



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

VINICIUS TIMOTEO BORGES

**RESOLUÇÃO NUMÉRICA PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE
SEGUNDA ORDEM POR MEIO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS COM
IMPLEMENTAÇÃO NO SOFTWARE OCTAVE**

Arraias, TO
2025

Vinicius Timoteo Borges

**Resolução numérica para equações diferenciais lineares de segunda ordem por meio do
Método das Diferenças Finitas com implementação no software Octave**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao curso de Licenciatura em Matemática da
Universidade Federal do Tocantins como requisito
parcial para a obtenção do grau de Licenciado em
Matemática.

Orientador: Fernando Soares de Carvalho

Arraias, TO
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T585r Timoteo Borges, Vinicius.

Resolução numérica para equações diferenciais lineares de segunda ordem por meio do Método das Diferenças Finitas com implementação no software Octave. / Vinicius Timoteo Borges. – Arraias, TO, 2025.
35 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2025.

Orientador: Fernando Soares de Carvalho

1. Equações diferenciais. 2. Método das Diferenças Finitas. 3. Octave. 4. Equação do Calor. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

VINICIUS TIMOTEO BORGES

**RESOLUÇÃO NUMÉRICA PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE
SEGUNDA ORDEM POR MEIO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS COM
IMPLEMENTAÇÃO NO SOFTWARE OCTAVE**

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 25/02/2025

Banca Examinadora

Profa. Dr. Fernando Soares de Carvalho (UFT)
Orientador

Profa. Dra. Gisele Detomazi Almeida
(UFT)
Examinadora 1

Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante (UFT)
Examinador 2

RESUMO

Neste trabalho foi realizado uma análise do ponto de vista computacional do Método das Diferenças Finitas, utilizando o Software Octave, de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes e também um exemplo específico de equação diferencial parcial, a saber, a Equação do Calor com condições de contorno e um domínio retangular. Apresentamos ainda os códigos desenvolvidos no Octave dos exemplos desenvolvidos no trabalho, baseado no Método das Diferenças Finitas.

Palavras-chave: Equações diferenciais; Método das Diferenças Finitas; Octave; Equação do Calor.

ABSTRACT

In this work, a computational analysis of the Finite Difference Method was carried out using the Octave software, focusing on second-order linear differential equations with constant coefficients, as well as on a specific example of a partial differential equation, namely the Heat Equation with boundary conditions on a rectangular domain. We also present the Octave codes developed for the examples discussed throughout the study, all based on the Finite Difference Method.

Keywords: Differential equations; Finite Difference Method; Octave; Heat Equation.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO E SOLUÇÕES ANALÍTICAS	7
3	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	10
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	15
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
6	APÊNDICE	30
	BIBLIOGRAFIA	32

1 INTRODUÇÃO

A resolução de equações diferenciais são fundamentais em diversas áreas da ciência, tais como, matemática, engenharia e a física, pois muitas leis naturais são expressas por meio dessas equações. No entanto, uma equação diferencial não possui necessariamente uma solução explícita ou implícita facilmente determinada. Em geral é fundamental recorrermos a métodos numéricos que nos permitem uma aproximação da solução exata.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é considerada linear se pode ser expressa da seguinte maneira:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x), \quad (1.1)$$

onde $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ e $f(x)$, são funções contínuas. Se $f(x)$ for a função nula, a EDO é chamada de homogênea, caso contrário, é chamada de não-homogênea. Já uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que relaciona uma função desconhecida de várias variáveis independentes com suas derivadas parciais. De maneira geral, uma EDP de ordem m pode ser escrita na forma:

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \right) = 0, \quad (1.2)$$

onde $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma função real, $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as variáveis independentes, e F é uma função que envolve u e suas derivadas parciais até uma certa ordem m .

As EDPs são importantes para a modelagem de fenômenos que variam em múltiplas dimensões, como a mecânica dos fluidos, a transferência de calor e a dinâmica populacional. Métodos numéricos para determinar soluções aproximadas com bastante precisão para as equações (1.1) e (1.2), são bastante conhecidos na literatura especializada. Podemos citar por exemplo o Método das Diferenças Finitas (MDF), os Métodos Runge-Kutta e o Método de Euler (veja [2]). Nosso foco no decorrer destas notas está no MDF, dando ênfase no aspecto computacional utilizando o software *Octave* [5] em Problemas de Valor de Contorno (PVC) que envolvam as equações (1.1) e (1.2).

Para a abordagem computacional, via MDF, vamos nos restringir a PVC no caso em que $n = 2$ e $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ são constantes reais, na equação (1.1) e para a equação (1.2), consideramos um exemplo particular importante que é a equação do calor em estado estacionário, onde a temperatura não muda com o tempo. A equação do calor pode ser expressa como:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \quad (1.3)$$

Neste contexto, u representa a temperatura em função da posição, e ∇^2 é o operador laplaciano. Essa simplificação indica que a temperatura se distribui de forma constante pelo meio, dependendo das condições de contorno, sem variações temporais. A análise da equação do calor

em estado estacionário é fundamental em diversas aplicações, como em engenharia térmica, isolamento térmico e processos de transferência de calor.

Utilizando o software como ferramenta computacional para a resolução numérica de EDOs e da Equação do Calor, representativa EDP estudada. Após a discretização dos modelos contínuos, obtêm-se sistemas lineares da forma ($Ax = b$), cuja solução eficiente é fundamental para a implementação dos métodos numéricos. Nesse contexto, o *Octave* emprega a fatoração *Lower Upper* (LU) [3], que decompõe a matriz do sistema em componentes triangulares inferior e superior, permitindo substituir a solução direta por procedimentos de substituição mais rápidos e estáveis. Essa abordagem é particularmente vantajosa para as matrizes esparsas e estruturadas típicas de discretizações de EDOs e EDPs, garantindo agilidade no processamento e possibilitando a reutilização da decomposição em etapas iterativas, como nos esquemas temporais implícitos aplicados à equação do calor. Dessa forma, o *Octave* fornece um ambiente robusto e acessível para a implementação dos métodos numéricos, concentrando o esforço analítico na modelagem e na interpretação dos resultados.

Além da fundamentação teórica e da análise dos métodos numéricos aplicados, este trabalho dedica atenção especial à abordagem computacional, uma vez que grande parte dos resultados obtidos depende diretamente da implementação prática dos algoritmos estudados. Para isso, foram desenvolvidos códigos em GNU *Octave* que ilustram, executam e validam as técnicas numéricas aplicadas às EDOs e à equação do calor, permitindo uma compreensão mais clara do comportamento das soluções aproximadas e do desempenho dos métodos utilizados. A fim de manter o fluxo expositivo do texto principal, todos os scripts e rotinas desenvolvidos ao longo da pesquisa foram organizados e disponibilizados integralmente no Apêndice 6, servindo como referência para consulta, reprodução dos experimentos e continuidade de estudos futuros.

A relevância da abordagem computacional neste trabalho reside no fato de que a maioria dos modelos diferenciais que descrevem fenômenos físicos, biológicos e industriais não admite solução analítica fechada, tornando indispensável o uso de métodos numéricos e ferramentas de simulação. Ao empregar o *Octave* para implementar algoritmos, resolver sistemas discretizados e visualizar o comportamento das soluções, o estudo não apenas reforça a compreensão teórica dos métodos, mas também evidencia sua aplicabilidade prática em situações reais, onde a precisão e a eficiência computacional são fatores determinantes. Dessa forma, a dimensão computacional do trabalho amplia seu alcance, permitindo validar os conceitos matemáticos estudados, reproduzir experimentos de forma controlada e oferecer subsídios concretos para aplicações futuras em diferentes áreas da ciência e da engenharia.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, são definidos os Problemas de Valor de Contorno, apresentando os passos para a obtenção de suas soluções analíticas. No Capítulo 3, descrevemos o Método das Diferenças Finitas, detalhando as discretizações das derivadas e explicando sua aplicação. No Capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos pela aplicação do MDF na resolução de Equações Diferenciais com PVCs. Finalmente, no Capítulo 5, discutimos as considerações finais sobre o MDF, destacando sua eficiência e aplicação computacional por meio do software *Octave*.

2 PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO E SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Nesta seção vamos definir os PVCs e ainda apresentar os passos para obtenção das respectivas soluções analíticas.

Os PVCs considerados são:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad a < x < b, \\ y(a) = c_0, \\ y(b) = d_0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

onde a_0 e b_0 são constantes. E ainda,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 u(x, y) = 0 & \text{para } (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = g_1(x, y) & \text{(Condição de Dirichlet em } \partial\Omega_1), \\ u(x, y) = g_2(x, y) & \text{(Condição de Dirichlet em } \partial\Omega_2), \end{array} \right. \quad (2.2)$$

onde Ω é o domínio considerado, sendo $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, com $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $g_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções contínuas.

Com relação à solução do PVC (2.1), observa-se que, se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação não-homogênea

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x). \quad (2.3)$$

Considerando

$$y(x) = y_1(x) - y_2(x). \quad (2.4)$$

Agora, substituindo a equação (2.4) na equação (2.3), concluímos que

$$\begin{aligned} a_2 [y_1''(x) - y_2''(x)] + a_1 [y_1'(x) - y_2'(x)] + a_0 [y_1(x) - y_2(x)] &= 0, \\ \underbrace{a_2 y_1''(x) + a_1 y_1'(x) + a_0 y_1(x)}_{=0} - \underbrace{(a_2 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(x))}_{=0} &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Note que a diferença entre duas soluções da equação não-homogênea corresponde à solução da equação diferencial ordinária (EDO) homogênea associada. Dessa forma, podemos expressar a solução geral da EDO não-homogênea da seguinte forma:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

onde y_h é a solução geral da equação homogênea e y_p é uma solução particular da equação não-homogênea.

É chamada equação característica associada à equação (2.3), no caso homogêneo, a equação

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \quad (2.5)$$

Se r_1 e r_2 são soluções da equação (2.5), temos

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2},$$

onde $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0$.

Deste modo temos três casos a considerar, a saber:

- $\Delta > 0$: A equação (2.5) tem duas raízes reais e distintas. A solução homogênea tem a forma:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

onde r_1 e r_2 são as duas raízes reais e distintas da equação característica.

- $\Delta = 0$: A equação (2.5) tem uma raiz real dupla. Isso significa que a solução homogênea tem a forma:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x},$$

onde r_1 é a raiz real dupla.

- $\Delta < 0$: A equação (2.5) tem duas raízes complexas conjugadas. Já neste caso, a solução homogênea tem a forma:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)),$$

onde $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ são as raízes complexas conjugadas da equação característica.

Para o PVC (2.2), considerando um domínio retangular definido por $0 < x < L$ e $0 < y < H$, assumimos que a solução pode ser escrita na forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação $\nabla^2 u(x, y) = 0$, obtemos:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0. \quad (2.7)$$

Separando as variáveis como na equação (2.7), isso nos leva à duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda Y = 0,$$

onde λ é uma constante de separação. Neste contexto, observa-se:

1. Solução para $X(x)$: - Para $\lambda > 0$, obtém-se:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

2. Solução para $Y(y)$: - Para $\lambda > 0$, encontra-se:

$$Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y}.$$

Note que as soluções finais dependerão das condições de contorno aplicadas. Por exemplo, ao considerar condições de Dirichlet:

$$u(0, y) = 0, u(L, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, H) = g(x).$$

Note que as soluções gerais podem ser expressas como uma série de Fourier (veja [4]), combinando as soluções $X(x)$ e $Y(y)$:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right), \quad (2.8)$$

onde A_n e B_n são coeficientes determinados pelas condições de contorno. Para uma abordagem mais detalhada sobre a Equação do Calor, consulte o capítulo correspondente em [6].

Vale ressaltar que, a resolução da equação do calor, em um domínio qualquer, apresenta várias dificuldades. A complexidade das geometrias pode dificultar a aplicação de métodos analíticos tradicionais. Além disso, as condições de contorno podem variar amplamente, exigindo abordagens específicas para cada caso, o que evidencia a necessidade de recorrer a métodos numéricos, como o método das diferenças finitas, para obter soluções precisas e eficientes.

3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O Método das Diferenças Finitas [2] é uma técnica numérica usada para aproximar soluções de equações diferenciais. Este método converte uma equação diferencial em um sistema de equações algébricas que podem ser resolvidas utilizando técnicas de Álgebra Linear. A essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo, tornando possível a utilização de recursos computacionais.

O primeiro passo é dividir o domínio da variável independente em uma malha ou grade de pontos discretos. Suponha que o intervalo $[a, b]$ seja dividido em n subintervalos de mesmo tamanho h . Assim, os pontos da malha são $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, b = x_n$, onde $x_i = x_0 \pm ih$, $i = 1, 2, \dots$ e $h = \frac{x_n - x_0}{n}$. O segundo passo consiste na discretização das derivadas que estão presentes na equação diferencial. É utilizada para isso a expansão em série de Taylor. Ela nos permite entender o comportamento da função num ponto x e ainda fazer avaliações numa vizinhança de x , ou seja, nos pontos $x \pm h$. Se assumirmos que $y(x)$ tem derivadas até ordem $n + 1$ em x , sua expansão em série de Taylor é dada por:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi), \quad (3.1)$$

onde ξ está entre x e $x+h$. O último termo da expressão acima representa o erro da aproximação de $y(x+h)$ pelos $n+1$ primeiros termos da série de Taylor. Trabalhando a expansão conseguimos isolar as derivadas. Para $n=2$ na equação (3.1), temos:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_1) \quad (3.2)$$

e

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_2). \quad (3.3)$$

Subtraindo (3.3) de (3.2), obtemos a *fórmula centrada* para discretização da derivada e o seu respectivo erro:

$$\begin{aligned} y(x+h) - y(x-h) &= y(x) - y(x) + hy'(x) - (-hy'(x)) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi) - \left(-\frac{h^3}{3!}y'''(\xi)\right) \\ y(x+h) - y(x-h) &= 2hy'(x) + 2\frac{h^3}{3!}y'''(\xi) \\ 2hy'(x) &= y(x+h) - y(x-h) - 2\frac{h^3}{3!}y'''(\xi) \\ y'(x) &= \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}y'''(\xi). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para a aproximação da segunda derivada, tomamos $n=3$ na Equação (3.1), obtendo

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_1) \quad (3.5)$$

e

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi_2). \quad (3.6)$$

Somando as Equações (3.5) e (3.6), temos:

$$y(x+h) + y(x-h) = y(x) + y(x) + hy'(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi) + \frac{h^4}{4!}y^{iv}(\xi)$$

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2y''(x) + \frac{h^4}{12}y^{iv}(\xi)$$

$$h^2y''(x) = y(x+h) - 2y(x) + y(x-h) - \frac{h^4}{12}y^{iv}(\xi)$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}y^{(iv)}(\xi). \quad (3.7)$$

Neste método as derivadas presentes nas equações são substituídas pelas aproximações apresentadas nas equações (3.4) e (3.7) para obtermos discretizações associadas a uma malha regular onde $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 0, 1, \dots, n$. Discretizando as aproximações para $y'(x)$ e $y''(x)$, teremos respectivamente:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (3.8)$$

e

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (3.9)$$

Para o caso geral, a discretização do PVC definido em (2.1), através das equações (3.8) e (3.9), organizando os termos semelhantes temos:

$$a_2 \left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \right) + a_1 \left(\frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2h} \right) + a_0 y_i = f(x_i)$$

$$\frac{a_2 y_{i+1} - 2a_2 y_i + a_2 y_{i-1}}{h^2} + \frac{a_1 y_{i+1} - a_1 y_{i-1}}{2h} + a_0 y_i = f(x_i)$$

$$\frac{a_2 y_{i+1} - 2a_2 y_i + a_2 y_{i-1}}{h^2} \cdot \frac{2}{2} + \frac{a_1 y_{i+1} - a_1 y_{i-1}}{2h} \cdot \frac{h}{h} + a_0 y_i \cdot \frac{2h^2}{2h^2} = f(x_i)$$

$$\frac{2(a_2 y_{i+1} - 2a_2 y_i + a_2 y_{i-1}) + h(a_1 y_{i+1} - a_1 y_{i-1}) + a_0 2h^2 y_i}{2h^2} = f(x_i)$$

$$\frac{2a_2 y_{i+1} - 4a_2 y_i + 2a_2 y_{i-1} + a_1 h y_{i+1} - a_1 h y_{i-1} + a_0 2h^2 y_i}{2h^2} = f(x_i)$$

$$\frac{a_2 y_{i+1} - 2a_2 y_i + a_2 y_{i-1} + \frac{a_1 h}{2} y_{i+1} - \frac{a_1 h}{2} y_{i-1} + a_0 h^2 y_i}{h^2} = f(x_i)$$

$$a_2 y_{i+1} - 2a_2 y_i + a_2 y_{i-1} + \frac{a_1 h}{2} y_{i+1} - \frac{a_1 h}{2} y_{i-1} + a_0 h^2 y_i = h^2 f(x_i)$$

$$\left(a_2 - \frac{a_1 h}{2}\right) y_{i-1} + (a_0 h^2 - 2a_2) y_i + \left(a_2 + \frac{a_1 h}{2}\right) y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad (3.10)$$

o que resulta no sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 - \frac{a_1 h}{2} & a_0 h^2 - 2a_2 & a_2 + \frac{a_1 h}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - \frac{a_1 h}{2} & a_0 h^2 - 2a_2 & a_2 + \frac{a_1 h}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 - \frac{a_1 h}{2} & a_0 h^2 - 2a_2 & a_2 + \frac{a_1 h}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 - \frac{a_1 h}{2} & a_0 h^2 - 2a_2 & a_2 + \frac{a_1 h}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ h^2 \cdot f(x_1) \\ h^2 \cdot f(x_2) \\ h^2 \cdot f(x_3) \\ \vdots \\ h^2 \cdot f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Conforme já mencionado neste texto, para resolver a equação diferencial parcial (EDP) numericamente, é necessário, em primeiro lugar, discretizar o domínio onde a equação está definida. Após essa etapa, devemos definir uma malha sobre a qual a solução aproximada será calculada.

Seja R o conjunto de pontos (x, y) onde a equação diferencial está definida, e S o contorno deste conjunto. Consideremos uma malha de pontos igualmente espaçados, conhecida como malha estruturada, que pode ser descrita por:

$$R_h = \{(x_i, y_i) = (\underline{x} + ih, \underline{y} + jh), i, j = \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

onde h é o espaçamento da malha. E, seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar de duas variáveis x e y . O laplaciano de u , denotado por Δu , é uma operação que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um valor real. Portanto, $\Delta u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sendo uma função que retorna a soma das segundas derivadas parciais de u , ou seja,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}. \quad (3.11)$$

Neste caso específico, a partir da equação (3.11), trabalharemos com o laplaciano, cuja igualdade a zero define a Equação de Laplace. Essa equação é amplamente conhecida por suas diversas aplicações na física, destacando-se na descrição do calor em estado estacionário. A equação mencionada anteriormente é expressa por:

$$\Delta u(x, y) = 0,$$

donde segue que:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (3.12)$$

Também frequentemente encontrada com a seguinte notação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

porém adotaremos o penúltima forma (3.12), por questões de conveniência.

Pelo método das diferenças finitas, podemos aproximar as derivadas parciais da equação (3.12) da seguinte forma:

$$u(x+h, y) = u(x, y) + u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} + u_{xxx}(\alpha, y)\frac{h^3}{3!}, \quad (3.13)$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - u_x(x, y)h + u_{xx}(x, y)\frac{h^2}{2!} - u_{xxx}(\beta, y)\frac{h^3}{3!}, \quad (3.14)$$

onde α e β encontrados em (3.13) e (3.14) surgem na análise de aproximações numéricas e são utilizados para avaliar derivadas em intervalos que cercam os pontos de interesse, x , $x+h$ e $x-h$. A inclusão desses pontos ajuda a assegurar que a precisão das aproximações leve em conta as variações da função nas vizinhanças relevantes, de tal modo que $x < \alpha < x+h$ e $x-h < \beta < x$.

Assim, temos as seguintes aproximações para as derivadas:

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \quad (\text{erro } \mathcal{O}(h)),$$

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x-h, y)}{h} \quad (\text{erro } \mathcal{O}(h)),$$

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} \quad (\text{erro } \mathcal{O}(h^2)).$$

Para obter-se uma maior precisão, podemos também utilizar a fórmula da primeira derivada de $u(x, y)$ em relação à x centralizada:

$$u_x(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x-h, y)}{2h} \quad (\text{erro } \mathcal{O}(h^2)). \quad (3.15)$$

Considerando o uso da notação:

$$\begin{aligned} u(x_i, y_j) &\approx u_{i,j}, \\ u(x_i - h, y_j) &\approx u_{i-1,j}, \\ u(x_i, y_j - k) &\approx u_{i,j-1}, \\ u(x_i + h, y_j) &\approx u_{i+1,j}, \\ u(x_i, y_j + k) &\approx u_{i,j+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, as aproximações das derivadas parciais de segunda ordem são reescritas como:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (3.16)$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}. \quad (3.17)$$

A discretização da equação de Laplace definida em (3.12) através das aproximações dadas por (3.16) e (3.17) nos leva a:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} = 0. \quad (3.18)$$

Para uma malha estruturada em que $h = k$ obtemos

$$u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0, \quad (3.19)$$

que nos direciona a um sistema de equações lineares.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados exemplos numéricos obtidos pela aplicação do MDF na resolução de equações diferenciais com condições de contorno. São abordados exemplos como uma EDO não homogênea com coeficientes constantes, um exemplo particular de equação homogênea com coeficientes variáveis que pode ser transformada para coeficientes constantes, além de dois problemas envolvendo a equação do calor com diferentes condições de contorno.

Os exemplos numéricos apresentados a seguir com suas respectivas condições de contorno têm o intuito de ilustrar a aplicação da metodologia proposta relativa ao MDF, seja para comparar soluções numéricas e analíticas em EDOs e também a distribuição de temperatura em um domínio regular modelado pela equação do calor.

Ressalta-se as configurações técnicas de Hardware utilizado para obtenção dos exemplos numéricos a seguir: processador AMD Ryzen 5 3500U with Radeon Vega Mobile Gfx 2.10 GHz, RAM instalada 8,00 GB.

Exemplo 1. Considere o PVC ([1]),

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 2\sin(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ y(0) = 0, \\ y(\pi/2) = 2. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Observe que a equação característica associada $r^2 - 3r - 4 = 0$, tem como raízes $r_1 = 4$ e $r_2 = -1$. Logo a solução da equação homogênea associada será:

$$y_h(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}.$$

Para determinar uma solução particular, vamos considerar

$$y_p(x) = A \sin(x) + B \cos(x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Ao realizar as derivadas correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A \cos(x) - B \sin(x), \\ y_p''(x) &= -A \sin(x) - B \cos(x) \end{aligned}$$

e, substituindo $y_p(x)$ em $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} -A \sin(x) - B \cos(x) - 3(A \cos(x) - B \sin(x)) - 4(A \sin(x) + B \cos(x)) &= 2\sin(x) \\ -A \sin(x) - B \cos(x) - 3A \cos(x) + 3B \sin(x) - 4A \sin(x) - 4B \cos(x) &= 2\sin(x) \\ -5A \sin(x) - 5B \cos(x) - 3A \cos(x) + 3B \sin(x) &= 2\sin(x) \end{aligned}$$

Para o extremo em que $x = 0$ temos:

$$-5B - 3A = 0,$$

e no outro em que $x = \frac{\pi}{2}$ resulta em:

$$-5A + 3B = 2.$$

Dando origem ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} -5B - 3A = 0 \\ -5A + 3B = 2 \end{cases},$$

encontramos então que $A = -\frac{5}{17}$ e $B = \frac{3}{17}$, portanto,

$$y_p(x) = -\frac{5}{17} \sin(x) + \frac{3}{17} \cos(x). \quad (4.3)$$

Seja $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ a solução geral da EDO encontrada é

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + \frac{3}{17} \cos(x) - \frac{5}{17} \sin(x).$$

Ao aplicarmos as condições de contorno $y(0) = 0$ e $y(\pi/2) = 2$, determinamos que para $y(0) = 1$ teremos:

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^{4 \cdot 0} + \frac{3}{17} \cos(0) - \frac{5}{17} \sin(0),$$

determinamos ainda que $C_1 = \frac{14}{17} - C_2$ e para $y(\pi/2) = 2$ obtemos que:

$$2 = C_1 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{4 \cdot (\frac{\pi}{2})} + \frac{3}{17} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{5}{17} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

com isso encontramos que $C_2 = \frac{39e^{\frac{\pi}{2}} - 14}{17e^{\frac{5\pi}{2}} - 17}$ e consequentemente que $C_1 = \frac{14}{17} - \frac{39e^{\frac{\pi}{2}} - 14}{17e^{\frac{5\pi}{2}} - 17}$.

Concluimos, então, que a solução do problema de valor de contorno proposto neste exemplo é dada por:

$$y(x) = \left(\frac{39e^{\frac{\pi}{2}} - 14}{17e^{\frac{5\pi}{2}} - 17} \right) e^{4x} + \left(\frac{14}{17} - \frac{39e^{\frac{\pi}{2}} - 14}{17e^{\frac{5\pi}{2}} - 17} \right) e^{-x} - \frac{5}{17} \sin(x) + \frac{3}{17} \cos(x). \quad (4.4)$$

O exemplo a seguir tem por finalidade resolver o Exemplo 1 utilizando a metodologia numérica MDF.

Exemplo 2. Para este exemplo, considere o PVC do Exemplo 1, onde serão utilizadas as discretizações apresentadas nas equações (3.8) e (3.9). Desta forma, obtemos:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 3\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 4y_i = 2\sin(x_i), \quad (4.5)$$

de forma equivalente temos:

$$(2 + 3h)y_{i-1} + (-8h^2 - 4)y_i + (2 - 3h)y_{i+1} = 4h^2 \sin(x_i). \quad (4.6)$$

Considerando $i = 0, 1, \dots, n$, na equação (4.6), obtemos o sistema linear tridiagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+3h & -8h^2-4 & 2-3h & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3h & -8h^2-4 & 2-3h & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+3h & -8h^2-4 & 2-3h & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+3h & -8h^2-4 & 2-3h & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4h^2 \sin(x_1) \\ 4h^2 \sin(x_2) \\ 4h^2 \sin(x_3) \\ \vdots \\ 4h^2 \sin(x_{n-1}) \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Observa-se que todos os sistemas lineares obtidos, foram resolvidos com utilização do software Octave utilizando o método LU esparsa. Essa abordagem preserva a estrutura esparsa, reduzindo custos computacionais e uso de memória. É usado para resolver sistemas lineares grandes e esparsos, como os gerados em métodos numéricos para EDOs. Destaca-se ainda que, software *Octave* possui suporte para trabalhar com matrizes esparsas, incluindo a implementação do método de decomposição LU esparsa em sua biblioteca.

Tabelas comparativas entre a solução analítica e a solução numérica do PVC são apresentadas a seguir. Para a primeira análise, consideramos $n = 5$.

Tabela 1 – Solução numérica $\times$ solução analítica.

Solução numérica	Solução analítica	Diferença
1.0000	1.0000	0.0000
0.6185	0.6230	0.0045
0.3586	0.3823	0.0237
0.4230	0.4896	0.0666
2.0000	2.0000	0.0000

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Para uma segunda análise consideramos $n = 10$. Os resultados encontram-se apresentados na Tabela 2 a seguir:

Tabela 2 – Solução numérica $\times$ solução analítica.

Solução numérica	Solução analítica	Diferença
1.0000	1.0000	0.0000
0.8188	0.8190	0.0002
0.6587	0.6593	0.0006
0.5219	0.5235	0.0016
0.4154	0.4186	0.0032
0.3551	0.3607	0.0056
0.3739	0.3827	0.0088
0.5391	0.5512	0.0121
0.9881	1.0004	0.0123
2.0000	2.0000	0.0000

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Por fim, na última análise apresentada na Tabela 3, aumentamos o número de pontos para $n = 20$.

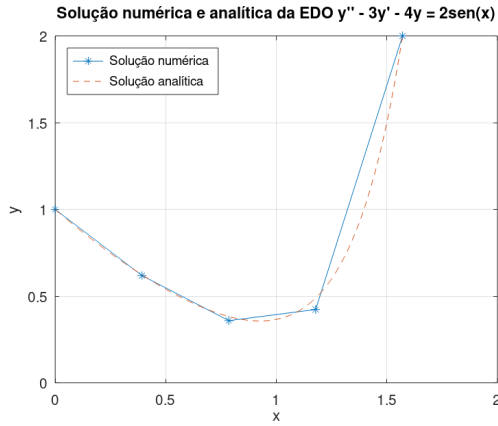
Tabela 3 – Solução numérica $\times$ solução analítica.

Solução numérica	Solução analítica	Diferença
1.0000	1.0000	0.0000
0.9116	0.9116	0.0000
0.8280	0.8280	0.0000
0.7490	0.7491	0.0001
0.6750	0.6751	0.0001
0.6061	0.6063	0.0002
0.5428	0.5431	0.0003
0.4860	0.4865	0.0005
0.4369	0.4375	0.0006
0.3970	0.3979	0.0009
0.3689	0.3699	0.0010
0.3557	0.3571	0.0014
0.3623	0.3640	0.0017
0.3951	0.3971	0.0020
0.4632	0.4656	0.0024
0.5793	0.5820	0.0027
0.7612	0.7640	0.0028
1.0335	1.0361	0.0026
1.4304	1.4323	0.0019
2.0000	2.0000	0.0000

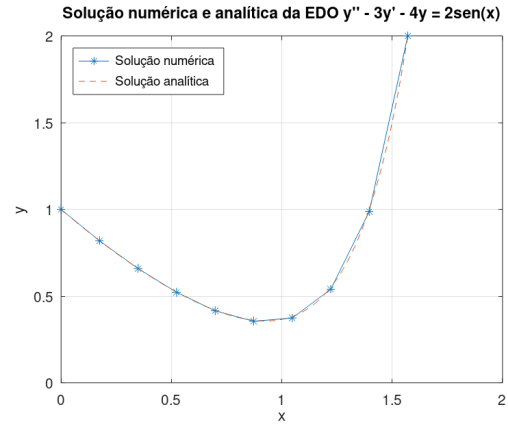
Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Nas Figuras 2(a), 2(b) e 2(c) são apresentados gráficos para comparação entre a solução numérica e analítica do problema de valor de contorno apresentado no Exemplo (1).

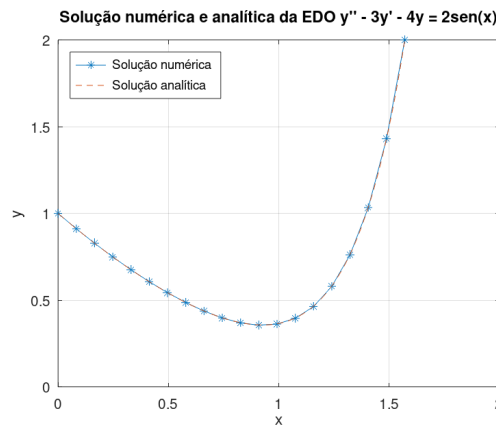
Figura 1 – Solução numérica × solução analítica



(a) Solução numérica e solução analítica (n=5).



(b) Solução numérica e solução analítica (n=10).



(c) Solução numérica e solução analítica (n=20).

Fonte: Elaborado pelo autor por meio do software *Octave*, 2025.

É interessante observar que em alguns casos, uma EDO de coeficientes variáveis pode ser transformada em uma EDO de coeficientes constantes, sob certas condições (veja [7]).

Teorema 4.0.1. ([7]) Sejam $p(t)$ e $q(t)$ funções contínuas em um intervalo aberto I e d uma constante. Se:

1. $q(t) > 0, \quad \forall t \in I;$
2. $\frac{q'(t) + 2 \cdot p(t) \cdot q(t)}{2 \cdot \sqrt{q(t)^3}} = d;$
3. $\frac{q(t)}{[f'(t)]^2} = 1.$

Então a substituição $x = \int \sqrt{q(t)} dt$, transforma a equação diferencial:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y = 0,$$

na equação diferencial, $y''(x) + d y'(x) + y(x) = 0$.

Exemplo 3. Considere a EDO $t^2 y''(x) + 3t y'(x) + y(x) = 0$ ([1]). Verificamos se as condições do Teorema 4.0.1 são adequadas a esta EDO:

$$\begin{aligned} t^2 y''(x) + 3t y'(x) + y(x) &= 0 \\ \frac{t^2}{t^2} y''(x) + \frac{3t}{t^2} y'(x) + \frac{1}{t^2} y(x) &= 0 \\ y''(x) + \frac{3}{t} y'(x) + \frac{1}{t^2} y(x) &= 0. \end{aligned}$$

$$1. q(t) > 0 \forall t \in I.$$

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{t^2} \\ \frac{1}{t^2} &> 0 \\ t^2 \frac{1}{t^2} &> 0 \cdot t^2 \\ 1 &> 0. \end{aligned}$$

Por trivialidade $q(t) > 0$.

$$2. \frac{q'(t) + 2p(t) \cdot q(t)}{2\sqrt{[q(t)]^3}} = d.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\frac{2}{t^3} + 2 \cdot \frac{3}{t} \cdot \frac{1}{t^2}}{2\sqrt{\left[\frac{1}{t^2}\right]^3}} \\ &= \frac{-\frac{2}{t^3} + \frac{6}{t^3}}{2\sqrt{\frac{1}{t^6}}} \\ &= \frac{\frac{4}{t^3}}{\frac{2}{t^3}} = 2. \end{aligned}$$

$$3. \frac{q(t)}{[f'(t)]^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} (f'(t))^2 &= \left(\sqrt{q(t)}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{t^2}}\right)^2 \\ \frac{q(t)}{[f'(t)]^2} &= \frac{\frac{1}{t^2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{t^2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} \\ &= \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^2}{1} = 1 \end{aligned}$$

Assim, nossa $y(x)$ pode ser reescrita como uma $y(x(t))$, onde $x = f(t) = \int \sqrt{q(t)} dt$.

$$f(t) = \int \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|)$$

Vamos reescrever a nosso Exemplo 3 como:

$$y''(\ln(|t|)) + \frac{3}{t}y'(\ln(|t|)) + \frac{1}{t^2}y(\ln(|t|)) = 0$$

Fazendo as devidas derivações teremos:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(\ln(|t|)), \\ y'(x) &= y'(\ln(|t|)) \cdot \frac{1}{t} = \frac{y'(\ln(|t|))}{t} \\ \text{e} \\ y''(x) &= y''(\ln(|t|)) \cdot \frac{1}{t^2} y'(\ln(|t|)) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{y''(\ln(|t|)) - y'(\ln(|t|))}{t^2} = \frac{y''(x) - y'(x)}{t^2}. \end{aligned}$$

Reescrevendo com as novas derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{y''(x) - y'(x)}{t^2} + \frac{3}{t} \cdot y'(x) \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}y(x) &= 0 \\ \frac{y''(x) - y'(x) + 3y'(x) + y(x)}{t^2} &= 0 \\ y''(x) - y'(x) + 3y'(x) + y(x) &= 0 \cdot t^2 \end{aligned}$$

então, de acordo com ([7]), essa equação pode ser reescrita como:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad (4.7)$$

cuja solução analítica é obtida a partir da solução da equação característica associada, que neste caso é $r^2 + 2r + 1 = 0$, que tem como raiz real dupla $r_1 = -1$, logo a solução geral se dá por $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. E, utilizando os valores de contorno $y(0) = 1$ e $y(1) = 3$ a solução do PVC se sucede:

$$1 = C_1 e^{-0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-0},$$

então $C_1 = 1$ e para o extremo $y(1) = 3$ temos:

$$\begin{aligned} 3 &= C_1 e^{-1} + C_2 \cdot (1) \cdot e^{-1} \\ 3 &= 1 \cdot e^{-1} + C_2 e^{-1} \\ 3 &= e^{-1} + C_2 e^{-1} \\ 3 &= e^{-1}(C_2 + 1) \\ \frac{3}{e^{-1}} &= C_2 + 1 \\ C_2 &= 3e - 1. \end{aligned}$$

A solução do Problema de Valor de Contorno (PVC) é, portanto:

$$y(x) = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}. \quad (4.8)$$

Com intuito de apresentar uma solução numérica para essa EDO, consideramos o problema de valor de contorno apresentado em 4 . Ao discretizar (4.7) e organizar os termos semelhantes obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2 \left(\frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{2h} \right) + y_i &= 0 \\ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} + y_{i-1}}{h} \cdot \frac{h}{h} + y_i \cdot \frac{h^2}{h^2} &= 0 \\ y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + y_{i+1}h - y_{i-1}h + y_i h^2 &= 0 \\ y_{i-1}(1 - h) + y_i(-2 + h^2) + y_{i+1}(1 + h) &= 0. \end{aligned}$$

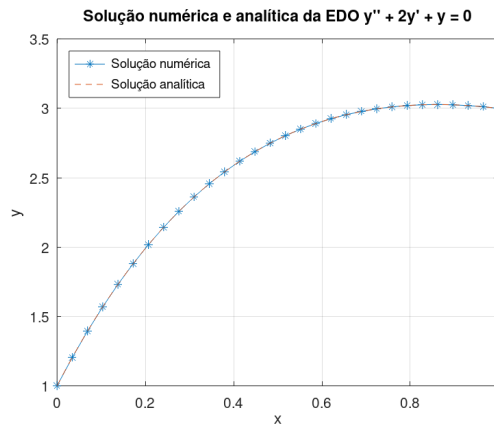
Gerando assim o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1-h & -2+h^2 & 1+h & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1-h & -2+h^2 & 1+h & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1-h & -2+h^2 & 1+h & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1-h & -2+h^2 & 1+h & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Conforme já mencionado, os sistemas lineares foram resolvidos no software *Octave* utilizando o método LU esparsa, preservando a estrutura esparsa e reduzindo custos computacionais. O *Octave* oferece suporte nativo à matrizes esparsas, incluindo a decomposição LU eficiente em sua biblioteca.

A Figura 2 apresenta um gráfico comparativo entre a solução numérica e a solução analítica do PVC do Exemplo (3), ao considerar uma discretização com $n = 30$.

Figura 2 – Solução numérica e solução analítica do PVC proposto no Exemplo 3.



Fonte: Elaborado pelo autor por meio do software *Octave*, 2025.

Exemplo 4. Para analisar a distribuição de temperatura em um domínio retangular, utilizamos a equação (3.19) em diferentes configurações de malha. Consideramos, inicialmente, as malhas

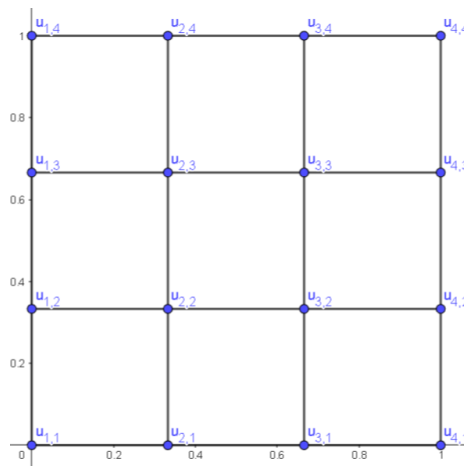
$4_x \times 4_y$ (Figura 3) e $50_x \times 50_y$, aplicando as condições de contorno especificadas na Tabela 4. Além disso, avaliamos as malhas $5_x \times 5_y$ e $100_x \times 100_y$, adotando as condições de contorno descritas na Tabela 5, respectivamente.

Tabela 4 – Distribuição de temperatura no contorno.

Valores	Temperatura
$u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}$	50°C
$u_{4,1}, u_{4,2}, u_{4,3}$	40°C
$u_{4,4}, u_{3,4}, u_{2,4}$	60°C
$u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}$	55°C

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Figura 3 – Domínio retangular 4×4

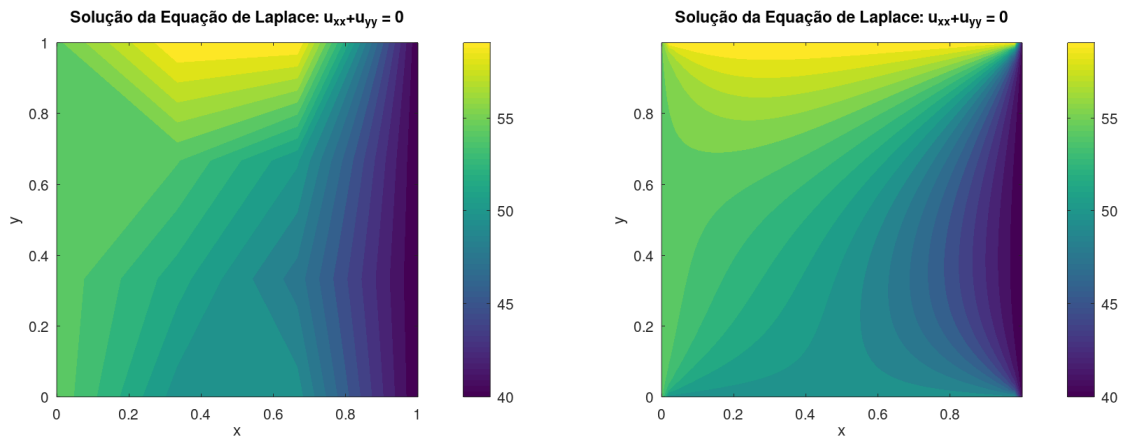


Fonte: Elaborado pelo autor por meio do software Geogebra, 2025.

Gerando a matriz penta-diagonal, cujos termos correspondem aos coeficientes da equação (3.19), ao se fixarem as posições (i, j) , como na Figura 3:

Figura 5(a) abaixo é referente à malha estruturada 4×4 retangular de proporção 1 : 1, onde seus valores de contorno são: 50°C na parte inferior, 60°C na parte superior, 55°C no lado esquerdo e 40°C no lado direito. Tendo sua convergência alcançada em 15 iterações em um tempo de 1.35964 segundos. Já figura 5(b) tem os mesmos valores de contorno e proporção, porém sua malha construída se trata de uma 50×50 , convergência alcançada em 3099 iterações no tempo de 113.176 segundos.

Figura 4 – Solução numérica do problema de distribuição de temperatura da Tabela 4, proposto no Exemplo 4, para diferentes malhas ($n_x \times n_y$).



(a) Malha computacional estruturada com 4×4 pontos. (b) Malha computacional estruturada com 50×50 pontos.

Fonte: Elaborado pelo autor por meio do software *Octave*, 2025.

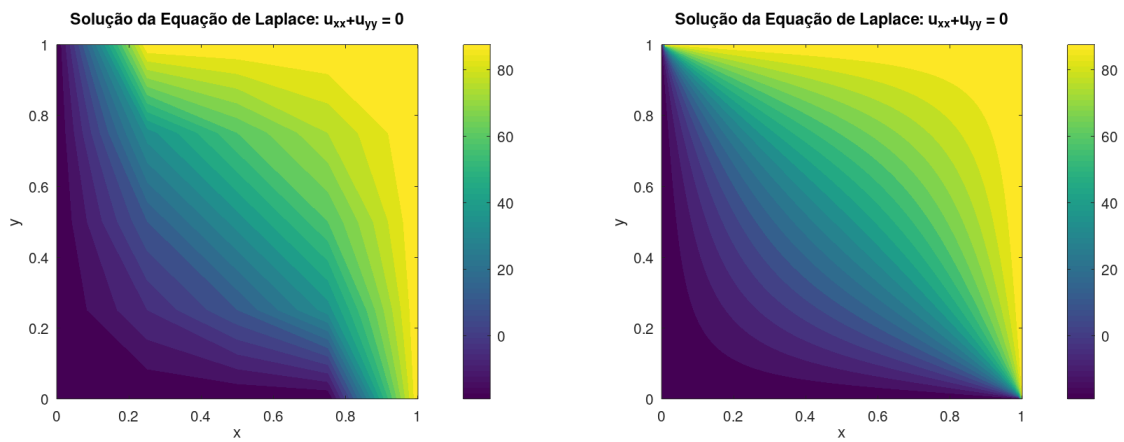
Tabela 5 – Distribuição de temperatura no contorno.

Valores	Temperatura
$u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, u_{4,1}$	-19°C
$u_{1,2}, u_{1,3}, u_{1,4}, u_{1,5}$	-19°C
$u_{5,1}, u_{5,2}, u_{5,3}, u_{5,4}$	93°C
$u_{2,5}, u_{3,5}, u_{4,5}, u_{5,5}$	93°C

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

Figura 6(a) abaixo é referente à malha estruturada 5×5 retangular de proporção 1 : 1, onde seus valores de contorno são: -19°C na parte inferior e lado esquerdo e 93°C na parte superior e lado direito. Tendo sua convergência alcançada em 27 iterações em um tempo de 0.501745 segundos. Já a Figura 6(b) tem os mesmos valores de contorno e proporção, porém sua malha construída se trata de uma 100×100 , convergência alcançada no tempo de 747.253 segundos.

Figura 5 – Solução numérica do problema de distribuição de temperatura da Tabela 5, proposto no Exemplo 4, para diferentes malhas ($n_x \times n_y$).



(a) Malha computacional estruturada com 5×5 pontos. (b) Malha computacional estruturada com 100×100 pontos.

Fonte: Elaborado pelo autor por meio do software Octave, 2025.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos soluções numéricas para equações diferenciais por meio do Método das Diferenças Finitas (MDF), utilizando o software livre GNU *Octave*. Foram desenvolvidos dois códigos numéricos: um voltado para a resolução de problemas de valor de contorno em equações diferenciais ordinárias e outro para problemas governados por equações diferenciais parciais. Em particular, foi abordada a Equação de Laplace, fundamental para a modelação de fenômenos físicos em estado estacionário, como a distribuição de temperatura no contexto da equação do calor. O MDF foi escolhido por sua eficiência e simplicidade, permitindo cálculos manuais e aplicações em larga escala com suporte computacional acessível. A escolha do *Octave*, por ser um software livre e gratuito, reforça a proposta de acessibilidade e praticidade deste trabalho.

Apresentamos exemplos numéricos que permitem visualizar graficamente as soluções analíticas e numéricas com intuito de evidenciar a eficácia do MDF na utilização em problemas que não são possíveis a obtenção de solução analítica. Exploramos um resultado que permite transformar PVC de coeficientes variáveis em um PVC de coeficientes constantes sob certas condições. Deste modo, o seguimento se deu de forma natural para uma abordagem bidimensional das equações diferenciais, pois possui casos de grande relevância em diversas áreas da ciência, engenharia e modelagem matemática. Abordamos como o método das diferenças finitas é adaptado para domínios bidimensionais e as estratégias para lidar com diferentes tipos de condições de contorno em problemas bidimensionais. Também exibimos exemplos práticos de solução de problemas típicos utilizando o método das diferenças finitas em duas dimensões. Concluimos, portanto, que a abordagem computacional se faz mais presente e necessária na vida do estudante de matemática e também essencial para expandir a aplicabilidade das técnicas numéricas discutidas até agora.

6 APÊNDICE

```

1  clear all; close all; clc;
2
3  % Construção da malha
4  a = 0;
5  b = pi/2;
6  N = 20;
7  h = (b-a)/(N-1);
8  x = linspace(a, b, N);
9
10 % Construção do problema discreto
11 % Solução da EDO  $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$ 
12
13 A = zeros(N, N);
14 b = zeros(N, 1);
15
16 % Condições de contorno
17 A(1,1) = 1;
18 b(1) = 1; %  $y(0) = 1$ 
19
20 % Construção do sistema linear
21 for i = 2:N-1
22     A(i, i-1) = 2 + 3*h;
23     A(i, i) = -8*h^2 - 4;
24     A(i, i+1) = 2 - 3*h;
25     b(i) = 4*h^2 * sin(x(i));
26 end
27
28 % Condição de contorno no ponto final
29 A(N, N) = 1;
30 b(N) = 2; %  $y(\pi/2) = 2$ 
31
32 % Resolução do sistema linear
33 solucao = A \ b;
34 y = solucao;
35 t = 0:.01:pi/2;
36
37 % Solução analítica
38 y_analytic = ((14/17 - (39*exp(pi/2) - 14) / (-17 + 17*exp(5*pi/2))) * exp(-t) +
39     ((39*exp(pi/2) - 14) / (-17 + 17*exp(5*pi/2))) * exp(4.*t) + (3/17)*cos(t) -
40     (5/17)*sin(t));
41
42 % Plotando a solução numérica e analítica
43 plot(x, y, '-*', t, y_analytic, '--');
44 legend('Solução numérica', 'Solução analítica', 'location', 'northwest');
45
46 grid on;
47 title("Solução numérica e analítica da EDO  $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$ ");
48 xlabel('x');
49 ylabel('y');

```

Listing 6.1 – Código Octave Resolução Numérica da EDO $y'' - 3y' - 4y = 2\sin(x)$

```

1  clear all; close all; clc;
2  % Parâmetros do problema
3  Lx = 1;           % Comprimento do domínio na direção x
4  Ly = 1;           % Comprimento do domínio na direção y
5  Nx = 50;          % Número de pontos na direção x
6  Ny = 50;          % Número de pontos na direção y
7  dx = Lx / (Nx - 1); % Tamanho da célula na direção x
8  dy = Ly / (Ny - 1); % Tamanho da célula na direção y
9
10 % Criar a malha
11 x = 0:dx:Lx;
12 y = 0:dy:Ly;
13 [X, Y] = meshgrid(x, y);
14
15 % Inicializar a matriz de solução
16 phi = zeros(Nx, Ny);
17
18 % Condições de contorno
19 phi(:, 1) = 50; % Condição de contorno na borda inferior (y = 0)
20 phi(:, end) = 60; % Condição de contorno na borda superior (y = Ly)
21 phi(1, :) = 55; % Condição de contorno na borda esquerda (x = 0)
22 phi(end, :) = 40; % Condição de contorno na borda direita (x = Lx)
23
24 % Iterar até a convergência
25 tolerance = 1e-6; % Critério de convergência
26 maxIter = 5000; % Número máximo de iterações
27 for iter = 1:maxIter
28     phi_old = phi;
29
30 % Atualizar a matriz phi usando a fórmula das diferenças finitas
31     for i = 2:Nx-1
32         for j = 2:Ny-1
33             phi(i, j) = 0.25 * (phi(i+1, j) + phi(i-1, j) + phi(i, j+1) + phi(i, j
34                 -1));
35         end
36     end
37
38 % Verificar a convergência
39     error = max(max(abs(phi - phi_old)));
40     if error < tolerance
41         fprintf('Convergência alcançada em %d iterações.\n', iter);
42         break;
43     end
44
45 % Plotar o resultado
46 figure;
47 contourf(X, Y, phi', 20, 'LineColor', 'none');
48 % 'phi'' para transpor a matriz
49 colorbar;
50 title('Solução da Equação de Laplace: u_{xx}+u_{yy} = 0');
51 xlabel('x');
52 ylabel('y');

```

Listing 6.2 – Código Octave Resolução Numérica da Equação de Laplace $\Delta u(x, y) = 0$

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; tradução de Valéria de Magalhães Iorio. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª edição - Rio de Janeiro: LTC, 2006. p. 91, 97.
- [2] CUNHA, M. C. C. **Métodos numéricos**. 2ª edição rev. e ampliada 2000 - Campinas - SP, Editora Unicamp, 2000.
- [3] Davis, T. A. **Direct Methods for Sparse Linear Systems**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2006.
doi:10.1137/1.9780898718881.
- [4] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 5ª edição, IMPA, 2018.
- [5] **GNU Octave**, 2024. Disponível em: <https://octave.org>. Acesso em: 30 de outubro de 2024.
- [6] ÍÓRIO, V. A Equação de Calor. In: ÍÓRIO, V. **EDP, um curso de graduação**. 4ª edição, IMPA, 2018. p. 196-218.
- [7] PEREIRA, G. J.; BORGES, L. T. M. Transformação da Equação de Euler em uma Equação Diferencial com Coeficientes Constantes. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 4, 2022. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/47>. Acesso em: 31 out. 2024.

Vinicius Timoteo Borges
Matrícula (2020214696)

Fernando Soares de Carvalho
Siape (1578517)