = 44044 .$$

Portanto, com 6 iterações chegamos ao número 44044 que é palíndromo. ■

Proposição 4.8. *Se ab é um número tal que $a + b = 17$, então $P(n)$ é palíndromo com 24 iterações.*

Prova: Temos, $s_1 = 11(a + b)$, como $a + b = 17$, então

$$\begin{aligned} s_1 &= 11(a + b) \\ &= 11(17) = 187, \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 187 + 781 = 968,$$

daí,

$$s_3 = 968 + 869 = 1837,$$

pois,

$$s_4 = 1837 + 7381 = 9218,$$

assim,

$$s_5 = 9218 + 8129 = 17347,$$

como,

$$s_6 = 17347 + 73471 = 91718,$$

além disso,

$$s_7 = 91718 + 81719 = 173437,$$

depois,

$$s_8 = 173437 + 734371 = 907808,$$

então,

$$s_9 = 907808 + 808709 = 1716517,$$

assim,

$$s_{10} = 1716517 + 7516171 = 8872688,$$

agora,

$$s_{11} = 8872688 + 8862788 = 17735476,$$

em seguida,

$$s_{12} = 17735476 + 67453771 = 85189247 ,$$

bem como,

$$s_{13} = 85189247 + 74298158 = 159487405 ,$$

ainda,

$$s_{14} = 159487405 + 504784951 = 664272356 ,$$

além disso,

$$s_{15} = 664272356 + 653272466 = 1317544822 ,$$

agora,

$$s_{16} = 1317544822 + 2284457131 = 3602001953 ,$$

daí,

$$s_{17} = 3602001953 + 3591002063 = 7193004016 ,$$

assim,

$$s_{18} = 7193004016 + 6104003917 = 13297007933 ,$$

ainda,

$$s_{19} = 13297007933 + 33970079231 = 4726707164 ,$$

em seguida,

$$s_{20} = 4726707164 + 4617076274 = 93445163438 ,$$

então,

$$s_{21} = 93445163438 + 83436154439 = 176881317877 ,$$

como,

$$s_{22} = 176881317877 + 778713188671 = 955594506548 ,$$

bem como,

$$s_{23} = 955594506548 + 845605495559 = 1801200002107 ,$$

logo,

$$s_{24} = 1801200002107 + 7012000021081 = 8813200023188$$

Portanto, com 24 iterações chegamos ao número 8813200023188 que é palíndromo. ■

Na tabela 3 indicamos a quantidade de iterações quando a soma de $a + b$ forem 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12 e 13 seguimos a seguinte tabela para verificarmos quantas iterações serão necessárias para obter um número palíndromo.

Tabela 3 – Iterações com 2 algarismos

$a + b$	Iterações
2	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
12	2
13	2

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

4.2 Números n com 3 algarismos

Nesta seção vamos estudar os números palíndromos obtidos pelo algoritmo 4.1, em que n é formado por 3 algarismos, ou seja, $n = abc$, com a, b e c em $D = \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$. Devemos ter que abc não é monodígito, com isso teremos algarismos distintos. Assim $1 \leq a + b + c \leq 26$. Temos os seguintes resultados para identificar quantas iterações seriam necessárias.

Proposição 4.9. *Se abc é um número tal que $a + c = 1$ e $b = 0$, então $P(n)$ é um palíndromo com 1 iteração.*

Prova: Sejam $n = 10^2a + 10b + c$ e $n' = 10^2c + 10b + a$, assim,

$$\begin{aligned} s_1 &= 10^2a + 10b + c + 10^2c + 10b + a \\ &= 10^2(a + c) + 2b \cdot 10 + (a + c) \\ &= (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10, \end{aligned}$$

como $a + c = 1$ e $b = 0$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(1) + 2 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 1 + 0 = 101. \end{aligned}$$

Portanto, com 1 iteração chegamos a 101 que é palíndromo e monodígito. ■

Na Proposição 4.9 podemos substituir o 1 por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 e teremos o mesmo resultado.

Proposição 4.10. *Se abc é um número tal que $a + c = 10$ e $b = 0$, então $P(n)$ é um palíndromo com 2 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 10$ e $b = 0$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(10) + 2 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 10 + 0 \\ &= 1010 , \end{aligned}$$

assim,

$$s_2 = 1010 + 0101 = 1111 .$$

Portanto, com 2 iterações chegamos a 1111 que é palíndromo e monodígito. ■

Proposição 4.11. *Se abc é um número tal que $a + c = 11$ e $b = 0$, então $P(n)$ é um palíndromo com 1 iteração.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 11$ e $b = 0$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(11) + 2 \cdot 0 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 11 + 0 = 1111 . \end{aligned}$$

Portanto, com 1 iteração chegamos a 1111 que é palíndromo e monodígito. ■

Proposição 4.12. *Se abc é um número tal que $a + c = 13$ e $b = 3$, então $P(n)$ é um palíndromo com 3 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 13$ e $b = 3$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(13) + 2 \cdot 10 \cdot 3 \\ &= 101 \cdot 13 + 60 = 1373 , \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 1373 + 3731 = 5104 ,$$

pois,

$$s_3 = 5104 + 4015 = 9119 .$$

Portanto, com 3 iterações chegamos ao número 9119 que é palíndromo. ■

Proposição 4.13. *Se abc é um número tal que $a + c = 15$ e $b = 3$, então $P(n)$ é um palíndromo com 6 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 15$ e $b = 3$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(15) + 2 \cdot 3 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 15 + 60 = 1575 , \end{aligned}$$

daí,

$$s_2 = 1575 + 5751 = 7326 ,$$

ainda,

$$s_3 = 7326 + 6237 = 13563 ,$$

em seguida,

$$s_4 = 13563 + 36531 = 50094 ,$$

então,

$$s_5 = 50094 + 49005 = 99099 .$$

Portanto, com 5 iterações chegamos ao número 99099 que é palíndromo. ■

Proposição 4.14. *Se abc é um número tal que $a + c = 16$ e $b = 4$, então $P(n)$ é um palíndromo com 4 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 16$ e $b = 4$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(16) + 2 \cdot 4 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 16 + 80 = 1696 , \end{aligned}$$

como,

$$s_2 = 1696 + 6961 = 8657 ,$$

então,

$$s_3 = 8657 + 7568 = 16225 ,$$

enfim,

$$s_4 = 16225 + 52261 = 68486 .$$

Portanto, com 4 iterações chegamos ao número 68486 que é palíndromo. ■

Proposição 4.15. *Se abc é um número tal que $a + c = 16$ e $b = 9$, então $P(n)$ é um palíndromo com 6 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 16$ e $b = 9$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(16) + 2 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 16 + 180 = 1796 , \end{aligned}$$

assim,

$$s_2 = 1796 + 6971 = 8767 ,$$

pois,

$$s_3 = 8767 + 7678 = 16445 ,$$

ainda,

$$s_4 = 16445 + 54461 = 70906 ,$$

como,

$$s_5 = 70906 + 60907 = 131813 ,$$

enfim,

$$s_6 = 131813 + 318131 = 449944 .$$

Portanto, com 6 iterações chegamos ao número 449944 que é palíndromo. ■

Proposição 4.16. *Se abc é um número tal que $a + c = 17$ e $b = 9$, então $P(998) = P(899)$ é um palíndromo com 17 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^2 + 1)(a + c) + 2b \cdot 10$, como $a + c = 17$ e $b = 9$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^2 + 1)(17) + 2 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 101 \cdot 167 + 180 = 1897 , \end{aligned}$$

ainda,

$$s_2 = 1897 + 7981 = 9878 ,$$

pois,

$$s_3 = 9878 + 8789 = 18667 ,$$

além disso,

$$s_4 = 18667 + 76681 = 95348 ,$$

bem como,

$$s_5 = 95348 + 84359 = 179707 ,$$

daí,

$$s_6 = 179707 + 707971 = 887678 ,$$

agora,

$$s_7 = 887678 + 876788 = 1764466 ,$$

assim,

$$s_8 = 1764466 + 6644671 = 8409137 ,$$

em seguida,

$$s_9 = 8409137 + 7319048 = 15728185 ,$$

então,

$$s_{10} = 15728185 + 58182751 = 73910936 ,$$

como,

$$s_{11} = 73910936 + 63901937 = 137812873 ,$$

depois,

$$s_{12} = 137812873 + 378218731 = 516031604 ,$$

daí,

$$s_{13} = 516031604 + 406130615 = 922162219 ,$$

agora,

$$s_{14} = 922162219 + 912261229 = 1834423448 ,$$

além disso,

$$s_{15} = 1834423448 + 8443244381 = 10277667829 ,$$

assim,

$$s_{16} = 10277667829 + 92876677201 = 103154345030 ,$$

logo,

$$s_{17} = 103154345030 + 030543451301 = 133697796331 .$$

Portanto, com 17 iterações chegamos ao número 133697796331 que é palíndromo. ■

Na tabela 4 indicamos a quantidade de iterações de algumas somas $a + b + c$, assim, denotamos números que não são palíndromos com alguns algarismos para formar números $n = abc$, a partir disso, seguimos a seguinte tabela para verificarmos quantas iterações serão necessárias para obter um número palíndromo.

Tabela 4 – Iterações com 3 algarismos

a	b	c	Iterações
1	3	2	1
4	2	1	1
5	1	2	1
3	2	7	2
7	2	5	2
8	3	6	4
9	4	8	14
8	8	6	8

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

4.3 Números n com 4 algarismos

Nesta seção vamos estudar os números palíndromos obtidos pelo algoritmo 4.1, em que n é formado por 4 algarismos, ou seja, $n = abcd$, com a, b, c e d em $D = \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$. Devemos ter que $abcd$ não é monodígito, logo teremos algarismos distintos. Assim $1 \leq a + b + c + d \leq 35$. Temos os seguintes resultados para identificar quantas iterações seriam necessárias.

Proposição 4.17. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 10$ e $b + c = 11$, então $P(n)$ é um palíndromo com 2 iterações.*

Prova: Sejam $n = 10^3a + 10^2b + 10c + d$ e $n' = 10^3d + 10^2c + 10b + a$, assim,

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 10^3a + 10^2b + 10c + d + 10^3d + 10^2c + 10b + a \\
 &= 10^3(a + d) + 10^2(b + c) + 10(b + c) + (a + d) \\
 &= (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c),
 \end{aligned}$$

como $a + d = 10$ e $b + c = 11$, então,

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (10^3 + 1)(10) + (10^2 + 10)(11) \\
 &= 1001 \cdot 10 + 110 \cdot 11 = 11220,
 \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 11220 + 02211 = 13431.$$

Portanto, com 2 iterações chegamos ao número 13431 que é palíndromo. ■

Proposição 4.18. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 11$ e $b + c = 11$, então $P(n)$ é um palíndromo com 1 iteração.*

Prova: Temos $s_1 = (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c)$, como $a + d = 11$ e $b + c = 11$, então,

$$s_1 = (10^3 + 1)(11) + (10^2 + 10)(11) = 1001 \cdot 11 + 110 \cdot 11 = 12221.$$

Portanto, com 1 iteração chegamos ao número 12221 que é palíndromo. ■

Proposição 4.19. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 10$ e $b + c = 15$, então $P(n)$ é um palíndromo com 6 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c)$, como $a + d = 10$ e $b + c = 15$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^3 + 1)(10) + (10^2 + 10)(15) \\ &= 1001 \cdot 10 + 110 \cdot 15 = 11660, \end{aligned}$$

assim,

$$s_2 = 11660 + 06611 = 18271,$$

depois,

$$s_3 = 18721 + 17281 = 35552,$$

ainda,

$$s_4 = 35552 + 25553 = 61105,$$

agora,

$$s_5 = 61105 + 50116 = 111221,$$

enfim,

$$s_6 = 111221 + 122111 = 233332.$$

Portanto, com 6 iterações chegamos ao número 233332 que é palíndromo. ■

Proposição 4.20. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 12$ e $b + c = 14$, então $P(n)$ é um palíndromo com 5 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c)$, como $a + d = 12$ e $b + c = 14$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^3 + 1)(12) + (10^2 + 10)(14) \\ &= 1001 \cdot 12 + 110 \cdot 14 = 13552, \end{aligned}$$

em seguida,

$$s_2 = 13552 + 25531 = 39083,$$

além disso,

$$s_3 = 39083 + 38093 = 77176 ,$$

como,

$$s_4 = 77176 + 67177 = 144353 ,$$

então,

$$s_5 = 144353 + 353441 = 497794 .$$

Portanto, com 5 iterações chegamos ao número 497794 que é palíndromo. ■

Proposição 4.21. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 13$ e $b + c = 15$, então $P(n)$ é um palíndromo com 3 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c)$, como $a + d = 13$ e $b + c = 15$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^3 + 1)(13) + (10^2 + 10)(15) \\ &= 1001 \cdot 13 + 110 \cdot 15 = 14663 , \end{aligned}$$

ainda,

$$s_2 = 14663 + 36641 = 51304 ,$$

logo,

$$s_3 = 51304 + 40315 = 91619 .$$

Portanto, com 3 iterações chegamos ao número 91619 que é palíndromo. ■

Proposição 4.22. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 10$ e $b + c = 18$, então $P(n)$ é um palíndromo com 7 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c)$, como $a + d = 10$ e $b + c = 18$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^3 + 1)(10) + (10^2 + 10)(18) \\ &= 1001 \cdot 10 + 110 \cdot 18 = 11990 , \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 11990 + 09911 = 21901 ,$$

ainda,

$$s_3 = 21901 + 10912 = 32813 ,$$

bem como,

$$s_4 = 32813 + 31823 = 64636 ,$$

depois,

$$s_5 = 64636 + 63646 = 128282 ,$$

assim,

$$s_6 = 128282 + 282821 = 411103 ,$$

em seguida,

$$s_7 = 411103 + 301114 = 712217 .$$

Portanto, com 7 iterações chegamos ao número 712217 que é palíndromo. ■

Proposição 4.23. *Se $abcd$ é um número tal que $a + d = 15$ e $b + c = 14$, então $P(n)$ é um palíndromo com 4 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^3 + 1)(a + d) + (10^2 + 10)(b + c)$, como $a + d = 15$ e $b + c = 14$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^3 + 1)(15) + (10^2 + 10)(14) \\ &= 1001 \cdot 15 + 110 \cdot 14 = 16555 , \end{aligned}$$

daí,

$$s_2 = 16555 + 55561 = 72116 ,$$

ainda,

$$s_3 = 72116 + 61127 = 133243 ,$$

pois,

$$s_4 = 133243 + 342331 = 475574 .$$

Portanto, com 4 iterações chegamos ao número 475574 que é palíndromo. ■

Na tabela 5 indicamos a quantidade de iterações da soma $a + b + c + d$, assim, denotamos números que não são palíndromos com alguns algarismos para formar números $n = abcd$, a partir disso, seguimos a seguinte tabela para verificarmos quantas iterações serão necessárias para obter um número palíndromo.

Tabela 5 – Iterações com 4 algarismos

a	b	c	d	Iterações
1	3	2	4	1
6	4	2	3	1
3	7	8	3	3
3	9	6	5	5
7	6	8	4	6
8	6	7	9	12
6	9	8	7	7
9	9	6	7	11
7	9	9	8	20

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

4.4 Números n com 5 algarismos

Nesta seção vamos estudar os números palíndromos obtidos pelo algoritmo 4.1, em que n é formado por 5 algarismos, ou seja, $n = abcde$, com a, b, c, d e e em $D = \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$. Devemos ter que $abcde$ não é monodígito, com isso teremos algarismos distintos. Assim $1 \leq a + b + c + d + e \leq 44$. Temos os seguintes resultados para identificar quantas iterações seriam necessárias.

Proposição 4.24. *Se $abcde$ é um número tal que $a + e = 11$, $b + d = 10$ e $c = 1$, então $P(n)$ é um palíndromo com 2 iterações.*

Prova: Sejam $n = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$ e $n' = 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a$, assim,

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a \\
 &= 10^4(a + e) + 10^3(b + d) + 2 \cdot 10^2c + 10(b + d) + (a + e) \\
 &= (10^4 + 1)(a + e) + (10^3 + 10)(b + d) + 2 \cdot 10^2c,
 \end{aligned}$$

como $a + e = 11$, $b + d = 10$ e $c = 1$, então,

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (10^4 + 1)(11) + (10^3 + 10)(10) + 2 \cdot 10^2 \cdot 1 \\
 &= 10001 \cdot 11 + 1010 \cdot 10 + 200 = 120311,
 \end{aligned}$$

logo,

$$s_2 = 120311 + 113021 = 233332.$$

Portanto, com 2 iterações chegamos ao número 233332 que é palíndromo. ■

Proposição 4.25. *Se $abcde$ é um número tal que $a + e = 12$, $b + d = 13$ e $c = 4$, então $P(n)$ é um palíndromo com 5 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^4 + 1)(a + e) + (10^3 + 10)(b + d) + 2 \cdot 10^2 c$, como $a + e = 12$, $b + d = 13$ e $c = 4$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^4 + 1)(12) + (10^3 + 10)(13) + 2 \cdot 10^2 \cdot 4 \\ &= 10001 \cdot 12 + 1010 \cdot 13 + 800 = 133942 , \end{aligned}$$

em seguida,

$$s_2 = 133942 + 249331 = 383273 ,$$

bem como,

$$s_3 = 383273 + 372383 = 755656 ,$$

assim,

$$s_4 = 755656 + 656557 = 1412213 ,$$

logo,

$$s_5 = 1412213 + 3122141 = 4534354 .$$

Portanto, com 5 iterações chegamos ao número 4534354 que é palíndromo. ■

Proposição 4.26. *Se $abcde$ é um número tal que $a + e = 13$, $b + d = 15$ e $c = 2$, então $P(n)$ é um palíndromo com 3 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^4 + 1)(a + e) + (10^3 + 10)(b + d) + 2 \cdot 10^2 c$, como $a + e = 13$, $b + d = 15$ e $c = 2$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^4 + 1)(13) + (10^3 + 10)(15) + 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \\ &= 10001 \cdot 13 + 1010 \cdot 15 + 400 = 145563 , \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 145563 + 365541 = 511104 ,$$

enfim,

$$s_3 = 511104 + 401115 = 912219 .$$

Portanto, com 3 iterações chegamos ao número 9122219 que é palíndromo. ■

Proposição 4.27. *Se $abcde$ é um número tal que $a + e = 14$, $b + d = 16$ e $c = 2$, então $P(n)$ é um palíndromo com 4 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^4 + 1)(a + e) + (10^3 + 10)(b + d) + 2 \cdot 10^2 c$, como $a + e = 14$, $b + d = 16$ e $c = 2$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^4 + 1)(14) + (10^3 + 10)(16) + 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \\ &= 10001 \cdot 14 + 1001 \cdot 16 + 400 = 156574 , \end{aligned}$$

como,

$$s_2 = 156574 + 475651 = 632225 ,$$

ainda,

$$s_3 = 632225 + 522236 = 1154461 ,$$

então,

$$s_4 = 1154461 + 1644511 = 2798972 .$$

Portanto, com 4 iterações chegamos ao número 2798972 que é palíndromo. ■

Proposição 4.28. *Se $abcde$ é um número tal que $a + e = 18$, $b + d = 15$ e $c = 3$, então $P(n)$ é um palíndromo com 6 iterações.*

Prova: Temos $s_1 = (10^4 + 1)(a + e) + (10^3 + 10)(b + d) + 2 \cdot 10^2 c$, como $a + e = 18$, $b + d = 15$ e $c = 3$, então,

$$\begin{aligned} s_1 &= (10^4 + 1)(18) + (10^3 + 10)(15) + 2 \cdot 10^2 \cdot 3 \\ &= 10001 \cdot 18 + 1010 \cdot 15 + 600 = 195768 , \end{aligned}$$

agora,

$$s_2 = 195768 + 867591 = 1063359 ,$$

depois,

$$s_3 = 1063359 + 9533601 = 10596960 ,$$

além disso,

$$s_4 = 1063359 + 9533601 = 17566461 ,$$

como,

$$s_5 = 17566461 + 16466571 = 34033032$$

então,

$$s_6 = 34033032 + 23033043 = 37066073 .$$

Portanto, com 6 iterações chegamos ao número 37066073 que é palíndromo. ■

Na tabela 6 indicamos a quantidade de iterações de algumas somas $a + b + c + d + e$, assim, denotamos números que não são palíndromos com alguns algarismos para formar números $n = abcde$, a partir disso, seguimos a seguinte tabela para verificarmos quantas iterações serão necessárias para obter um número palíndromo.

Tabela 6 – Iterações com 5 algarismos

a	b	c	d	e	Iterações
4	6	0	2	3	1
6	1	3	2	4	2
5	2	4	3	8	3
7	9	6	4	1	7
2	8	6	4	5	5
9	7	8	7	5	10
9	9	9	8	9	8
8	9	7	6	7	4
6	4	8	3	9	29

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

4.5 Repunidades ao quadrado

Outra forma de obter números palíndromos é fazer o produto de uma repunidade ao quadrado. Seja $R_x = \underbrace{11 \dots 11}_{x \text{ vezes}}$ um número repunidade composto apenas com algarismos de número “1”, sendo que x é a quantidade de vezes em que se repete o algarismo, quando elevamos o mesmo ao quadrado obtemos como resultado um número palíndromo, sendo que o termo central do resultado obtido é a quantidade de vezes em que se repete o número 1.

De acordo com Costa e Santos (2023) representa um número repunidade com a fórmula de Binet,

$$R_x = \frac{10^x - 1}{9}.$$

Logo, seguimos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} R_x \cdot R_x &= \left(\frac{10^x - 1}{9} \right) \cdot \left(\frac{10^x - 1}{9} \right) \\ &= \frac{10^x \cdot 10^x - 2 \cdot 10^x + 1}{9^2} \\ &= \frac{10^{2x} - 2 \cdot 10^x + 1}{9^2}. \end{aligned}$$

Utilizando a equação anterior, ao considerar que $x \leq 9$, obtemos como resultado do produto um número palíndromo. Considere a seguinte tabela com os respectivos resultados.

Tabela 7 – Repunidade ao quadrado

x	Multiplicação	Produto
2	$R_2 \cdot R_2$	121
3	$R_3 \cdot R_3$	12321
4	$R_4 \cdot R_4$	1234321
5	$R_5 \cdot R_5$	123454321
6	$R_6 \cdot R_6$	12345654321
7	$R_7 \cdot R_7$	1234567654321
8	$R_8 \cdot R_8$	123456787654321
9	$R_9 \cdot R_9$	12345678987654321

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Para $x = 10$, temos

$$R_{10} \cdot R_{10} = 1234567900987654321.$$

Veja que $(R_{10})^2$ não é um número palíndromo. Segundo Toumasis (1994) “Se $x > 9$, o produto da multiplicação não será um palíndromo, pois o número de unidades de algumas colunas será maior que 9 e haveria a necessidade de um número ser transportado para próxima coluna”.

5 BNCC E CONTEXTO PARA O ENSINO

Neste capítulo discutimos e analisamos a importância das tecnologias e algoritmos para o ensino na matemática tendo como referência a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Destacamos o algoritmo de Trigg, fundamental para construção de uma proposta de atividade que envolva o ensino dos números palíndromos em sala de aula, sendo envolvido o uso de recursos digitais, bem como uma oportunidade de aplicação do entendimento acerca das operações básicas. Para fundamentação do capítulo utilizamos a BNCC (2018) e PCN (1998).

5.1 BNCC, Tecnologias e Algoritmos

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) é um documento brasileiro que define o conjunto de aprendizagens que todos os estudantes devem desenvolver durante as etapas e modalidades da Educação Básica. Assim, a sua efetiva implementação depende intencionalmente da colaboração entre governos, escolas, professores e a comunidade em geral, enfrentando desafios e buscando continuamente melhorias para que possam assegurar que todos os estudantes brasileiros tenham acesso a uma educação que os prepare para o presente e o futuro.

Aquele documento também apregoa a integração das tecnologias digitais na educação, sendo enfatizado a necessidade de preparar os estudantes para um mundo cada vez mais digital. Assim, a BNCC destaca a importância das tecnologias digitais como ferramentas essenciais no processo de ensino-aprendizagem. A partir disso, em uma das suas competências gerais para educação básica destaca:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018, p. 9).

O mundo em que vivemos apresenta um processo acelerado de desenvolvimento, em que a tecnologia está presente diretamente ou indiretamente em atividades comuns em nosso cotidiano. A escola faz parte deste mundo e para que possam cumprir sua função social em contribuir para uma formação humana que possam exercer plenamente sua cidadania, participando integralmente dos processos de transformação e construção da realidade, deve estar aberta e incorporar esses novos hábitos, comportamentos, percepções e demandas. Assim, já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), destacava sobre as tecnologias de comunicação em sentido do ensino,

As tecnologias da comunicação e informação podem ser utilizadas para realizar formas artísticas; exercitar habilidades matemáticas; apreciar e conhecer textos produzidos por outros; imaginar, sentir, observar, perceber e se comunicar; pesquisar informações curiosas etc., atendendo a objetivos de aprendizagem ou puramente por prazer, diversão e entretenimento. Por isso, na medida do possível, é importante que os alunos possam fazer uso dos computadores tendo propósitos próprios, fora do horário de aula ou quando terminarem a proposta feita pelo professor. (BRASIL, 1998, p. 153).

Ao entendermos que a escola é um local de construção do conhecimento e de socialização do saber, como um ambiente de discussão e trocas de experiências, é de suma importância que a utilização dos recursos tecnológicos seja discutida e elaborada juntamente com a comunidade escolar. Assim, é descrito em PCN (BRASIL,1998) que a incorporação dos computadores, uma ferramenta importante para o ensino nas escolas:

- possibilita a problematização de situações por meio de programas que permitem observar regularidades, criar soluções, estabelecer relações, pensar a partir de hipóteses, entre outras funções;
- pode ser utilizado como fonte de informações. Existem inúmeros softwares que oferecem informações sobre assuntos em todas as áreas de conhecimento. Além disso, é possível utilizar a Internet como uma grande biblioteca sobre todos os assuntos. Algumas pessoas descrevem a Internet como um tipo de repositório universal do conhecimento;
- oferece recursos rápidos e eficientes para realizar cálculos complexos, transformar dados, consultar, armazenar e transcrever informações, o que permite dedicar mais tempo a atividades de interpretação e elaboração de conclusões. (BRASIL, 1998 p. 147).

A integração das tecnologias no ensino proporciona um ambiente mais dinâmico, acessível e eficaz, sendo assim, a utilização de certas ferramentas tecnológicas não estão apenas para melhorar a participação e motivação dos estudantes, mas sim uma melhor preparação para os novos avanços digitais.

Na matemática, entendemos que os algoritmos desempenham papéis fundamentais em resoluções de problemas ou até mesmo em uma formulação de soluções estruturadas. Então, os algoritmos é definido em um conjunto de processos a serem seguidos em execuções de atividades específicas. Os procedimentos são conjuntos de ações ordenadas e orientadas sendo visadas em atingir determinados objetivos propostos.

A BNCC (2018) descreve que os algoritmos está:

Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BRASIL, 2018, p. 271).

A unidade temática de **Números** na BNCC tem a finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica no conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos relacionados a quantidades. Assim, BNCC (2018) envolve-se nos diferentes significados das operações, sendo que argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a qualidade dos resultados encontrados.

No Ensino fundamental em áreas de cálculos matemáticos, dizemos que é necessário acrescentar, à realização dos algoritmos em operações, sendo assim habilidades de efetuar cálculos mentais, fazer estimativas, usar calculadora e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo. Nesta etapa da Educação Básica, os estudantes são introduzidos algoritmos básicos, em operações como multiplicação, divisão, subtração e adição. No Quadro 1 apresenta sobre a utilização de procedimentos relacionados a temática de números.

Quadro 1 – Unidade Temática de Números, da Matemática, no Ensino Fundamental Anos Finais da BNCC.

Unidades Temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	<p>(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.</p> <p>(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.</p>
	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	<p>(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.</p> <p>(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.</p>

Fonte: BRASIL, 2018

A medida em que os estudantes no ensino fundamental avançam para o ensino médio, começam a lidar com algoritmos e procedimentos mais complexos. Sendo incluso o uso de fórmulas para resolver equações quadráticas, métodos de fatoração, e algoritmos para a simplificação de expressões algébricas. Além disso, conceitos mais avançados, como algoritmos de ordenação e busca, tais que podem ser introduzidos na disciplina de matemática. De acordo com a BNCC valorização dos algoritmos possibilitam ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolverem pensamentos computacionais, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. Então, destaca-se na BNCC que:

Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529).

No Quadro 2 destacamos as competências específicas do ensino médio importantes

para procedimentos e algoritmos.

Quadro 2 – Competências Específicas 1 e 3 do Ensino Médio

COMPETÊNCIA 1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
COMPETÊNCIA 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Fonte: BRASIL, 2018

5.2 Algoritmo de Trigg

O ensino e a exploração de algoritmos em conceitos matemáticos principalmente nos números palíndromos, na BNCC é importante para o desenvolvimento do pensamento lógico dos estudantes. Assim, exploraremos como o algoritmo de Trigg pode ser utilizado em atividades ou situações de ensino na matemática. Ao utilizarmos o algoritmo de Trigg na exploração dos números palíndromos podemos despertar a curiosidade dos estudantes. No momento que verem situações de aplicação na prática em conceitos matemáticos na identificação de padrões palindrômicos. Este estudo pode ser interdisciplinar, pois pode facilmente envolver um conjunto de disciplina como por exemplo a de tecnologia e programação. Sendo permitido que os estudantes possam compreender que a partir da interdisciplinaridade os conceitos matemáticos podendo ser aplicados em outros conceitos educacionais.

As aplicações de algoritmos requer a atenção para que analisem cada passo a passo, assim, no momento de testar o algoritmo os estudantes devem ter uma precisão ao verificarem as soluções ou até mesmo possíveis erros durante o procedimento. Algoritmos integrado ao ensino de matemática permitem que os estudantes desenvolvam competências úteis para sucesso acadêmico ou profissional em mundo cada vez mais tecnológico. O estudo e a implementação do algoritmo de Trigg para números palíndromos oferecem uma rica oportunidade para o desenvolvimento de diversas habilidades matemáticas e tecnológicas, organizados com base nos objetivos da BNCC. Essas atividades podem tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo para os estudantes, preparando-os para enfrentar desafios complexos de maneira criativa e estruturada.

No momento em que entendemos a importância da utilização de algoritmos no ensino na matemática. A partir disso, desenvolvemos um planejamento como possibilidade de ensino dos números palíndromos em sala de aula, tal planejamento que pode ser aplicado tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, pois está relacionado ao algoritmo de Trigg que é uma simples aplicação da adição de um número qualquer não palíndromo com seu reverso, que podem ter repetições simultâneas denominada por “iterações”. Assim, neste planejamento utilizaremos alguns problemas envolvendo as quantidades de iterações necessárias para formar um número palíndromo, sendo verificados os resultados com o auxílio do aplicativo PALÍNDROME CALCULATOR¹, tal planejamento terá 3 etapas para desenvolvimento.

1ª Etapa: Introdução sobre o algoritmo de Trigg e dos números palíndromos.

Nesta etapa iremos apresentar as principais propriedades, conceitos, características dos números palíndromos. E também mostraremos o algoritmo de Trigg, que é descrito por, dado um número n não palíndromo e n' seu reverso, façamos $s_1 = n + n'$, então teremos duas possibilidades: (1) s_1 é palíndromo; (2) s_1 não é palíndromo. Sendo s_1 não palíndromo podemos repetir o processo obtendo $s_2 = s_1 + s'_1, \dots$, ou seja, $n + n' = s_1, s_1 + s'_1 = s_2, \dots, s_{k-1} + s'_{k-1} = s_k$, então repetimos esse processo até o momento em que resulte em um número palíndromo. Por exemplo se considerarmos $n = 2024$, logo seu reverso será $n' = 4202$, ou seja, $s_1 = 2024 + 4202 = 6226$, assim, resultando em 6226 que é palíndromo com 1 iteração.

2ª Etapa: Resolução de problemas.

A seguinte etapa apresentaremos 3 problemas para serem feitas as resoluções, sendo que os problemas serão para identificar quantas iterações foram necessárias para resultarem em um número palíndromo utilizando o algoritmo de Trigg.

Problema 5.1. *Quantas iterações são necessárias para que um número $n = abc$ com 3 algarismos forme um número palíndromo?*

a) $n = 267$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 267$ seu reverso será $n' = 762$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 267 + 762 = 1029 ,$$

¹ Aplicativo para sistema android, que conseguimos baixar no Google Play Store, sendo que conseguimos identificar no aplicativo quantas iterações foram necessárias para formar um número palíndromo a partir de um número qualquer não palíndromo. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.avi12.palindrome&gl=US>.

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 1029 + 9201 = 10230 ,$$

repetiremos novamente o processo

$$s_3 = 10230 + 03201 = 13431$$

logo, precisamos de 3 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 267$. •

b) $n = 364$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 364$ seu reverso será $n' = 463$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 364 + 463 = 827 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 827 + 728 = 1555 ,$$

repetiremos novamente o processo

$$s_3 = 1555 + 5551 = 7106 ,$$

em sequência,

$$s_4 = 7106 + 6071 = 13123 ,$$

então,

$$s_5 = 13123 + 32131 = 45254$$

logo, precisamos de 5 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 364$. •

c) $n = 519$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 519$ seu reverso será $n' = 915$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 519 + 915 = 1434 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 1434 + 4341 = 5775 ,$$

logo, precisamos de 2 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 519$. •

Problema 5.2. *Quantas iterações são necessárias para que um número $n = abcd$ com 4 algarismos forme um número palíndromo?*

a) $n = 3496$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 3496$ seu reverso será $n' = 6943$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 3496 + 6943 = 10439 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 10439 + 93401 = 103840 ,$$

repetiremos novamente o processo

$$s_3 = 102840 + 048301 = 152141 ,$$

em sequência,

$$s_4 = 152141 + 141251 = 293392 ,$$

logo, precisamos de 4 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 3496$. •

b) $n = 2689$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 2689$ seu reverso será $n' = 9862$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 2689 + 9862 = 12551 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 12551 + 15521 = 28072 ,$$

repetiremos novamente o processo

$$s_3 = 28072 + 27082 = 55154 ,$$

em sequência,

$$s_4 = 55154 + 45155 = 100309 ,$$

então,

$$s_5 = 100309 + 903001 = 1003310 ,$$

ainda,

$$s_6 = 1003310 + 0133001 = 1136311 ,$$

logo, precisamos de 6 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 2689$. •

c) $n = 8695$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 8695$ seu reverso será $n' = 5968$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 8695 + 5968 = 14663 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 14663 + 36641 = 51304 ,$$

repetiremos novamente o processo

$$s_3 = 51304 + 40315 = 91619$$

logo, precisamos de 3 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 8695$. •

Problema 5.3. *Quantas iterações são necessárias para que um número $n = abcde$ com 5 algarismos forme um número palíndromo?*

a) $n = 42978$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 42978$ seu reverso será $n' = 87924$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 42978 + 87924 = 130902 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 130902 + 209031 = 339933 ,$$

logo, precisamos de 2 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 42978$. •

b) $n = 60193$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 60193$ seu reverso será $n' = 39106$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 60193 + 39106 = 99299 ,$$

logo, precisamos de 1 iteração para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 60193$. •

c) $n = 90521$.

Resolução: Ao escolhermos o número $n = 90521$ seu reverso será $n' = 12509$, ou seja, aplicando o algoritmo de Trigg temos,

$$s_1 = 90521 + 12509 = 103030 ,$$

como o resultado de s_1 não é palíndromo, então repetiremos o processo

$$s_2 = 103030 + 030301 = 133331 ,$$

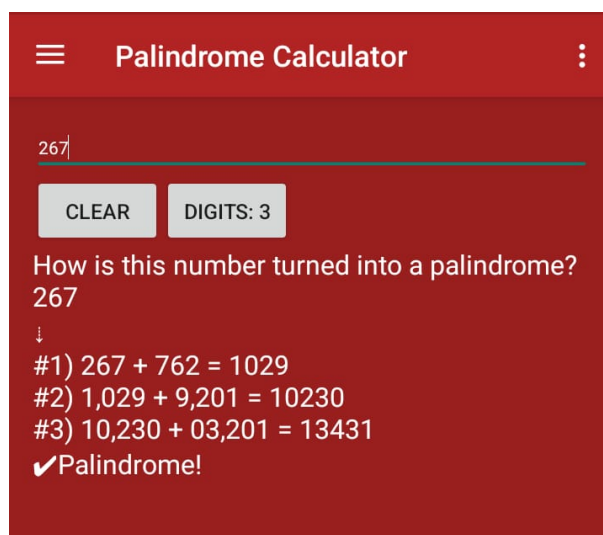
logo, precisamos de 2 iterações para resultar em um número palíndromo partindo de $n = 90521$. •

3ª Etapa: Verificação dos resultados com o PALÍNDROME CALCULATOR e discussão acerca dos resultados obtidos.

Está etapa mostraremos os resultados que encontramos no problemas anteriores, sendo utilizado recurso tecnológico, uma calculadora digital, em que mostra as quantidades de iterações necessárias para formar um número palíndromo.

Na Figura 2 apresentamos a resolução do Problema 5.1.a.

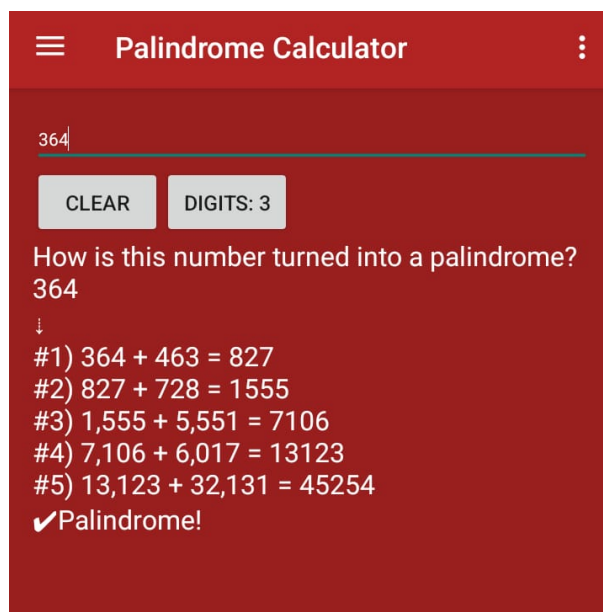
Figura 2 – Resolução do problema 5.1.a



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Na Figura 3 apresentamos a resolução do Problema 5.1.b.

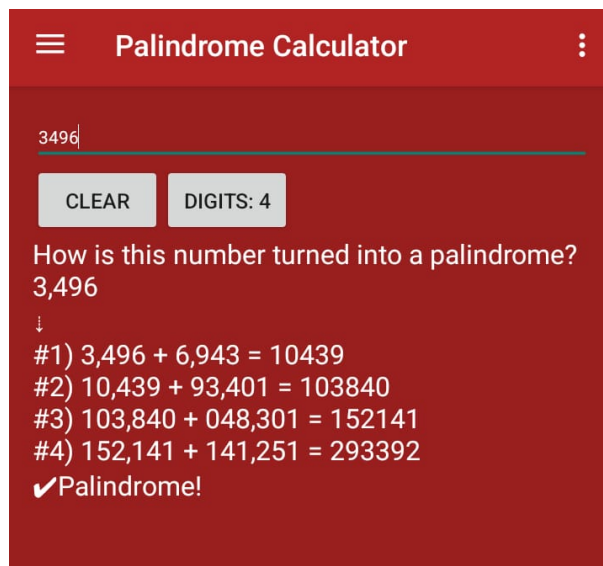
Figura 3 – Resolução do problema 5.1.b



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Na Figura 4 apresentamos a resolução do Problema 5.2.a.

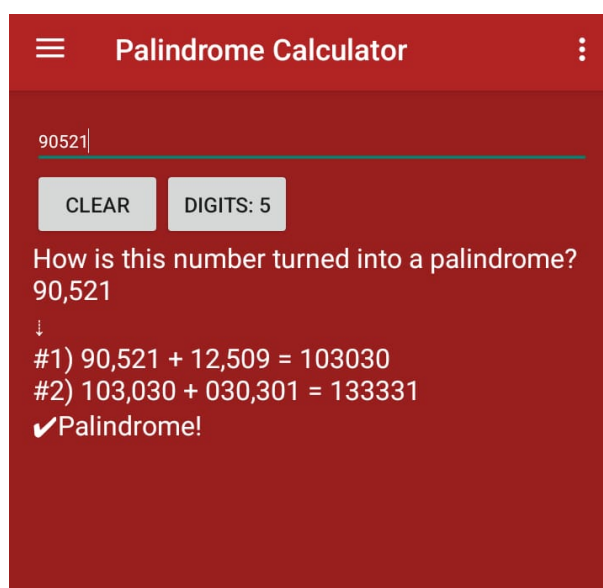
Figura 4 – Resolução do problema 5.2.a



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

Na Figura 5 apresentamos a resolução do Problema 5.3.c.

Figura 5 – Resolução do problema 5.3.c



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024

A utilização de recursos tecnológicos, como ferramentas auxiliares, pode aumentar o interesse dos estudantes em aprender os conteúdos propostos, pois em um mundo cada vez mais digital devemos utilizar os recursos tecnológicos à nosso favor. Podemos também ao analisarem os resultados obtidos verificar se existe padrões para identificar quantas iterações o número precisa para resultar em um número palíndromo ou até mesmo encontrar números que não formam números palíndromos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo deste trabalho foi a identificação de padrões numéricos ao formamos números palíndromos pelo algoritmo de Trigg, destacando principalmente os recursos tecnológicos utilizados na verificação das proposições que serviram na identificação daqueles padrões nos números palíndromos.

Neste trabalho procuramos entender a importância dos números palíndromos na matemática, desse modo, durante a exploração abordamos e exploramos algumas definições, conceitos e propriedades. Assim, os números palíndromos, bem como a matemática, está repleta de encanto e mistério, sendo que, eles nós fazem recordar que a matemática é além do que números e formas, mas sim um mundo extraordinário de descobertas. E ainda, os números palíndromos possuem valores significativos tanto em suas aplicações quanto as atividades de ensino na forma de desafios, promovendo habilidades no reconhecimento de padrões e algoritmos.

Destacamos a BNCC (2018) que apregoa a utilização dos algoritmos no ensino da matemática e em outras áreas. Ao estudarmos sobre a classe dos números palíndromos, e sendo um professor em formação penso que por meio da proposta descrita no Capítulo 5, apresentar aos estudantes da educação básica o quão os números palíndromos representa uma classe numérica interessante para serem analisadas.

Esperamos que as ideias desenvolvidas neste trabalho, possam servir de inspiração e incentivo para estudantes e diletantes em matemática. Pensamos que a continuação dos estudos acerca dos números palíndromos podem satisfazer nossas curiosidades intelectuais, mas também oferecem diversos benefícios profissionais e acadêmico, além de promover profunda apreciação da “arte” que é a matemática.

REFERÊNCIAS

- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quartos ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Editora Blucher, São Paulo, 2010.
- CALCULADORA ONLINE. **Prime Factorization Calculator**, Disponível em: <https://www.calculatorsoup.com/calculators/math/prime-factors.php>. Acesso em: 18 de Maio de 2024.
- CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Permutando algarismos dos números. **Eureka! SBM** , v. 39, p. 27-36, 2015.
- COSTA, Eudes Antonio; RODRIGUES, Edineide da Cunha. Divisibilidade e Determinantes. **Revista do Professor de Matemática (RPM-SBM)** , v. 91, p. 41-42, 2016.
- COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Algumas propriedades dos números monodígitos e repunidades. **Revista de Matemática da UFOP**, V.2, 2022.
- COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio. Um passeio pela sequência repunidade. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, **23**, n. 1. p.241–254, 2023.
- COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Ronaldo Antônio. Números: dos naturais aos reais. **Proceedings do XXIII Semana do IME/UFG**, p. 10, 2008. Disponível em: https://semanadoime.ime.ufg.br/up/34/o/min_eudes_ronaldo.pdf. Acesso em: 18 de Maio de 2024.
- COSTA, Eudes Antonio; SOARES, Thalles Santiago. Soma iterada de algarismos de um número concatenado. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 1, 2024.
- DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Fundamentos de aritmética**. Ed. da UFSC, 2009.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Ed. Unicamp, 2011.
- FOMÍN, Serguei Vasil’evich. **Sistema de numeración**. Editorial MIR. Moscú, 1975.

- IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**, Ed. Globo, 2005.
- NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L. **An introduction to the theory of numbers**. John Wiley & Sons, 1991.
- NOGUEIRA, Joaquim Eurico. Capicuas, **Gazeta de Matemática, SPM**, n. 172, p.36-41, 2014.
- OCHOVIET, Teresa Cristina. Números capicuas e sistema de numeração. **Revista do Professor de Matemática (RPM-SBM)**, n.29, 1995.
- OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Banco de Questões**. Disponível em: <https://www.obmep.org.br>. Acesso em: 20 de Dezembro de 2023.
- OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Provas**. Disponível em: <https://www.obmep.org.br/provas.htm>. Acesso em: 10 de Janeiro de 2024.
- PALINDROME CALCULATOR. Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.avi12.palindrome&gl=US>. Acesso em 20 de Outubro de 2023.
- RODRIGUES, Edineide da Cunha. **Divisibilidade em determinantes de matrizes inteiras**, Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Arraias-To, 2015.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, Ed. Schawarez-Companhia das Letras, 2012.
- SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2003.
- SANTOS, Ronaldo Antonio; COSTA, Eudes Antonio. Números de ball generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v.7, n.1, p. 61-85, 2022.
- SLOANE, Neil J. A. **The On-line Encyclopedia of Integer Sequences**. Sequence A000040. [S. l.]: The OEIS Foundation Inc., 2024. Disponível em: <http://oeis.org/A000040>. Acesso em: 30 Junho de 2024.
- TOUMASIS, Charalampos. Exploring repunits. **School Science and Mathematics**, v.94, n.3, p.142-145, 1994.
- TRIGG, Charles Wilderman. Palindromes by addition. **Mathematics Magazine**, vol. 40, p.26-28, 1967.
- TRIGG, Charles Wilderman. More on palindromes by reversal-addition. **Mathematics Magazine**, vol. 45, p.184-186, 1972.