UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR - ARRAIAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANA BEATRIZ RODRIGUES MARINHO

CÍRCULOS ASSOCIADOS A POLÍGONOS

Arraias, TO
2025

Ana Beatriz Rodrigues Marinho

Círculos Associados a Polígonos

Monografia apresentada à Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor - Arraias, para obtenção do título de licenciada em matemática.

Orientador: Ivo Pereira da Silva

Arraias, TO
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M338c Marinho, Ana Beatriz Rodrigues.
Círculos Associados a Polígonos. / Ana Beatriz Rodrigues Marinho. – Arraias, TO, 2025.
68 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2025.

Orientador: Ivo Pereira da Silva

Coorientadora : Karla Carolina Vicente de Sousa

1. Geometria Euclidiana. 2. Polígonos. 3. Círculos. 4. Construção geométrica. I. Título

CDD 510

ANA BEATRIZ RODRIGUES MARINHO

Círculos associados a polígonos

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática, foi avaliado para a obtenção do título de Licenciado em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientador, coorientadora e pela Banca Examinadora.

Data de aprovação: 24/02/2025

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
IVO PEREIRA DA SILVA
Data: 05/06/2025 14:22:56-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.. Dr. Ivo Pereira da Silva (UFT)
Orientador

Documento assinado digitalmente
gov.br
KARLA CAROLINA VICENTE DE SOUSA
Data: 26/02/2025 08:21:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Karla Carolina Vicente de Sousa, (UFSCar)
Coorientadora

Documento assinado digitalmente
gov.br
FERNANDO SOARES DE CARVALHO
Data: 06/06/2025 07:41:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Fernando Soares de Carvalho (UFT)
Examinador 1

Documento assinado digitalmente
gov.br
RENATA ALVES DA SILVA
Data: 20/06/2025 14:18:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profª. Dra. Renata Alves da Silva (UFNT)

Examinadora 2

Dedico este trabalho a todos os que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste sonho. À minha família, pelo amor incondicional, apoio constante e por acreditarem em mim mesmo nos momentos mais difíceis. Vocês são a base de tudo.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não seria possível sem a ajuda e o apoio de muitas pessoas. Gostaria de expressar minha gratidão a todos que contribuíram de alguma forma para a realização do meu trabalho de conclusão de curso.

Primeiramente, agradeço a Deus, por me fornecer saúde, força e perseverança ao longo deste percurso.

Aos meus pais, Maria das Merces Rodrigues Neres e Valdir Bailon Ferreira dos Santos, pelo amor incondicional, apoio e compreensão em todos os momentos, sem vocês, não teria sido possível superar todo esse processo e alcançar o sucesso.

As minhas irmãs, Bárbara Rodrigues dos Santos e Giovanna Rodrigues dos Santos, por estarem sempre ao meu lado, oferecendo palavras de incentivo e apoio inestimável. Aos meus avós, Raimunda Rodrigues e Felix Rodrigues, por sempre estarem ao meu lado, me apoiando e torcendo pelo meu sucesso. Todo o meu esforço e dedicação são reflexos do carinho e incentivo de vocês.

A todos os familiares, especialmente à minha tia, Rosirene Rodrigues, e ao meu primo, Silas Rodrigues, agradeço por toda a ajuda, apoio e incentivo ao longo desta jornada. Vocês foram fundamentais para que eu pudesse alcançar este objetivo.

Aos meus amigos, Alana, Cleidiane, Denize, Elismar, Jaqueline, Marta, Rafael, Ricardo e Victor, pelo companheirismo e por tornarem os momentos de dificuldade mais leves e os momentos de alegria mais intensos. Em especial, agradeço ao Mateus Torres por todo o suporte emocional e pelas conversas que me ajudaram a manter a sanidade durante este período. Sua presença e apoio foram essenciais para enfrentar os desafios e seguir em frente com determinação. Vocês foram essenciais para que essa jornada fosse trilhada de maneira alegre e emocionante, vocês fazem parte desse sonho.

Ao meu orientador, Dr. Ivo Pereira da Silva, pelo companheirismo durante esse processo. A Professora, Dra. Karla Carolina Vicente de Sousa, pela paciência, orientação e por compartilhar seu conhecimento e experiência. Aos professores e funcionários da Universidade Federal do Tocantins do Campus Arraias, pelo suporte e ensinamentos ao longo dos anos. Cada um de vocês contribuiu para minha formação acadêmica e pessoal.

E, finalmente, a todos que,de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho. Agradeço de coração a cada um de vocês.

Meu muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho investiga as relações entre círculos e polígonos na Geometria Euclidiana Plana, buscando responder à seguinte questão: de que forma círculos e polígonos podem ser relacionados e quais condições garantem a existência de círculos inscritos e circunscritos em um polígono? Para isso, adotamos uma abordagem exploratória e construtiva, combinando revisão bibliográfica, construções geométricas com régua e compasso e o uso de softwares de geometria dinâmica. Inicialmente, analisamos as propriedades dos polígonos regulares e sua relação com círculos inscritos e circunscritos. Em seguida, expandimos esse estudo para polígonos não regulares, identificando condições necessárias e suficientes para que admitam tais círculos. Além disso, exploramos a construção de polígonos regulares a partir de um círculo, destacando os casos em que a divisão exata é possível. Como resultado, apresentamos um material didático que pode ser utilizado no ensino da Geometria Plana, contribuindo para a aprendizagem por meio da resolução de problemas e do uso de tecnologias educacionais.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Polígonos. Círculos. Construção geométrica. Ensino de Geometria.

ABSTRACT

This study investigates the relationships between circles and polygons in Euclidean Plane Geometry, aiming to answer the following question: How can circles and polygons be related, and what conditions ensure the existence of inscribed and circumscribed circles in a polygon? To address this, we adopt an exploratory and constructive approach, combining bibliographic review, geometric constructions with ruler and compass, and the use of dynamic geometry software. Initially, we analyze the properties of regular polygons and their relationship with inscribed and circumscribed circles. Then, we extend this study to non-regular polygons, identifying the necessary and sufficient conditions for them to admit such circles. Additionally, we explore the construction of regular polygons from a circle, highlighting cases where exact division is possible. As a result, we present a didactic resource that can be used in teaching Plane Geometry, contributing to learning through problem-solving and educational technology.

Key-words: Euclidean Geometry. Polygons. Circles. Geometric Construction. Geometry Teaching.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, investigamos as relações entre duas das mais importantes estruturas da Geometria Euclidiana Plana: círculos e polígonos. Individualmente, esses objetos possuem teorias bem estabelecidas e diversas propriedades interessantes, mas como eles se relacionam? É sempre possível conectar círculos e polígonos? E, caso seja, de que maneira essa relação ocorre? Buscaremos responder a essas questões por meio de uma pesquisa exploratória, baseada na revisão bibliográfica e na construção geométrica.

Sabemos que um polígono é regular quando todos os seus lados e ângulos internos são congruentes e que tais polígonos admitem um único círculo inscrito e um único círculo circunscrito. Um círculo está inscrito em um polígono quando tangencia todos os seus lados, enquanto um círculo circunscrito passa por todos os vértices do polígono. No entanto, mostraremos que essa não é uma propriedade exclusiva dos polígonos regulares; polígonos não regulares também podem admitir um círculo inscrito e um círculo circunscrito, desde que atendam a determinadas condições.

Outra relação fundamental entre círculos e polígonos é a possibilidade de construir polígonos regulares a partir de um círculo. Isso ocorre ao dividir o círculo em partes iguais, mas essa construção exata nem sempre é viável. Usando régua e compasso, é possível dividir um círculo em n partes iguais para certos valores de n; entretanto, conforme veremos, há valores de n para os quais essa construção não pode ser realizada de maneira exata, sendo necessário recorrer a aproximações.

O desenho geométrico desempenha um papel essencial na Geometria Plana e será utilizado neste trabalho para ilustrar a divisão do círculo em partes iguais. Além disso, seguindo as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), empregaremos softwares de geometria dinâmica, possibilitando a reprodução das construções geométricas por professores e estudantes de forma interativa e precisa.

Ao longo deste estudo, buscamos não apenas aprofundar as relações entre círculos e polígonos, mas também explorar abordagens construtivas e investigativas na resolução de problemas geométricos. Para isso, realizamos construções de polígonos regulares com régua e compasso e por meio de softwares de geometria dinâmica, analisamos as condições necessárias e suficientes para que um polígono seja inscritível ou circunscritível e utilizamos a metodologia de resolução de problemas como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Plana. Dessa forma, acreditamos que este trabalho pode servir como um recurso didático valioso, fornecendo suporte tanto para educadores quanto para estudantes que desejam aprimorar sua compreensão da geometria.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. No Capítulo 1, são apresentados o tema, os objetivos e a metodologia adotada. O Capítulo 2 aborda a relação entre Geometria, História e Currículo, destacando a importância do ensino geométrico ao longo do tempo. No Capítulo 3, é explorado o software GeoGebra, suas funcionalidades e layout. O Capítulo 4 trata dos conceitos de polígonos inscritíveis e circunscritíveis, analisando suas propriedades matemáticas. No

Capítulo 5, são discutidas técnicas e abordagens para a construção de polígonos regulares, com suporte de ferramentas tecnológicas. No Capítulo 6, são apresentadas as considerações finais, destacando as principais conclusões do trabalho e possíveis perspectivas futuras. Por fim, este trabalho conta com um apêndice, onde são apresentados resultados complementares fundamentais para uma leitura didática e voltada ao público alvo deste trabalho.

2 GEOMETRIA, HISTÓRIA E CURRÍCULO

A geometria é uma das ciências mais antigas e essenciais para a vida cotidiana, desempenhando um papel fundamental na evolução humana. Sua influência abrange diversas áreas do conhecimento, como a engenharia, e está presente em inúmeras teorias e práticas modernas. O estudo da história da geometria é essencial para compreendermos o desenvolvimento das teorias matemáticas ao longo do tempo, permitindo uma reflexão sobre as civilizações antigas e suas contribuições. Entre os povos que impulsionaram esse avanço, destacam-se os egípcios, que, por volta de 2000 a.C., já aplicavam conceitos geométricos na medição de terras e na construção de edificações.

Segundo Eves (1990), a sistematização da geometria como um corpo formal de conhecimento teve início com Euclides, por meio de sua obra Os Elementos, uma coletânea de treze livros que reúne o conhecimento geométrico da época. Nessa obra, Euclides estabelece a geometria euclidiana com base em axiomas e teoremas, criando um marco na história da matemática e influenciando, posteriormente, o desenvolvimento da geometria não euclidiana (Eves, 1990, pp. 134-157).

Entre os instrumentos fundamentais da geometria, destacam-se a régua e o compasso, conhecidos como instrumentos euclidianos. Compreender seu uso e suas aplicações é essencial para o estudo da geometria. Segundo Eves, a régua permite traçar uma reta de comprimento indefinido que passa por dois pontos distintos, enquanto o compasso possibilita desenhar uma circunferência com centro em um ponto dado e raio determinado por um segundo ponto.

O compasso utilizado por Euclides diferia dos modelos modernos, pois sua abertura não se mantinha fixa ao ser levantado, desmontando-se ao perder o contato com o traçado. Embora o compasso moderno pareça mais prático à primeira vista, ele é essencialmente equivalente ao compasso euclidiano, uma vez que ambos permitem traçar circunferências com qualquer raio desejado. Essa equivalência é um conceito central na geometria clássica e possui implicações significativas, especialmente no estudo de problemas geométricos nos quais o compasso desempenha um papel fundamental.

A abordagem da geometria no ensino básico não apenas respeita a tradição matemática consolidada ao longo da história, mas também valoriza sua aplicação prática e sua relevância para a formação do pensamento lógico. A progressão do ensino geométrico, desde as noções intuitivas até a sistematização formal, reflete a própria evolução da geometria como campo do conhecimento. Assim como os antigos matemáticos utilizaram instrumentos como a régua e o compasso para construir conceitos fundamentais, a BNCC (2018) destaca a importância de explorar representações espaciais e relações geométricas desde os primeiros anos escolares, preparando os alunos para desafios mais complexos nos níveis seguintes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes normativas para as aprendizagens essenciais que todos os alunos devem adquirir ao longo da Ensino Básico. Neste trabalho, analisamos como a geometria é abordada em diferentes fases desse processo, com ênfase em sua importância nos ensinos fundamental e médio.

Segundo a BNCC, a geometria abrange um amplo conjunto de conceitos e procedimentos essenciais para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, permitindo conexões com situações do cotidiano. No ensino fundamental, especialmente nos anos iniciais, espera-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de estabelecer relações espaciais, identificar pontos de referência e compreender a localização e o deslocamento de objetos. Além disso, essa etapa enfatiza o reconhecimento e a manipulação de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais, incentivando a exploração de suas planificações.

Como destaca a BNCC: "a Geometria não pode ficar reduzida à mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume, nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou ao teorema de Pitágoras"(BRASIL, 2018, p. 272).

No ensino fundamental, a unidade temática de geometria nos anos iniciais é estruturada para refletir as vivências das crianças em seu meio, utilizando suas experiências como base para a sistematização das noções geométricas. Nesse processo, as explicações devem ser claras, mas é igualmente essencial estimular os alunos a estabelecerem conexões entre suas percepções geométricas e o cotidiano. Para isso, o uso de materiais didáticos, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é altamente recomendado. Esses recursos ampliam as possibilidades de aprendizado e podem tornar a experiência do aluno mais significativa.

Entre os principais objetos de conhecimento abordados nos anos iniciais, na unidade temática de geometria, destacam-se: a localização de objetos e pessoas no espaço, utilizando pontos de referência e vocabulário adequado; o reconhecimento de figuras geométricas espaciais, como cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera, com a identificação de suas características; e o reconhecimento de figuras geométricas planas, como círculo, quadrado, retângulo, triângulo, trapézio e paralelogramo, incluindo a análise de suas propriedades. Além disso, trabalha-se o conceito de congruência entre figuras geométricas planas.

Os conceitos e aplicações discutidos neste trabalho podem ser amplamente utilizados para apoiar a aprendizagem tanto nos anos iniciais quanto nos anos finais do ensino fundamental, uma vez que estão alinhados às diretrizes da BNCC. Dessa forma, acreditamos que nossa abordagem contribui para o ensino da geometria, não apenas dentro da sala de aula, mas também como um recurso valioso para educadores, auxiliando-os em suas práticas pedagógicas.

3 O SOFTWARE GEOGEBRA

Durante anos, a régua e o compasso foram os principais instrumentos utilizados para construções geométricas. Atualmente, softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, têm ganhado cada vez mais espaço no ensino e na aprendizagem da Geometria, permitindo explorações interativas e facilitando a visualização de conceitos matemáticos de forma dinâmica e precisa. Esse trabalho tem como base o software GeoGebra e, por isso, vamos descrever e apresentar seus principais recursos geométricos.

O GeoGebra é uma plataforma digital que permite explorar conceitos matemáticos de maneira interativa, integrando áreas como geometria, álgebra e cálculo. Sua versão online, disponível em `https://www.geogebra.org/`, se destaca por ser acessível e facilitar tanto o ensino quanto a aprendizagem de tópicos geométricos.

A utilização desse software foi essencial para a realização deste estudo, pois permite a construção geométrica de forma didática e flexível. Seu uso facilita a visualização de conceitos matemáticos, tornando a compreensão mais acessível por meio de animações e representações gráficas precisas. Diferentemente das construções manuais com régua e compasso, que também são eficientes, o software possibilita traços e construções com maior exatidão, reduzindo erros e permitindo uma exploração mais aprofundada das propriedades geométricas. Além disso, a tecnologia auxilia na detecção e correção de imprecisões, tornando o processo mais eficiente e interativo.

O leitor pode seguir os passos a seguir para acessar o GeoGebra e realizar todas as construções feitas no trabalho:

1. Acesse o site `https://www.geogebra.org/`;
2. Clique em “Calculadoras” e selecione a calculadora “Geometria”.

O layout do software a partir do passo supracitado será detalhado a seguir.

3.1 Layout do GeoGebra

Nesta seção, explicamos a interface do GeoGebra, destacando apenas as ferramentas que foram utilizadas no trabalho.

3.1.1 Áreas da Interface

O layout inicial do GeoGebra conta com a seguinte interface:

- Álgebra: Exibe as expressões algébricas associadas às construções realizadas.
- Ferramentas: Apresenta as ferramentas de desenho e construção.
- Área de Desenho: Espaço principal onde as construções geométricas são realizadas.

- Painéis Auxiliares: Podem incluir a lista de objetos, configurações e histórico das construções.

A Figura 1 exibe o layout inicial do GeoGebra Geometria.

Exploraremos mais adiante as seções e itens do menu “Ferramentas”.

Figura 1 – Layout inicial GeoGebra Geometria online

Fonte: Captura de tela do site `https://www.geogebra.org/geometry`

O menu Ferramentas está localizado na lateral esquerda da tela, essa área apresenta as ferramentas de desenho e construção, nesse painel lateral, é possível visualizar as seções e os ícones utilizados. As seções estão especificadas a seguir e os principais itens foram destacados:

- Ferramentas Básicas
  - Ícone “Mover”: Usado para arrastar ou mover objetos selecionados. Como Usar: Selecione o ícone “Mover” e clique no objeto que você deseja arrastar.
  - Ícone “Ponto”: Permite criar pontos no espaço de desenho. Como Usar: Selecione o ícone “Ponto” na barra de ferramentas e clique na área de desenho.
- Editar
- Construções
  - Ícone “Reta Perpendicular”: Permite criar uma reta perpendicular a outra dada. Como usar: Selecione o ícone "Reta Perpendicular", clique em um ponto, e em seguida na reta à qual deseja criar a perpendicular.
  - Ícone “Mediatriz”: Permite criar a mediatriz do segmento, assim mostrando a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular a ele. Como usar: selecione o ícone "Mediatriz", selecione dois pontos, ou o próprio segmento.

  - Ícone “Reta Paralela”: Permite criar uma reta paralela, a uma outra existente, passando por um ponto específico. Como usar: selecione o ícone "Reta Paralela", clique no ponto por onde a reta paralela irá passar, logo após, clique na reta desejada para construir a paralela.
  - Ícone “Bissetriz”: Permite criar a bissetriz de um ângulo, assim possibilitando a divisão em duas partes iguais. Como usar: selecione o ícone "Bissetriz", selecione dois pontos e uma reta, ou os três pontos que caracterizam o ângulo (vértice e suas extremidades).
  - Ícone “Reta Tangente”: Permite criar uma reta tangente a uma circunferência, ou seja, quando há apenas um ponto de interseção entre a reta e a circunferência desejada. Como usar: Selecione o ícone "Reta Tangente", clique primeiro no ponto, e em seguida na circunferência.

- Medições
  - Ícone “Ângulo”: Permite realizar medições e construir ângulos entre segmentos, retas ou até mesmo definir ângulos específicos dentro de uma figura geométrica. Como usar: Selecione o ícone Ângulo, clique em três pontos: primeiro no vértice e depois nos outros dois pontos que definem o ângulo. O GeoGebra exibirá o valor do ângulo medido.
  - Ícone “Distância ou comprimento”: Permite medir distâncias entre dois pontos, comprimentos de segmentos e perímetros de figuras geométricas. Como usar: Selecione o ícone Distância ou Comprimento, clique em dois pontos para medir a distância entre eles, clique sobre um segmento, polígono ou circunferência para exibir seu comprimento ou perímetro.

- Pontos
  - Ícone “Ponto”: Permite criar pontos no espaço de desenho. Como Usar: Selecione o ícone “Ponto” na barra de ferramentas e clique na área de desenho.
  - Ícone “Interseção de Dois Objetos”: Permite encontrar os pontos em que dois objetos geométricos distintos se cruzam. Esse recurso é muito útil na construção e análise de figuras geométricas, pois permite identificar e trabalhar diretamente com os pontos de interseção. Como usar: selecione o ícone Interseção de Dois Objetos, clique sobre os dois objetos que deseja analisar. O GeoGebra calcula automaticamente os pontos de interseção e os exibe na tela.

- Retas
  - Ícone “Segmento”: Permite criar um segmento de reta entre dois pontos. Como usar: Selecione o ícone "Segmento", e clique em dois pontos, ou duas posições.

  - Ícone “Reta”: Permite criar uma reta, que passa por dois pontos. Como usar: Selecione o ícone "Reta", clique em dois pontos, ou duas posições.
  - Ícone “Semirreta”: Permite criar uma semirreta com início em um ponto e que passa por outro. Como usar: selecione o ícone “Semirreta”, selecione o ponto de origem, logo em seguida escolha o outro ponto.

- Círculos
  - Ícone “Círculo (Centro e Ponto)”: Permite criar uma circunferência definindo seu centro e um ponto pertencente a ela. Como usar: Selecione a ferramenta, clique no plano para definir o centro e depois em outro ponto para determinar o raio.
  - Ícone “Compasso”: Cria circunferências com raio igual ao comprimento de um segmento existente. Como usar: Selecione a ferramenta, clique em um segmento (para copiar o raio) e depois no centro desejado.

- Polígonos
  - Ícone “Polígono”: Permite criar polígonos personalizados ponto a ponto. Como usar: Selecione a ferramenta e clique sequencialmente nos vértices desejados, finalizando com um clique no vértice inicial novamente.
  - Ícone “Polígono Regular”: Desenha polígonos regulares com número de lados definido pelo usuário. Como usar: Selecione a ferramenta, especifique o número de lados, clique para definir o centro e depois em um vértice.

- Cônicas
- Transformar
- Outras

Em resumo, a navegação no software é intuitiva, permitindo que o usuário ative as ferramentas com um clique e interaja facilmente com a área de desenho. Os menus de acesso rápido facilitam a criação de construções precisas.

4 POLÍGONOS INSCRITÍVEIS E CIRCUNSCRITÍVEIS

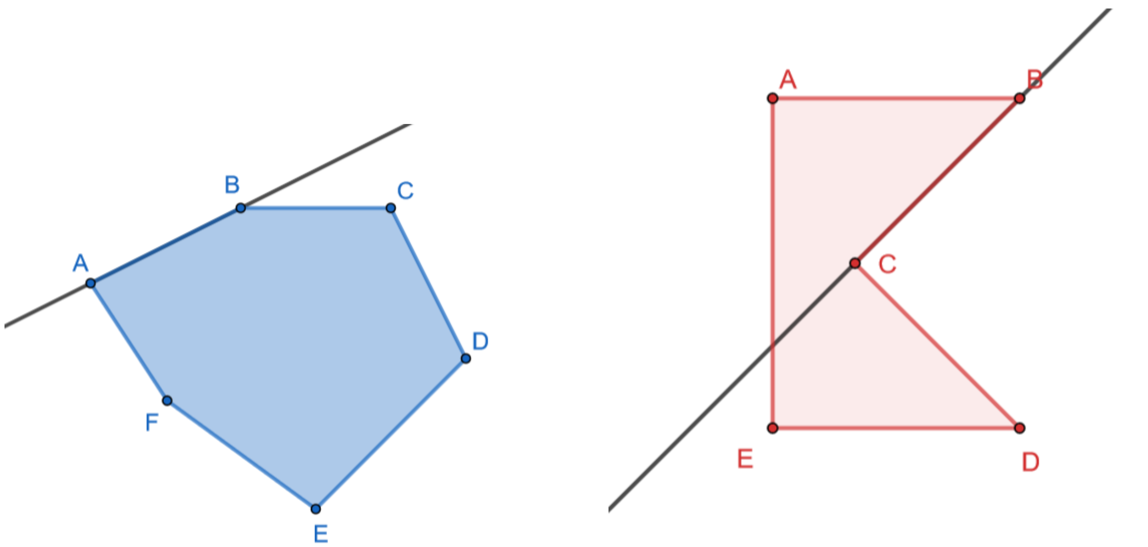
Neste capítulo vamos estabelecer condições para que um polígono admita um círculo passando por todos os seus vértices, isto é, que um polígono seja inscritível e também condições para que um polígono admita um círculo que tangencie todos os seus lados internamente, isto é, que o polígono seja circunscritível. Antes disso, necessitamos de algumas definições e resultados preliminares.

Muniz Neto (2022) define polígono convexo da seguinte forma

Definição 1. (MUNIZ NETO, 2022, p. 18 - Definição 1.11) Sejam $n \geq 3$ um número natural e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1A_2 \ldots A_n$ é um **polígono** (convexo) se, para $1 \leq i \leq n$, a reta A_iA_{i+1} não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina.

Na Figura 2, o polígono $ABCDEF$ é um exemplo de polígono convexo e $ABCDE$ é um exemplo de polígono não convexo.

Figura 2 – Polígonos convexo e não convexo



(a) O polígono $ABCDEF$ é convexo. (b) O polígono $ABCDE$ não é convexo.

Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

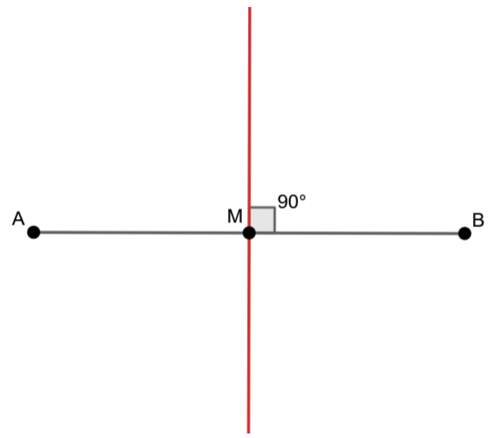
Assim, a estrutura mais simples de polígono convexo é o triângulo. Por ser o polígono mais simples, o triângulo possui diversas propriedades importantes como admitir uma circunferência inscrita e uma uma circunferência circunscrita nele.

Proposição 1. *(MUNIZ NETO, 2022, p.105 - Proposição 3.29) Todo triângulo admite um único círculo passando por seus vértices. Esse círculo é denominado círculo circunscrito ao triângulo e seu centro é o circuncentro dele.*

Vamos relembrar que a mediatriz de um segmento AB é a reta que passa pelo seu ponto médio e é perpendicular a ele. A mediatriz também pode ser vista como o lugar geométrico dos pontos que equidistas dos extremos de um intervalo. Sendo assim, um triângulo possui três mediatrizes. Essa mediatrizes se encontram em um ponto chamado circuncentro do triângulo, o qual chamaremos de O. O círculo circunscrito no triângulo ABC nada mais é do que aquele de centro em O e raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. A construção da mediatriz de um segmento pode ser feita utilizando o software GeoGebra da seguinte forma:

1. Abra o software GeoGebra;
2. Selecione a aba “Ferramentas”;
3. Na seção “Construções”, selecione o ícone “Mediatriz”;
4. Agora basta clicar no segmento que se deseja construir a mediatriz.

Figura 3 – Mediatriz do segmento AB

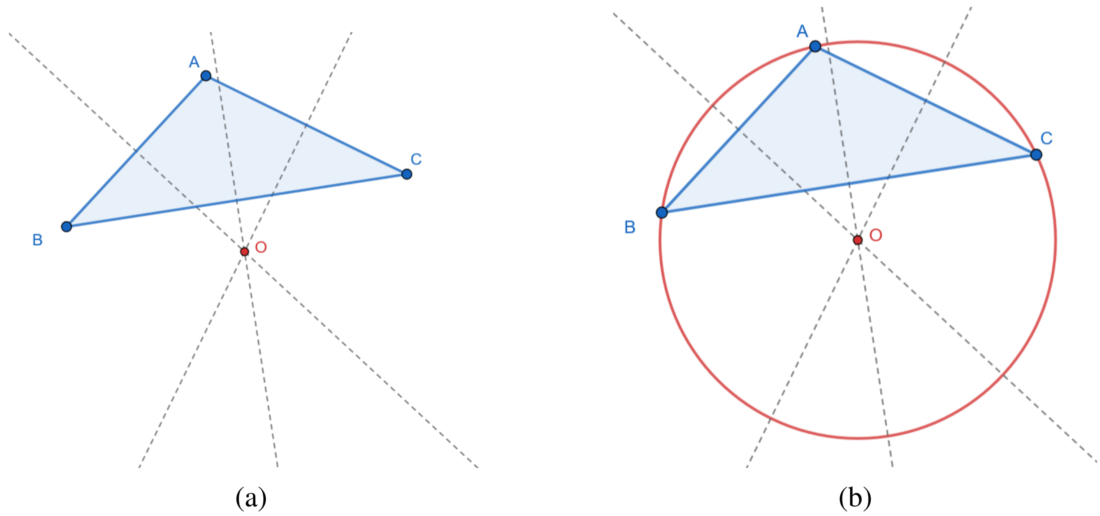


Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Para a construção do círculo circunscrito em um triângulo ABC dado siga os passos a seguir:

1. Trace as três mediatrizes seguindo os passos anteriores (na verdade bastam duas) (Figura 4a);
2. Encontre o ponto de interseção delas utilizando o ícone “Interseção de dois objetos” que pode ser encontrado na seção de “Pontos” (Figura 4a);
3. Chamando esse ponto de O, use o ícone “Círculo dados centro e um de seus pontos”, na seção “Círculos”, para encontrar o círculo de centro O e raio $\overline{OA}$ selecionando na sequência O e A (Figura 4b).

Figura 4 – Construção da circunferência circunscrita no triângulo

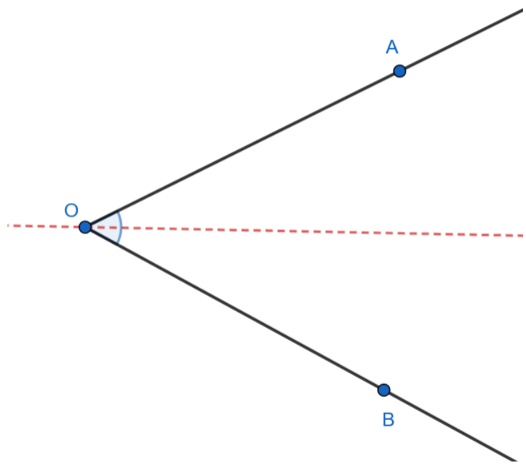


Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Proposição 2. *(MUNIZ NETO, 2022, p.108 - Proposição 3.32) Todo triângulo admite um único círculo que tangencia todos os seus lados. Esse círculo é denominado círculo inscrito ao triângulo e seu centro é o incentro dele.*

A bissetriz de um ângulo é a semirreta (ou a reta) que divide esse ângulo em dois ângulos congruentes. A bissetriz de um ângulo também é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo. Assim, um triângulo admite três bissetrizes, as quais se encontram em um único ponto chamado incentro do triângulo. O incentro tem a propriedade de equidistar dos três lados do triângulo.

Figura 5 – Bissetriz do ângulo $B\hat{O}A$



Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Para traçar a bissetriz de um ângulo $B\hat{O}A$ siga os passos a seguir:

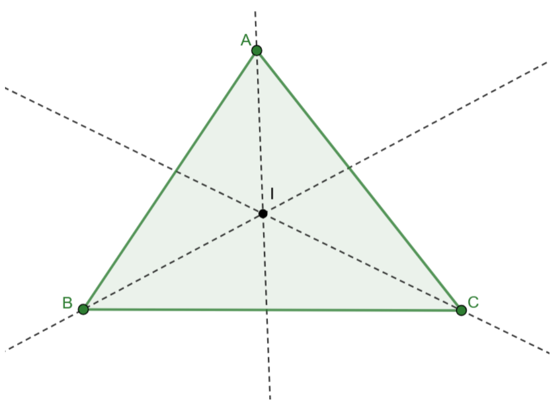
1. Selecione a aba "Ferramentas";

2. Na seção “Construções”, selecione o ícone “Bissetriz”;
3. Agora basta clicar nos dois lados do ângulo para obter a reta desejada.

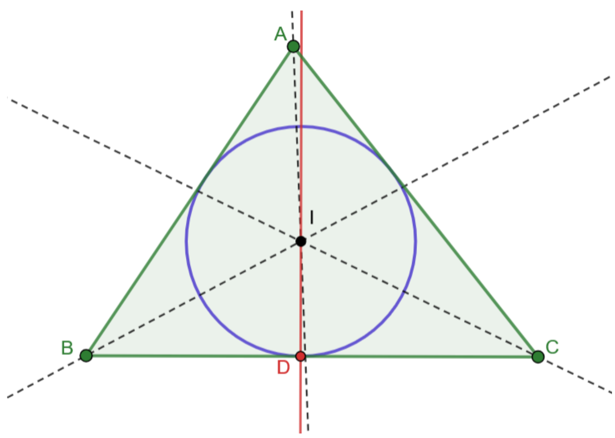
O incentro de um triângulo ABC é o centro do círculo inscrito nele. Assim, para encontrar o centro desse círculo é preciso traçar as bissetrizes de cada ângulo interno do triângulo para encontrar a interseção delas. O raio do círculo inscrito é a distância do centro I até um dos lados do triângulo.

1. Construa as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC;
2. Encontre o ponto de interseção delas utilizando o ícone “Interseção de dois objetos” que pode ser encontrado na seção de “Pontos” (Figura 6a);
3. Chame essa interseção de I (Figura 6a);
4. Selecione o ícone “Reta perpendicular” na seção de “Construções” e em seguida selecione o ponto I e um dos lados do triângulo (digamos BC) para traçar a reta perpendicular a um dos lados do triângulo passando por I (Figura 6b);
5. Selecione o ícone “Interseção de dois objetos” que pode ser encontrado na seção de “Pontos” para encontrar a interseção entre o lado BC e a reta perpendicular, que é o pé da perpendicular e o qual chamaremos de D (Figura 6b);
6. Use o ícone “Círculo dados centro e um de seus pontos”, na seção “Círculos”, para encontrar o círculo de centro I e raio $\overline{OD}$ selecionando na sequência O e D (Figura 6b).

Figura 6 – Construção do círculo inscrito no triângulo



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

As proposições acima mostram duas interessantes relação entre polígonos e círculos. Vamos definir o que vem a ser polígono inscritível e polígono circunscritível.

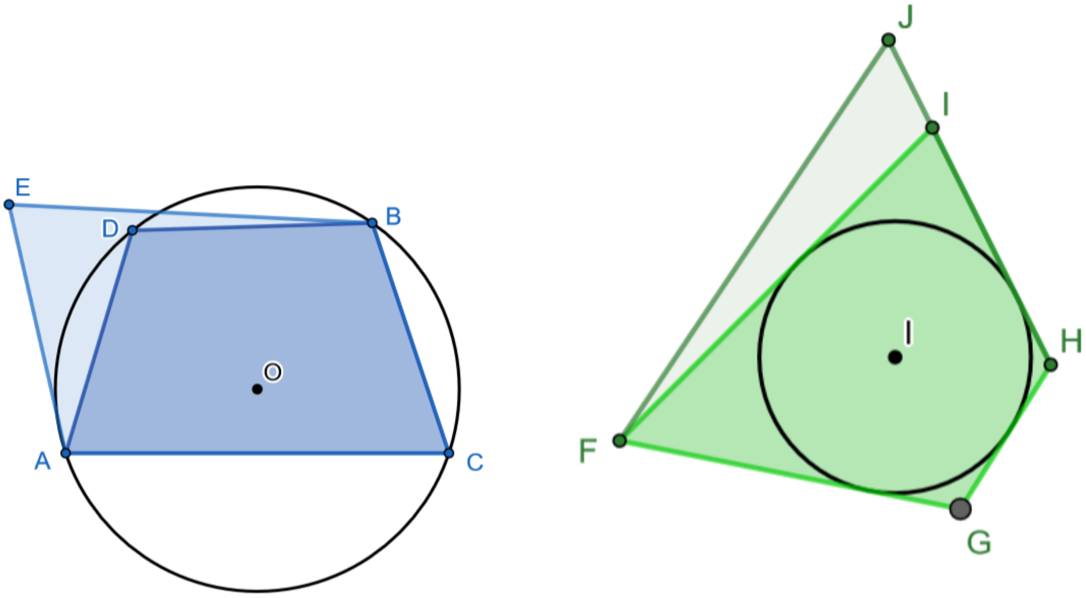
Definição 2. Dizemos que um polígono é inscritível quando existe um círculo passando por seus vértices, isto é, quando existe uma circunferência circunscrita nele.

Definição 3. Dizemos que um polígono é circunscritível quando existe um círculo tangenciando seus lados, isto é, quando existe uma circunferência inscrita nele.

Os quadriláteros são polígonos de quatro lados e são estruturas também muito presentes no nosso cotidiano, afinal, basta olhar ao redor para identificar objetos constituídos por retângulos, losangos, trapézios ou quadrados, que são exemplos de quadriláteros notáveis. Como veremos a seguir, a existência de circunferências inscrita e circunscrita no quadrilátero não ocorre de modo generalizado como no triângulo.

As Figuras 7a e 7b mostram exemplos de quadriláteros tanto inscritível como não inscritíveis e também quadriláteros circunscritíveis e não circunscritíveis.

Figura 7 – Quadriláteros que admitem e não admitem círculos notáveis



(a) O quadrilátero $ABCD$ é inscritível, mas o quadrilátero $ABCE$ não é inscritível.

(b) O quadrilátero $FGHI$ é circunscritível, mas o quadrilátero $FGHJ$ não é circunscritível.

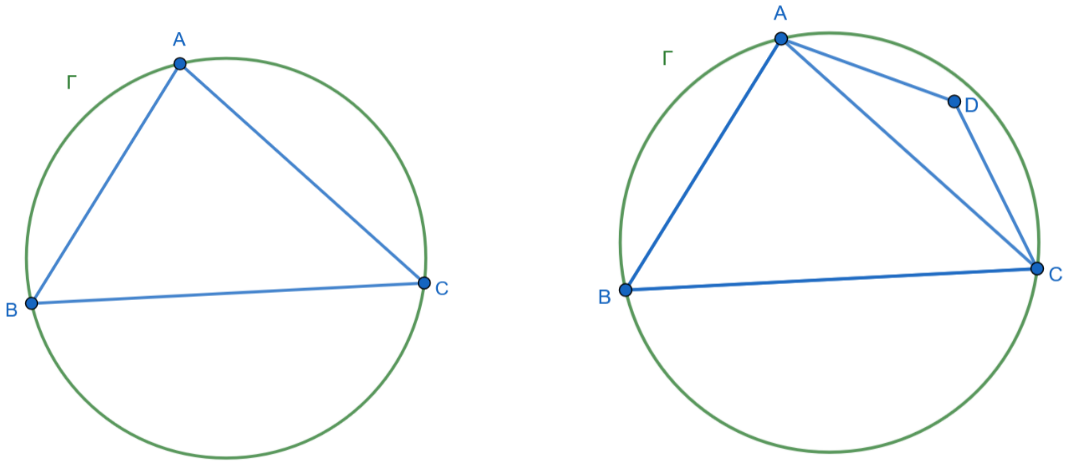
Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

O resultado a seguir exibe uma prova construtiva, a partir do triângulo, de que nem todo quadrilátero é inscritível.

Proposição 3. *Existe quadrilátero não inscritível.*

Demonstração. Para demonstrar a proposição é preciso garantir que existe um quadrilátero $ABCD$ que não admite circunferência circunscrita. Com efeito, considere um triângulo ABC qualquer. Sabemos, pela Proposição 1, que ABC admite uma única circunferência Γ circunscrita nele. Seja D um ponto não pertencente a circunferência Γ. Afirmamos que $ABCD$ é um quadrilátero não inscritível. De fato, se houvesse uma circunferência Γ' passando pelos pontos A, B, C e D simultaneamente, teríamos que Γ' passa por A, B e C e, assim, Γ' é uma circunferência circunscrita no triângulo ABC. Utilizando a unicidade da circunferência circunscrita, segue que Γ' coincide com Γ, o que é um absurdo, pois Γ' contém o ponto D e D está fora de Γ. O absurdo surge na suposição de que $ABCD$ admite circunferência circunscrita. Logo, $ABCD$ é não inscritível. ■

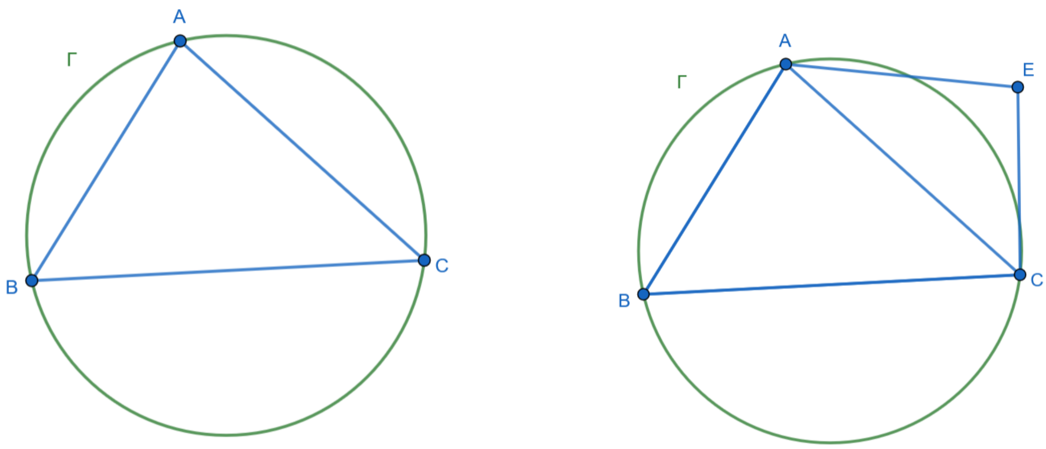
Figura 8 – $ABCD$ é não circunscritível e o ponto D está no interior do círculo circunscrito no triângulo ABC



(a) (b)

Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Figura 9 – $ABCE$ é não circunscritível e E é um ponto fora do círculo circunscrito no triângulo ABC



(a) (b)

Fonte: Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Mas, será que existem quadriláteros circunscritíveis? A resposta é sim. Afinal, dados um triângulo ABC e a circunferência Γ circunscrita nele, qualquer outro ponto D (distinto de A, B e C) em Γ é tal que $ABCD$ é um quadriláteros circunscritível.

Isso despertou o interesse e a curiosidade de alguns matemáticos que tentaram encontrar condições necessárias e suficientes para que um quadrilátero seja inscritível ou circunscritível. Alguns desses resultados estão expostos a seguir.

O primeiro resultado é devido ao geógrafo, astrônomo e matemático egípcio Cláudio Ptolomeu.

Teorema 1 (Teorema de Ptolomeu)**.** *(MUNIZ NETO, 2022, p.153 - Teorema 4.18) Se ABCD é um quadrilátero inscritível, o produto dos comprimentos de suas diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos de seus lados opostos, isto é,*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Note que o Teorema de Ptolomeu só apresenta uma condição necessária para que um quadrilátero seja inscritível.

A caracterização completa dos quadriláteros inscritíveis é dada pelo resultado a seguir cuja demonstração será emitida, mas pode ser encontrada em (MUNIZ NETO, 2022, p.116 - Proposição 3.39).

Proposição 4. *(MUNIZ NETO, 2022, p.116 - Proposição 3.39) Um quadrilátero convexo ABCD, de lados AB, BC, CD e DA, é inscritível se, e somente se, qualquer uma das condições a seguir é satisfeita:*

1. $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180°$.
2. $B\hat{A}C = B\hat{D}C$.

Assim, um quadrilátero convexo *ABCD* é inscritível se, e somente se, o ângulo que uma diagonal forma com um lado for igual ao ângulo que a outra diagonal forma com o lado oposto.

A propriedade de ser circunscritível também não é geral para quadriláteros como é para triângulos. O teorema a seguir, conhecido como o Teorema de Pitot, fornece uma caracterização para quadriláteros circunscritíveis.

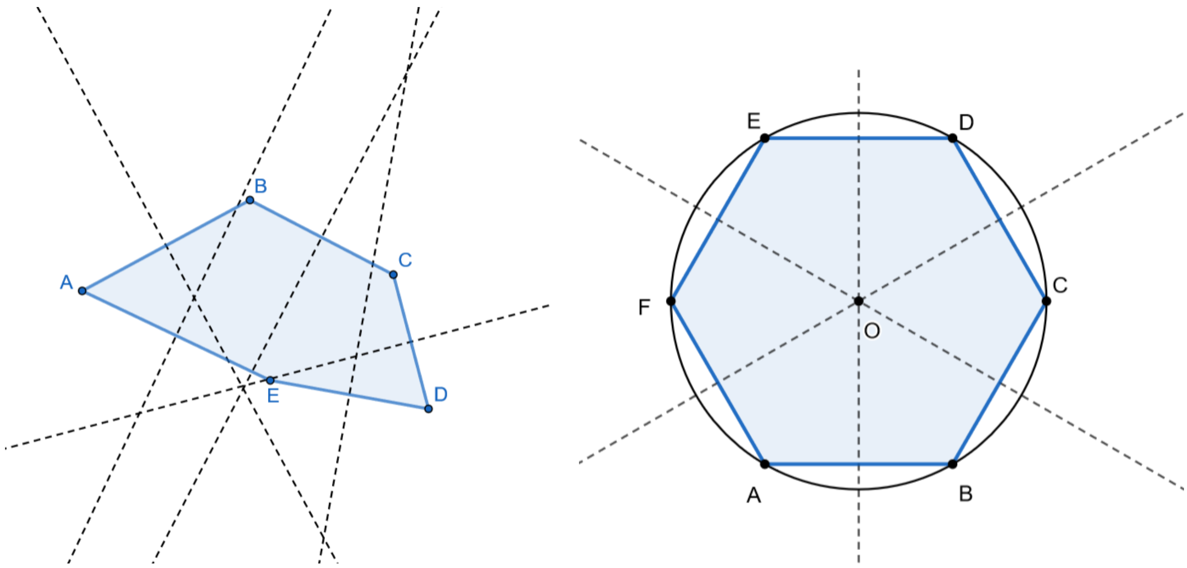
Teorema 2. *(MUNIZ NETO, 2022, p.121 - Teorema 3.42) Um quadrilátero convexo ABCD, de lados AB, BC, CD e DA, é circunscritível se, e só se,*

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC},$$

isto é, as somas dos lados opostos forem iguais.

Uma questão natural que surge diante da abordagem feita anteriormente para triângulos e quadriláteros é se existem resultados equivalentes para polígonos convexos com n lados e $n \geq 4$. Nas Figuras 10a e 10b, podemos ver exemplos de polígonos convexos não inscritível e inscritível, respectivamente, e nas Figuras 11a e 11b podemos ver exemplos de polígonos convexos não circunscritível e circunscritível, respectivamente, mostrando que para polígonos de n lados com $n > 4$ ambas as situações também podem ocorrer.

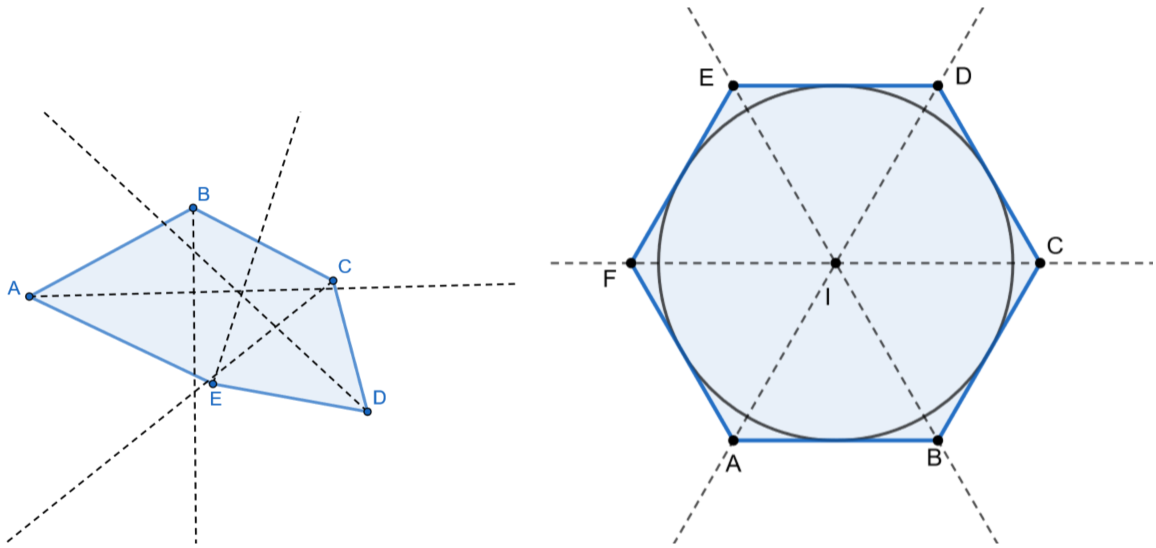
Figura 10 – Polígonos não inscritível e inscritível



(a) (b)

Fonte: elaborado pela autora (2025)

Figura 11 – Polígonos não circunscritível e circunscritível



(a) (b)

Fonte: elaborado pela autora (2025)

Uma classe muito estudada de polígonos é a classe dos polígonos regulares. Muniz Neto (2022, p. 208) define polígono regular da seguinte forma.

Definição 4. Um polígono é regular se todos os seus lados e todos os seus ângulos internos tiverem a mesma medida.

Dentre as inúmeras propriedades de polígonos regulares, a próxima proposição diz que todo polígono regular é inscritível e circunscritível. Mais ainda, nesse caso, o circuncentro e o incentro coincidem.

Proposição 5. *(MUNIZ NETO, 2022, p.209 - Proposição 5.17) Todo polígono regular é inscritível e circunscritível, e os círculos inscrito e circunscrito têm um mesmo centro.*

É possível construir diretamente o círculo circunscrito em um polígono (desde que ele exista) utilizando o GeoGebra. Basta seguir os passos a seguir:

1. Abra o software GeoGebra;
2. Selecione a aba "Álgebra";
3. Digite na entrada "Círculo(A,B,C)" para a construção do círculo circunscrito no polígono que possui os pontos A, B e C.

Também é possível construir o círculo inscrito em um triângulo ABC usando diretamente o software GeoGebra, seguindos os passos:

1. Abra o software GeoGebra;
2. Selecione a aba "Álgebra";
3. Digite na entrada "Círculoinscrito(A,B,C)" para a construção do círculo inscrito no triângulo ABC.

Encerramos esse capítulo com uma caracterização geral dos polígonos inscritíveis e circunscritíveis.

Proposição 6. *Um polígono convexo é inscritível se, e somente se, as mediatrizes de seus lados concorrem em um único ponto.*

Demonstração. Se um polígono P de n lados é inscritível, significa que existe uma circunferência que passa por todos os seus vértices. Essa circunferência é chamada de circunferência circunscrita, e seu centro O é chamado de circuncentro. Sabemos que o centro de uma circunferência circunscrita é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados do polígono.

Para qualquer triângulo, as mediatrizes dos três lados sempre concorrem em um ponto, que é o centro da circunferência circunscrita. Para um quadrilátero convexo, ele será inscritível se e somente se seus quatro vértices pertencem à mesma circunferência. Nesse caso, as mediatrizes dos quatro lados se encontram em um único ponto. Para um polígono de n lados, podemos usar o mesmo raciocínio: se ele é inscritível, então todos os seus vértices pertencem a uma mesma circunferência, e suas mediatrizes devem necessariamente se encontrar no centro dessa circunferência. Portanto, se um polígono convexo é inscritível, então as mediatrizes de seus lados concorrem em um único ponto.

Agora, queremos provar que se as mediatrizes dos lados de um polígono convexo P concorrem em um único ponto O, então P é inscritível. Se todas as mediatrizes de P

passam por um único ponto O, então, por definição, esse ponto O é equidistante de todos os vértices do polígono. Seja R essa distância comum. Isso significa que podemos desenhar uma circunferência com centro O e raio R que passa por todos os vértices do polígono. Assim, o polígono P está inscrito em uma circunferência, ou seja, ele é inscritível.

■

É importante notar que o círculo circunscrito, quando existe, é único, pois circunscreve todo triângulo formado por três vértices do polígono.

Proposição 7. *Um polígono convexo é inscritível se, e somente se, as bissetrizes de seus ângulos internos concorrem em um único ponto.*

Demonstração. Se um polígono convexo é inscritível, significa que existe um círculo inscrito, ou seja, uma circunferência tangente a todos os seus lados. O centro desse círculo inscrito é o incentro do polígono. Esse incentro deve ser equidistante de todos os lados, e por definição, é o ponto de interseção de todas as bissetrizes internas dos ângulos do polígono. Portanto, se o polígono é inscritível, então suas bissetrizes concorrem em um único ponto.

Reciprocamente, se todas as bissetrizes internas dos ângulos do polígono se encontram em um único ponto I, então esse ponto é equidistante de todos os lados do polígono. Isso significa que existe um círculo centrado em I tangente a todos os lados do polígono. Esse círculo é o círculo inscrito, provando que o polígono é inscritível. ■

A unicidade do círculo inscrito em um polígono convexo decorre da unicidade do ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos, ou seja, do incentro.

5 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES

Vimos que alguns polígonos admitem círculos inscrito e circunscrito. Outra questão, que é fortemente explorada por meio de construções geométricas é em quais ocasiões é possível dividir um círculo dado em n partes iguais de modo a obter um polígono regular inscrito. Segundo Wagner (2007), o problema de dividir o círculo em n partes iguais "é simples para $n = 2,4,8,16,\ldots$ e também para $n = 3,6,12,24,\ldots$." Entretanto, ainda de acordo com Wagner (2007), "não é possível dividir exatamente um círculo em $7,9,11,13,14,18$ e 19 partes iguais, citando apenas valores menores que 20."

É importante saber que a construtibilidade de um polígono regular com régua e compasso não é algo arbitrário e depende da decomposição do número n de lados em fatores primos. Devemos ao matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) o seguinte resultado:

Se n é primo, então o polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, $n = 2^{2^m} + 1$, com m número natural.

Lembrando que números da forma $n = 2^{2^m} + 1$, com m número natural são chamados de números de Fermat. Assim, como $n = 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3$, $n = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5$, $n = 2^{2^2} + 1 = 16 + 1 = 17$, os polígonos regulares de 3, 5 e 17 lados são construtíveis com régua e compasso. Note que $n = 7$ não pode ser escrito na forma $n = 2^{2^m} + 1$, com m número natural e, portanto, o heptágono regular não admite construção exata com régua e compasso.

Mais geralmente, usando a teoria desenvolvida por Gauss, o polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, n puder ser decomposto em fatores primos na forma

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_m,$$

com k natural e p_i primos de Fermat, $i = 1,\ldots,m$.

Com intuito de continuar explorando as relações entre círculos e polígonos, a seguir vamos apresentar detalhadamente as construções, utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, de polígonos regulares utilizando a divisão do círculo em partes iguais. Como mencionamos, para alguns valores de n, a divisão é exata, porém, em outros casos, apenas são admitidas construções aproximadas. Mostraremos também que a divisão do círculo em partes iguais fornece, além de um polígono regular inscrito, um polígono regular circunscrito.

De acordo com Giongo (1918), existe um processo geral de divisão da circunferência em n partes iguais, chamado de método de Bion-Rinaldini. Ilustraremos o método para o caso particular em que $n = 8$. Os demais casos são análogos (Figura 12).

1. Divida um diâmetro AB qualquer em 8 partes iguais;

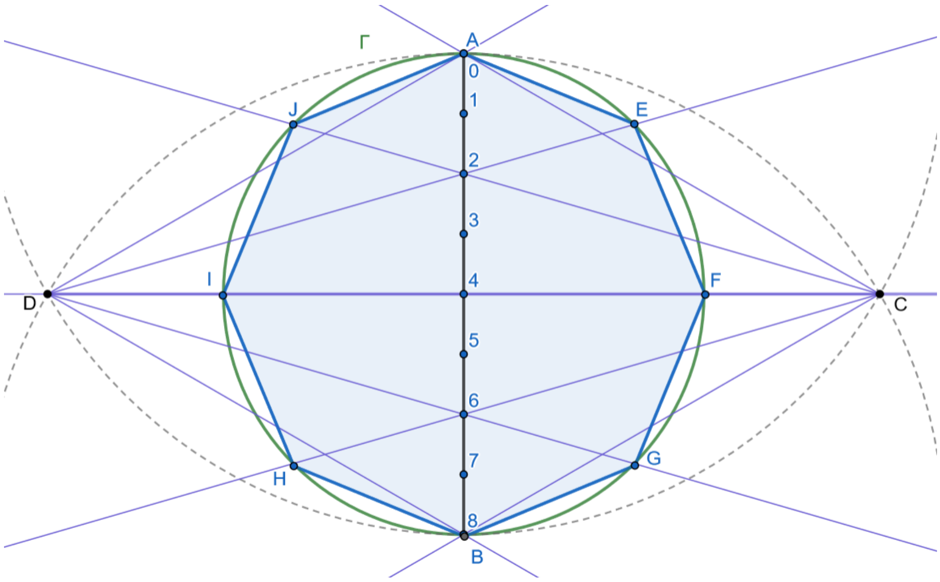
2. Com centro em A e depois em B e raio $\overline{AB}$, trace dois círculos e chame de C e D suas interseções;

3. Trace as semirretas de origem em C e D e passando pelos pontos pares 2, 4 e 6 da divisão do segmento AB;

4. Marque os pontos de interseção das semirretas de origem em C e D com o círculo Γ que pertençam aos semiplanos gerados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ opostos a C e D, respectivamente, obtendo os pontos E, F, G, H, I e J.

5. $AEFGBHIJ$ é um octógono regular.

Figura 12 – Construção do octógono regular utilizando o método de Bion



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Outra forma de realizar a construção, segundo o método de Bion-Rinaldini, é como segue (Figura 13):

1. Divida um diâmetro AB qualquer em 8 partes iguais;

2. Com centro em A e depois em B e raio $\overline{AB}$, trace dois círculos e chame de C e D suas interseções;

3. Trace as semirretas de origem em C e D e passando pelos pontos ímpares 1,3,5 e 7 da divisão do segmento AB;

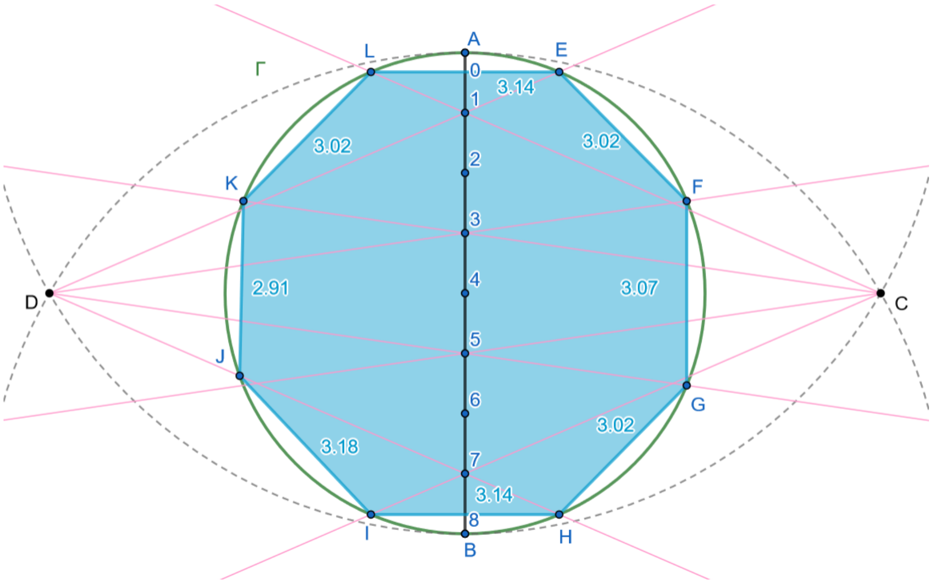
4. Marque os pontos de interseção das semirretas de origem em C e D com o círculo Γ que pertençam aos semiplanos gerados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ opostos a C e D, respectivamente, obtendo os pontos E, F, G, H, I, J, K e L.

5. $EFGHIJKL$ é um octógono aproximadamente regular.

Note que a última construção é aproximada enquanto a anterior é exata.

Segundo Giongo (1918),

Figura 13 – Construção do octógono regular utilizando o método de Bion



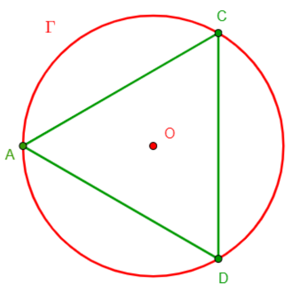
Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

1. Dividindo-se uma circunferência em n partes iguais e unindo-se os pontos de divisão, obtemos um polígono regular inscrito.
2. Traçando-se tangentes pelos pontos de divisão, obtemos um polígono regular circunscrito à circunferência. (GIONGO, 1918, p. 47)

A seguir, utilizaremos o software GeoGebra e métodos de divisão do círculo para a construção de polígonos regulares. Em alguns casos, as divisões são exatas, fazendo com que o polígono inscrito seja regular e, em outros casos, a divisão do círculo é aproximada e o polígono inscrito é aproximadamente regular.

5.1 Divisão do círculo em três partes iguais

Figura 14 – Divisão do círculo em três partes iguais

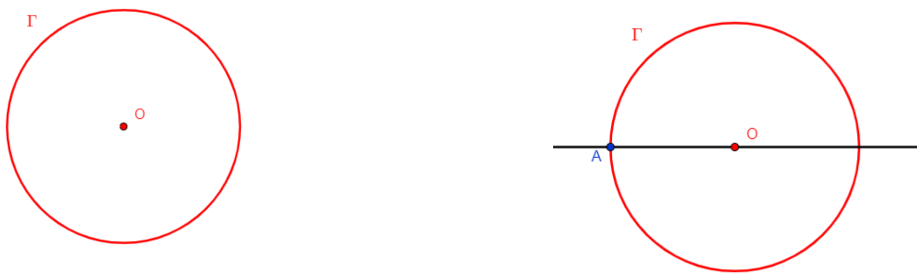


Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.1.1 Triângulo inscrito

1. Abra o Software GeoGebra;
2. Selecione a aba “Ferramentas”;
3. Selecione o ícone “Círculo: centro & raio” na seção “Círculos”;
4. Marque o centro e chame-o de O e, em seguida, escolha um raio $r > 0$ qualquer, digamos $r = 4$;
5. Chame esse círculo de Γ;
6. Na seção “Retas”, selecione o ícone “Reta” e trace a reta que passa por O e por um ponto qualquer do círculo, chame-o A (Figura 15);

Figura 15 – Construção do triângulo equilátero inscrito no círculo

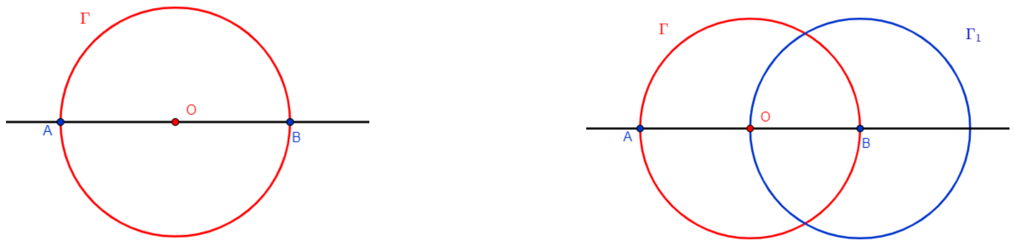


(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

7. Na seção “Pontos”, encontre o ícone “Interseção de Dois Objetos” e, em seguida, selecione o círculo Γ e a reta $\overleftrightarrow{AO}$ para encontrar o segundo ponto de interseção entre estes objetos e chame-o de B (Figura 16a);
8. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Círculo: Centro & Raio”, selecione B como centro e escolha o mesmo raio da primeira circunferência, que em nosso caso é $r = 4$;
9. Chame esse círculo de Γ_1 (Figura 16b);

Figura 16 – Construção do triângulo equilátero inscrito no círculo

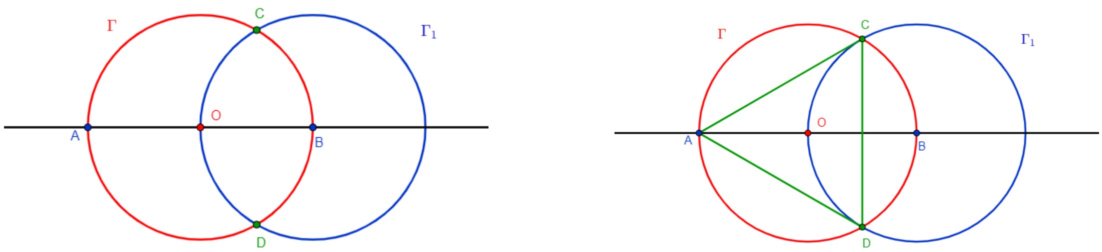


(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

10. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ e Γ_1 construídas e marque os dois pontos de interseção entre elas e denote-os por C e D;
11. Na seção “Retas”, selecione o ícone “Segmento”, ligue os pontos A e C, C e D e D e A, formando os segmentos AC, CD e DA e, consequentemente, construindo o triângulo ACD;
12. Outra alternativa é selecionar o ícone “Polígono” na seção “Polígonos” e selecionar, na sequência, os pontos A, B, C e A (novamente), formando o triângulo ABC;
13. Afirmamos que ACD é um triângulo equilátero (Figura 17).

Figura 17 – Construção do triângulo equilátero inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Justificativa

Note que $OCBD$ é um losango. Em um losango as diagonais são perpendiculares (Proposição A5) e se intersectam em seus respectivos pontos médios (Proposição A3). Assim $CD \perp OB$. Chame de H a interseção de CD e OB. Veja também que os triângulo OCB e ODB são equiláteros de lado $r = 4$. No triângulo equilátero, todas as alturas são também bissetrizes e, portanto CH e DH são bissetrizes dos ângulos $O\hat{C}B$ e $O\hat{D}B$. Como esses ângulos valem $60°$, pois OCB e ODB são equiláteros segue que $O\hat{D}C = O\hat{C}D = 30°$. Assim, como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale $180°$, temos que $D\hat{O}C = 120°$. Como $D\hat{A}C = D\hat{O}C/2$, pois o ângulo inscrito é metade do central, segue que $D\hat{A}C = 60°$. Observe que AH é mediana e também altura de ACD com relação a CD, logo, ACD são isósceles de base CD e, portanto, os ângulos da base são iguais. Se chamarmos de x a medida dos ângulos da base de ACD, temos que $x + x + 60° = 180°$, implicando que $x = 60°$. Logo, ACD é equilátero.

5.1.2 Triângulo circunscrito

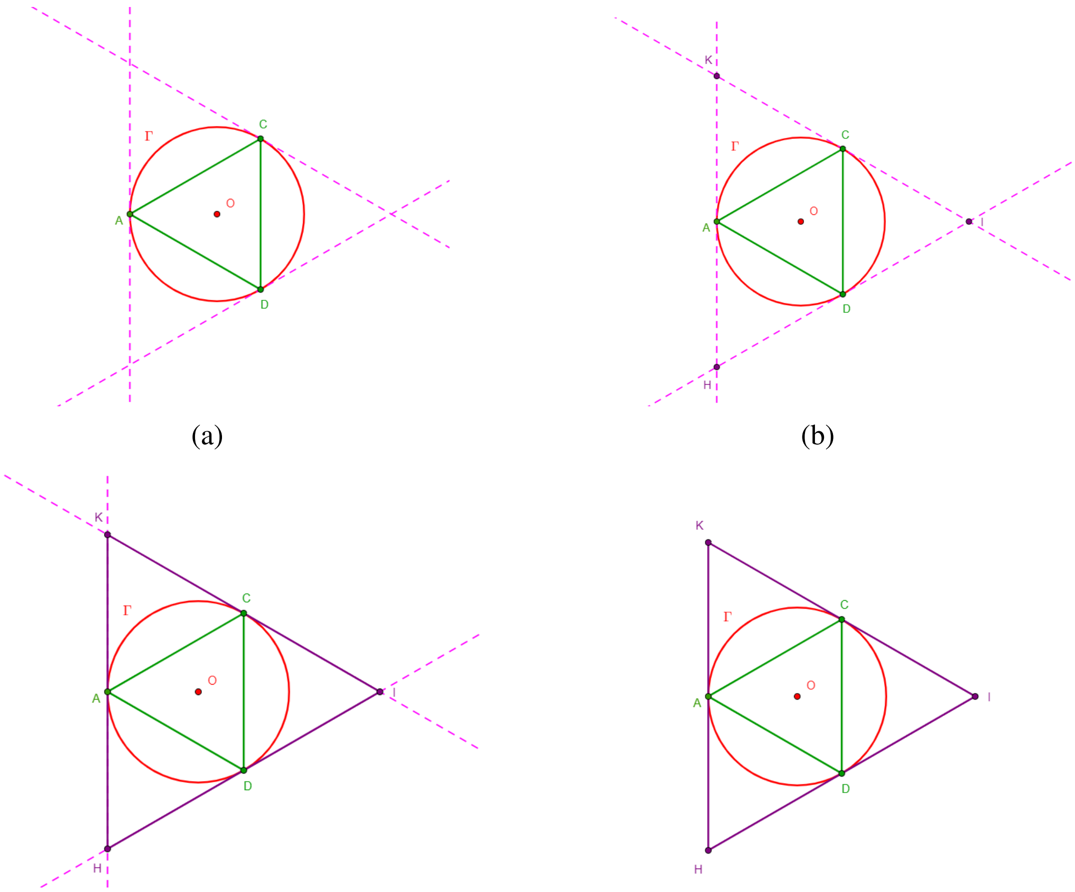
Aproveitando a construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência, vamos construir o triângulo equilátero circunscrito na circunferência. Para essa construção é necessário traçar as tangentes a circunferência que passam pelos vértices do triângulo inscrito ACD.

1. Na aba “Ferramentas” selecione o ícone “Reta Tangente” na seção de “Retas”;
2. Selecione o primeiro o vértice do triângulo, e em seguida selecione a circunferência, desse modo temos a primeira reta tangente;
3. Repita o passo para os demais vértices do triângulo para obter as três retas tangentes;
4. Na aba “Ferramentas” selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos” na seção de “Pontos” e na sequência selecione as retas tangentes duas a duas com o intuito de obter as interseções;
5. Marque os pontos de intersecções das retas tangentes, denotando-os por K, I e H;
6. Na aba “Ferramentas” selecione o ícone “Segmento” na seção de “Retas” para traçar os segmentos KI, IH e HK;
7. KIH é um triângulo equilátero (Figura 18).

Justificativa

De acordo com a Proposição A8, o ângulo $A\hat{K}C = 180° - C\hat{O}A$. Como $C\hat{O}A = 360°/3 = 120°$, segue que $A\hat{K}C = 180° - C\hat{O}A = 180° - 120° = 60°$. Um raciocínio completamente análogo pode ser usado para mostrar que $C\hat{I}D = D\hat{H}A = 60°$, implicando que o triângulo KIH é equilátero (Proposição A6).

Figura 18 – Construção do triângulo circunscrito no círculo



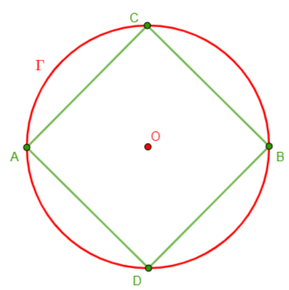
(a) (b)

(c) (d)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.2 Divisão do círculo em quatro partes iguais

Figura 19 – Divisão do círculo em quatro partes iguais



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.2.1 Quadrado inscrito

1. Abra o Software GeoGebra;

2. Selecione a aba “Ferramentas”;

3. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Circulo: centro & raio”;

4. Marque o centro e chame-o de 0 e, em seguida, escolha um raio r qualquer, digamos $r = 4$;

5. Chame esse círculo de Γ;

6. Ainda em “Ferramentas”, porém agora na seção de “Retas”, marque o ícone “Reta”, e trace a reta que passa por O e por um ponto qualquer do círculo, o qual chamamos de A (Figura 20);

Figura 20 – Construção do quadrado inscrito no círculo

(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

7. Na aba “Pontos”, encontre o ícone “Interseção de Dois Objetos” e, em seguida, selecione o círculo Γ e a reta $\overleftrightarrow{AO}$ para encontrar o segundo ponto de interseção entre estes objetos, o qual chamamos de B (AB é um diâmetro);

8. Na seção de “Construções”, selecione o ícone “Reta Perpendicular” e, em seguida, clique nos pontos O e em AB para obter a perpendicular a AB passando por O, que, por sua vez, é a mediatriz do segmento AB (Figura 21);

9. Na seção de “Pontos”, selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos” para obter a interseção entre a mediatriz de AB e o círculo Γ;

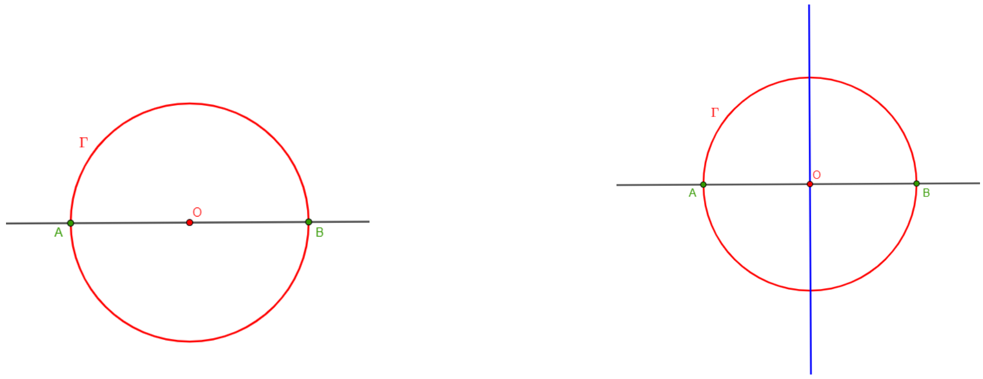
10. Chame os dois pontos de interseção de C e D;

11. Na seção de“Retas” selecione o ícone “Segmento” e , em seguida marque os pares de pontos CA, AD, DB e BC, formando o quadrilátero convexo $CADB$

12. Afirmamos que $CADB$ é um quadrado (Figura 22).

Justificativa

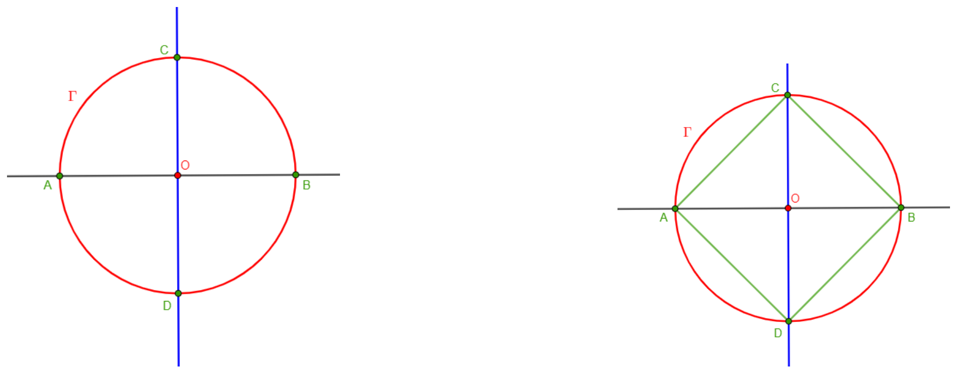
Figura 21 – Construção do quadrado inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Figura 22 – Construção do quadrado inscrito no círculo



(a) (b)

(c) (d)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

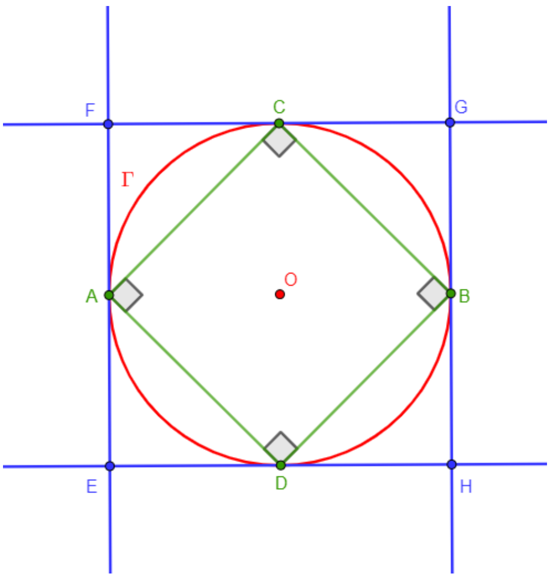
Uma vez que *CADB* é um quadrilátero convexo cujas diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios (no caso o ponto O), segue da Proposição A3(veja apêndice) que *CADB* é um paralelogramo. Mais ainda, como as diagonais de *CADB* são congruentes (por serem diâmetros) e perpendiculares (por construção), segue das Proposições A4 e A5 que *CADB* é um retângulo e também um losango, ou seja, *CADB* é um quadrado.

5.2.2 Quadrado circunscrito

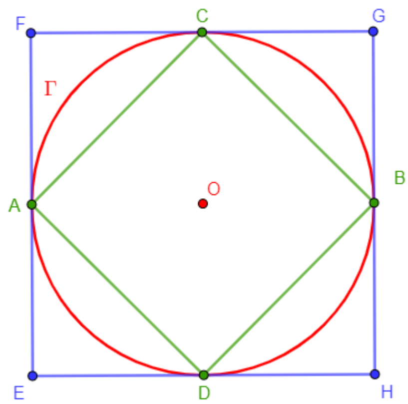
Para essa construção é necessário traçar as tangentes a circunferência, referente ao quadrado inscrito (Figura 23).

1. Na seção “Construções”, selecione o ícone “Reta Tangente”;
2. Selecione um vértice do quadrado, digamos A e, em seguida, selecione a circunferência Γ, desse modo temos a primeira reta tangente ao círculo passando por um vértice do quadrado;
3. De maneira análoga, construa as três outras retas tangentes ao círculos Γ por vértices do quadrado;
4. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos” para encontrar os pontos de interseção entre as tangentes traçadas anteriormente;
5. Chame os pontos se interseção de F, E, G e H;
6. Na seção “Retas”, selecione o ícone “Segmento”, para traçar os segmentos FG, GH, HE e EF, formando um quadrilátero convexo;
7. Afirmamos que $FEHG$ é um quadrado.

Figura 23 – Construção do quadrado circunscrito



(a)



(b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

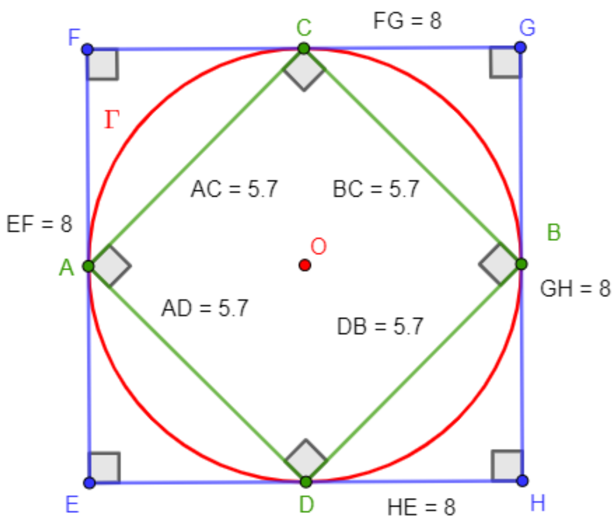
Justificativa

De acordo com a Proposição A8 temos que o triângulo AFC é isósceles e, portanto, $\overline{AF} = \overline{FC}$. Mais ainda, pela mesma proposição, temos que $C\hat{F}A = 180° - C\hat{O}A$. Como $CADB$ é um quadrado temos que os ângulos $C\hat{O}A = A\hat{O}D = D\hat{O}B = B\hat{O}C = 90°$ e, consequentemente, $C\hat{F}A = 180° - C\hat{O}A = 180° - 90° = 90°$. O mesmo procedimento pode ser feito para provar que os triângulos AED, DHB e BGC são isósceles e retângulos em E, H e G. Uma vez que os triângulos AFC, AED, DHB e BGC são retângulos e isósceles e possuem a mesma hipotenusa (que é o lado do quadrado $CADB$) segue do Teorema de Pitágoras que os lados iguais desses triângulos isósceles possuem a mesma medida, mostrando que, além de ângulos congruentes, $FEHG$ possui lados congruentes, isto é, $FEHG$ é um quadrado.

Sabemos que o quadrado é um polígono de quatro lados, com os quatro lados e os quatro ângulos congruentes. Podemos tirar a prova e saber a veracidade das construções usando apenas o *software* GeoGebra (Figura 24). Basta seguir o passo a passo a seguir:

1. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Ângulo”;
2. Selecione, na sequência, trios de vértices respeitando o sentido anti-horário, por exemplo B, C, A e também G, F e E, para obter ângulos internos iguais a 90° e comprovar que todos os quatro ângulos são congruentes;
3. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Distância, Comprimento”;
4. Em seguida, selecione os lados dos quadriláteros obtidos para comprovar que todos os quatro lados são congruentes.

Figura 24 – Quadrados inscrito e circunscrito no círculo dado



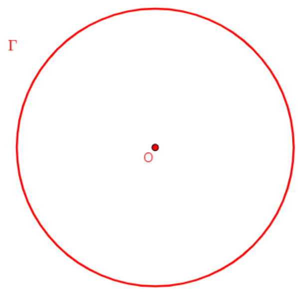
Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.3 Divisão do círculo em cinco partes iguais

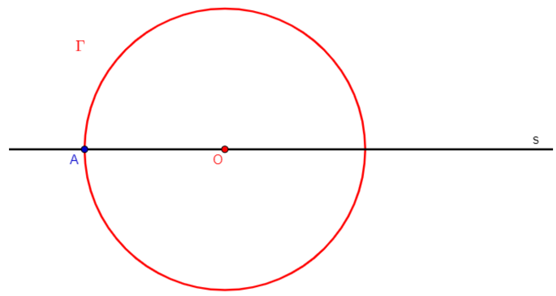
5.3.1 Pentágono regular inscrito

1. Abra o Software GeoGebra;
2. Selecione a aba "Ferramentas";
3. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Círculo: Centro & Raio";
4. Marque o centro e chame-o de O e, em seguida, escolha um raio $r > 0$ qualquer, digamos $r = 4$;
5. Chame esse círculo de Γ;
6. Na seção "Retas", selecione o ícone "Reta", e trace a reta que passa por O e por um ponto qualquer do círculo, chame-o de A ;
7. Denote a reta do passo anterior por s (Figura 25);

Figura 25 – Construção do pentágono inscrito no círculo



(a)

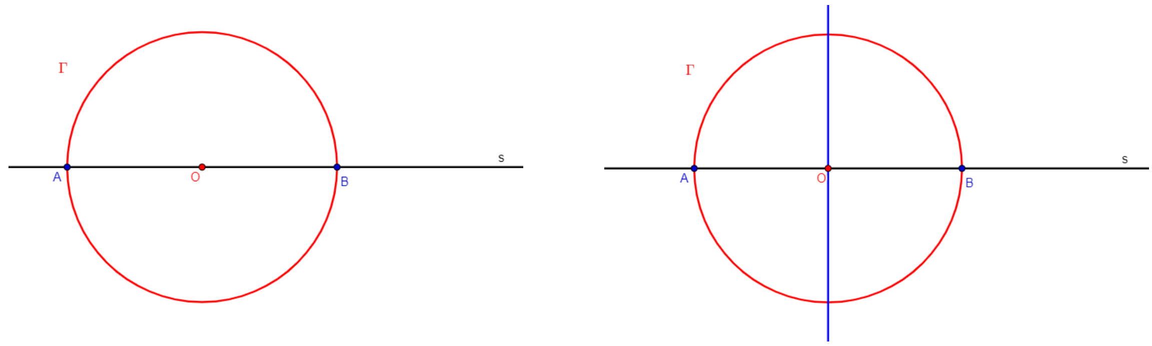


(b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

8. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos" e, em seguida, selecione o círculo Γ e a reta s para encontrar o segundo ponto de interseção entre estes dois objetos, e chame este segundo ponto de interseção de B;
9. Na seção "Construções", selecione o ícone "Reta Perpendicular";
10. Em seguida, selecione a reta s e o ponto O para encontrar a reta perpendicular a s passando por O (Figura 26);
11. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos" para encontrar os pontos de interseção entre esta reta e o círculo Γ, e chame-os de C e D (note que a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz de AB) (Figura 27a);

Figura 26 – Construção do pentágono inscrito no círculo

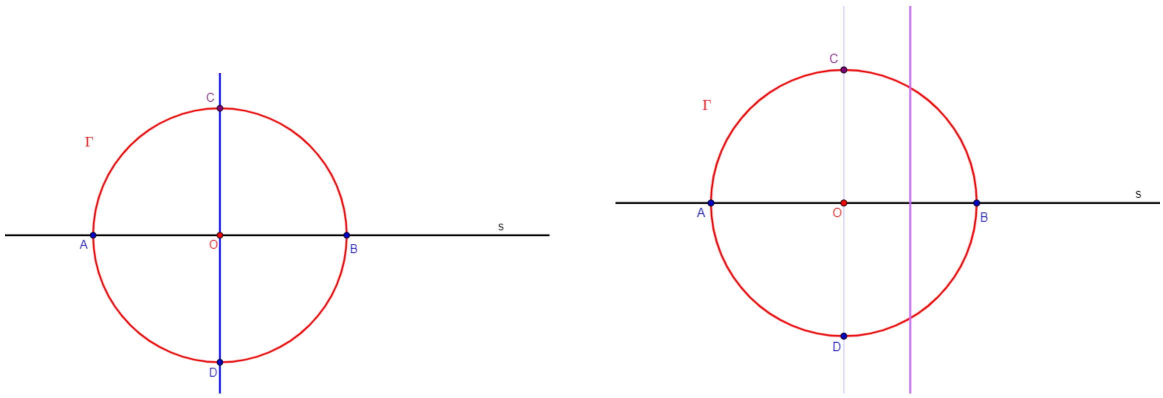


(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

12. Na seção “Construções”, selecione o ícone “Mediatriz”, e, em seguida, selecione os pontos O e B para encontrar a mediatriz do segmento OB (Figura 27b);

Figura 27 – Construção do pentágono inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

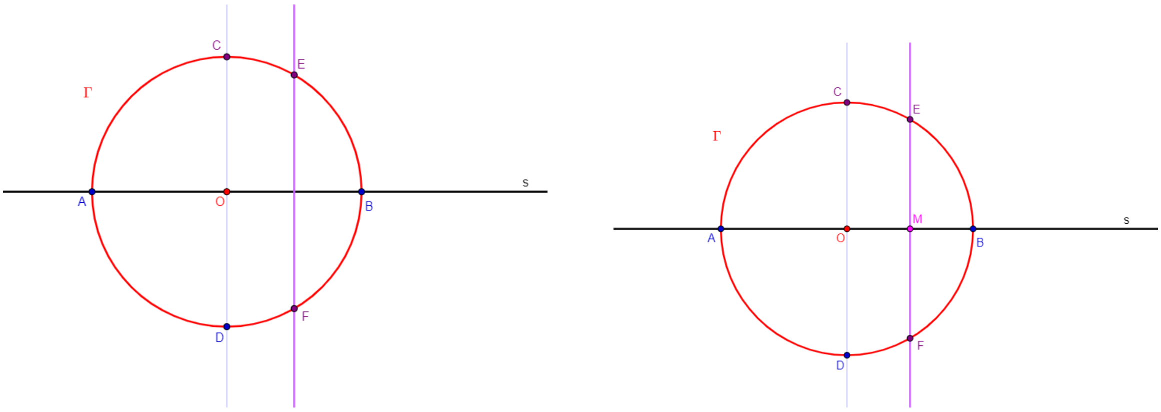
13. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos”, e marque os pontos de interseção da mediatriz de OB com Γ, e denote-os por E e F;

14. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos”, e selecione a mediatriz $\overleftrightarrow{EF}$ e a reta s para obter o ponto de interseção entre elas. Denote-o por M (que é o ponto médio de OB) (Figura 28);

15. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Círculo dados Centro e um de seus Pontos”;

16. Em seguida, selecione os pontos M e C para o traçado do círculo de centro em M e raio igual à distância entre M e C ($\overline{MC}$). Denote o círculo por Γ_1 (note que D pertence a Γ_1, pois s é a mediatriz de CD e M pertence a s);

Figura 28 – Construção do pentágono inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

17. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e, em seguida, selecione s e Γ_1 para obter os pontos de interseção. Denote por G o ponto de interseção interno ao círculo Γ;

18. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Círculo dados Centro e um de seus Pontos";

19. Na sequência, selecione o ponto C e o ponto G para obter o círculo de centro C e raio $\overline{CG}$, chame-o de Γ_2;

20. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione os círculos Γ_2 e Γ para obter os pontos de interseção entre elas, os quais denotaremos por I e H;

21. $\overline{CG}$ é o lado do pentágono regular inscrito (Figura 29);

22. Para construir o círculo de centro H e raio $\overline{CG}$, na seção, "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

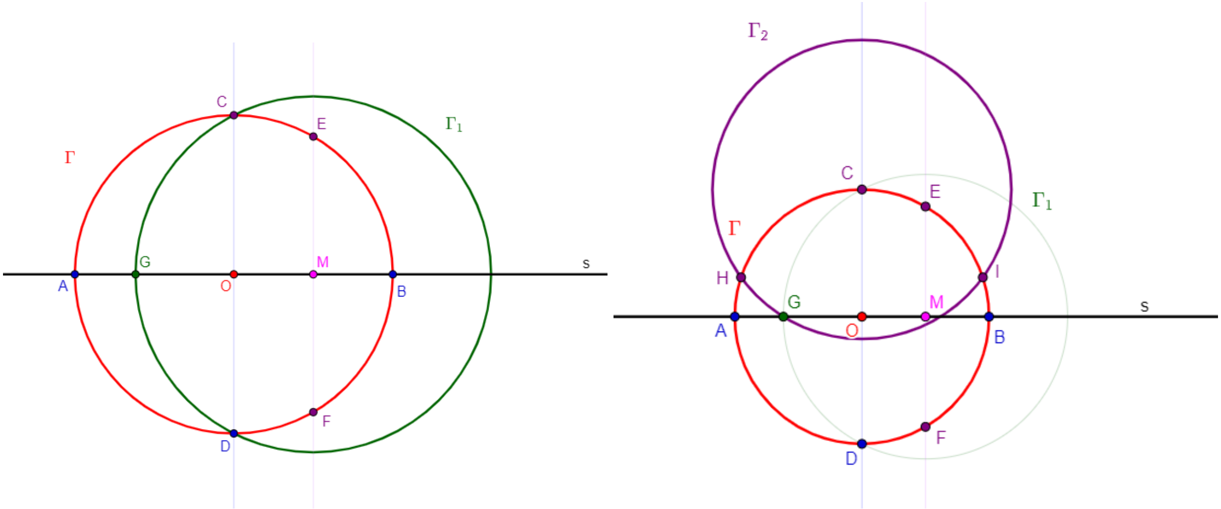
23. Em seguida, selecione os pontos C e G, e, na sequência, o ponto H, obtendo o círculo de centro H e raio $\overline{CG}$. Denote-o por Γ_3;

24. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione os círculos Γ_3 e Γ, e marque o ponto de interseção entre eles diferente de C, denote-o por J;

25. Para construir o círculo de centro J e raio $\overline{CG}$, na seção, "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

26. Em seguida, selecione os pontos C e G, e, na sequência, J, obtendo o círculo de centro J e raio $\overline{CG}$. Chame-a de Γ_4;

Figura 29 – Construção do pentágono inscrito no círculo

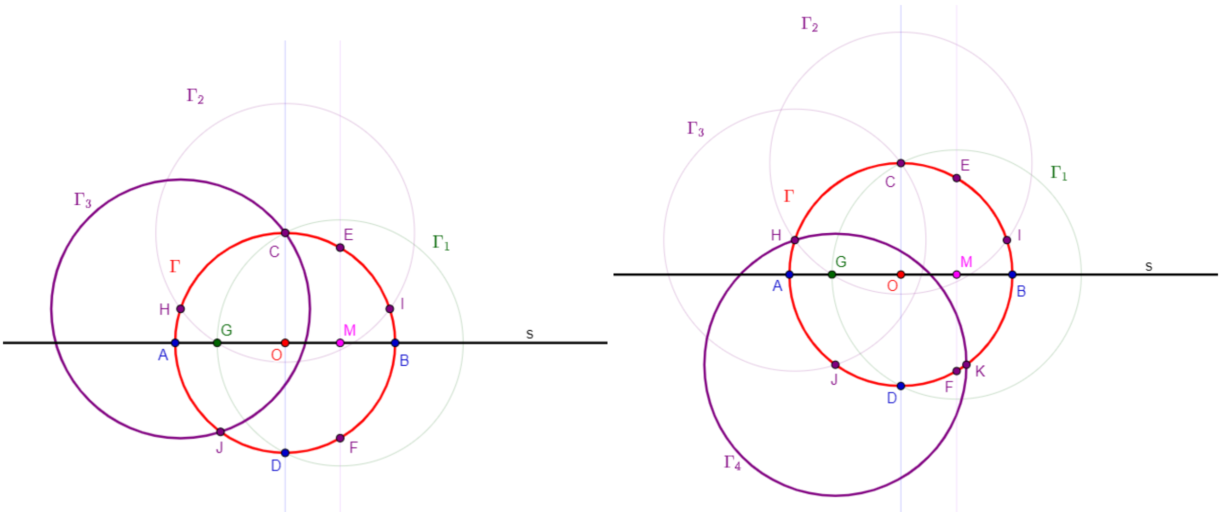


(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

27. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione os círculos Γ_4 e Γ, e marque o ponto de interseção entre eles distinto de H, denote-o por K (Figura 30);

Figura 30 – Construção do pentágono inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

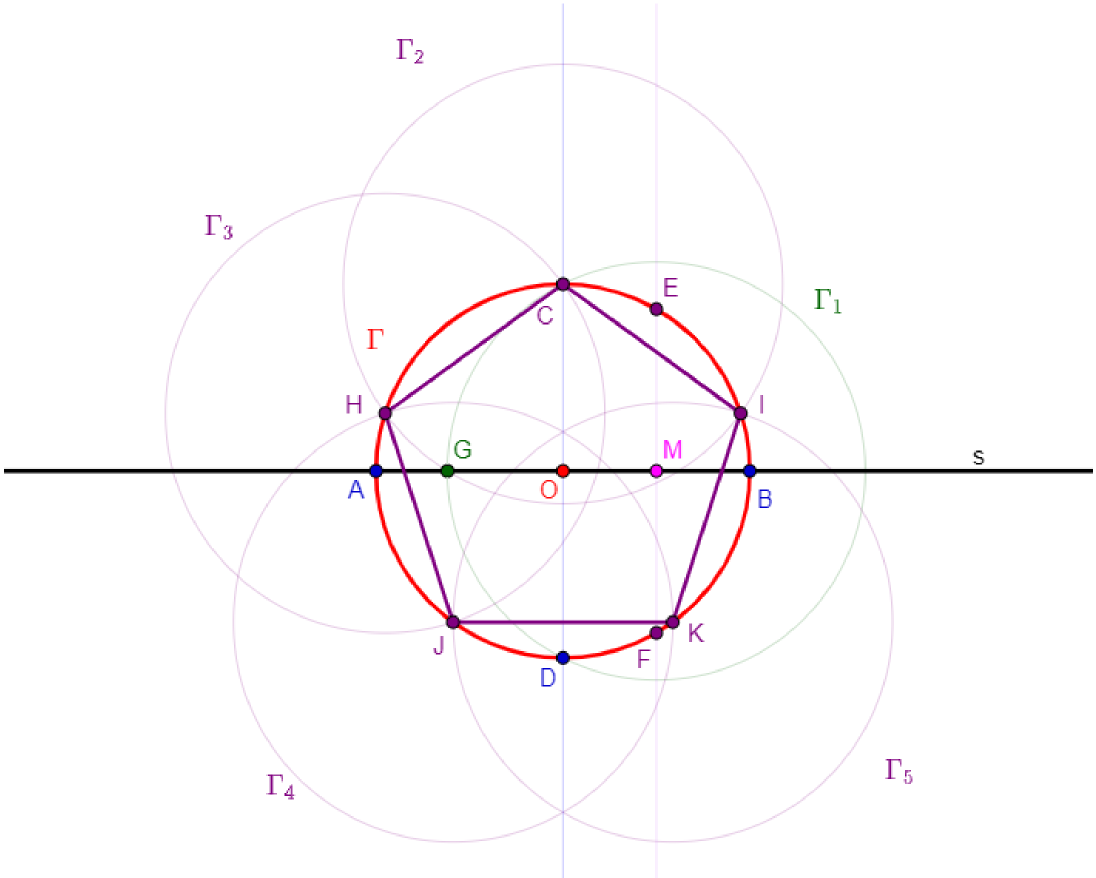
28. Para construir o círculo de centro K e raio $\overline{CG}$, na seção, “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

29. Em seguida, selecione os pontos C e G, e, na sequência, K, obtendo o círculo de centro K e raio $\overline{CG}$. Chame-a de Γ_5;

30. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione os círculos Γ_5 e Γ, e marque o ponto de interseção entre eles distinto de J, denote-o por I;

31. Na seção “Retas”, selecione o ícone “Segmento”, ligue os pontos C e H, H e J, J e K, K e I e I e C formando os segmentos CH, HJ, JK, KI e IC, construindo o pentágono $CHJKI$ (Figura 31).

Figura 31 – Pentágono regular inscrito no círculo



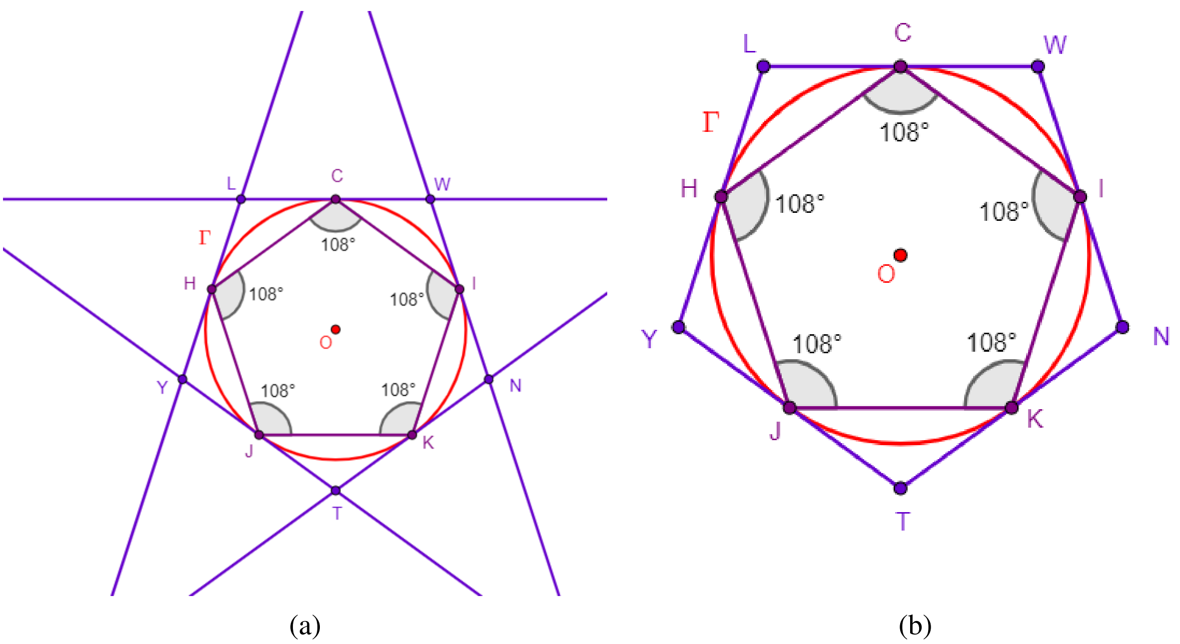
Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.3.2 Pentágono regular circunscrito

Aproveitando a construção do pentágono inscrito na circunferência, construiremos o pentágono circunscrito na circunferência. Para essa construção é necessário traçar as tangentes a circunferência que passam pelos vértices do pentágono inscrito $CHJKI$.

1. Na aba “Retas”, selecione o ícone “Reta Tangente”;
2. Selecione um dos vértices do pentágono, e em seguida selecione a circunferência, desse modo temos a primeira reta tangente;
3. Repita o passo para os demais vértices do pentágono para obter as cinco retas tangentes;
4. Na seção “Pontos” selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos” e na sequência selecione as retas tangentes duas a duas com o intuito de obter as interseções;
5. Marque os pontos de intersecções das retas tangentes, denotando-os por W, L, Y, T e N;
6. Na aba “Ferramentas”, selecione o ícone “Segmento” na seção de “Retas” para traçar os segmentos WN, NY, TY, YL e LW;
7. $WNTYL$ é um pentágono regular circunscrito no círculo (Figura 32).

Figura 32 – Construção do pentágono circunscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

Sabemos que o pentágono regular é um polígono de cinco lados, com os cinco lados e os cinco ângulos congruentes. Podemos tirar a prova e saber a veracidade das construções usando apenas o software GeoGebra. Basta seguir o passo a passo a seguir:

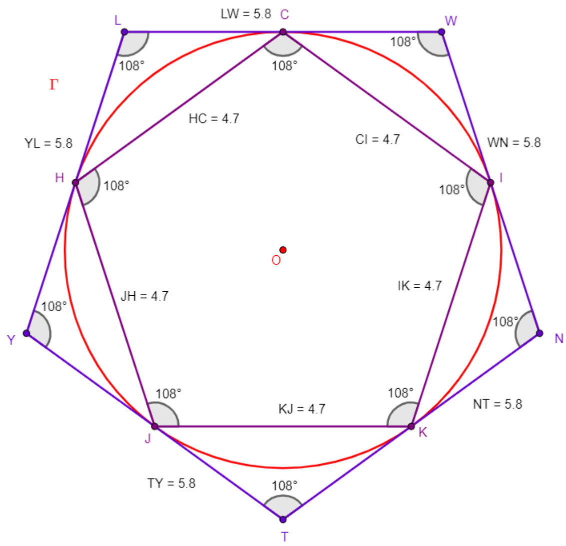
1. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Ângulo”;

2. Selecione, na sequência, trios de vértices respeitando o sentido anti-horário, por exemplo I, C, H (no pentágono inscrito) e também N, W e L (no pentágono circunscrito), para obter ângulos internos iguais a $108°$ e comprovar que todos os cinco ângulos internos são congruentes;

3. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Distância, Comprimento”;

4. Em seguida, selecione os lados dos pentágonos obtidos para comprovar que todos os cinco lados são congruentes (Figura 33).

Figura 33 – Pentágonos inscrito e circunscrito no círculo dado

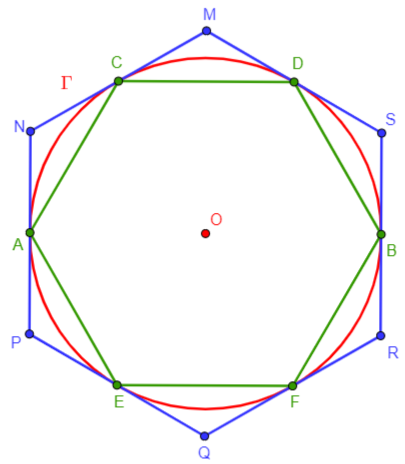


Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.4 Divisão do Círculo em 6 Partes Iguais - Hexágono Regular

5.4.1 Hexágono regular inscrito

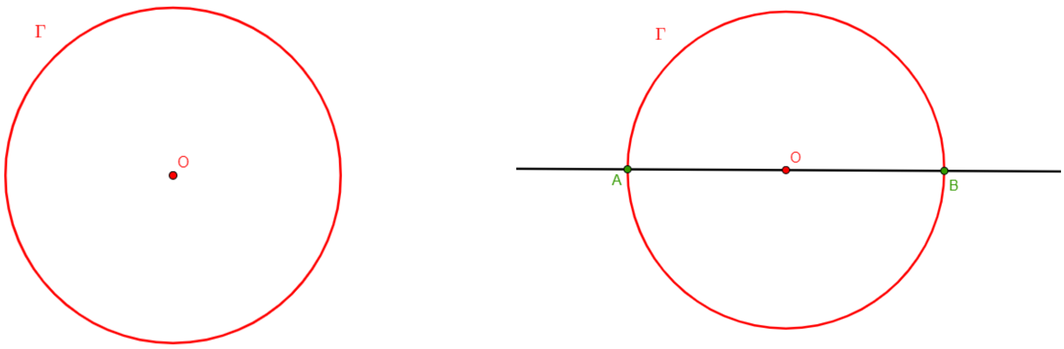
Figura 34 – Hexágonos regulares inscrito e circunscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

1. Abra o software GeoGebra;
2. Selecione a aba "Ferramentas";
3. Na seção "Círculos", Selecione o ícone "Circulo: Centro & Raio";
4. Marque o centro e chame-o de O e, em seguida, escolha um raio $r > 0$ qualquer, digamos $r = 4$;
5. Nomeie esse círculo de Γ;
6. Na seção "Retas", selecione o ícone "Reta" e trace a reta que passa por O e por um ponto qualquer do círculo, o qual chamamos de A;
7. Na seção "Pontos", encontre o ícone "Interseção de Dois Objetos" e, em seguida, selecione o círculo Γ e a reta $\overleftrightarrow{AO}$ para encontrar o segundo ponto de interseção entre estes objetos, e chame-o de ponto B (Figura 35);
8. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Círculo dados Centro e um de seus Pontos";
9. Em seguida, selecione os pontos B e O, de modo a obter o círculo de centro B e raio $\overline{BO}$
10. Denote-o por Γ_1;
11. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione os dois círculos Γ_1 e Γ construídos e marque os dois pontos de interseção entre eles, denote-os por D e F;

Figura 35 – Construção do hexágono regular inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

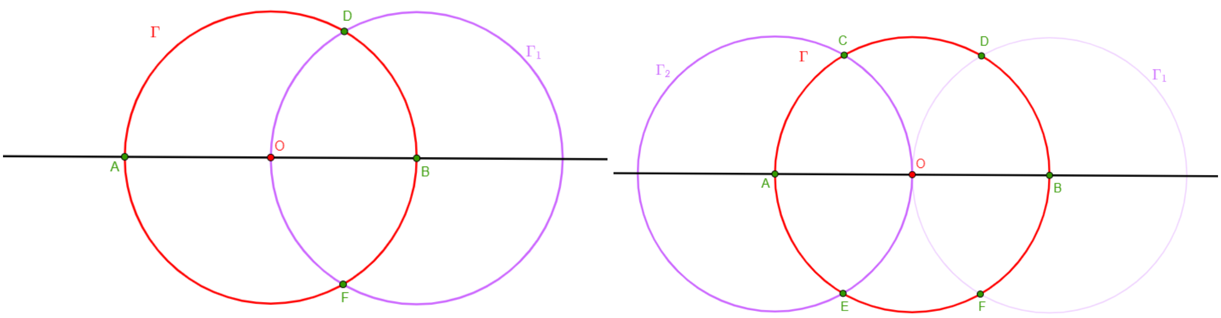
12. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Círculo dados Centro e um de seus Pontos”;

13. Marque os pontos A e O, de modo que o círculo esteja centrada em A e tenha raio $\overline{OA}$;

14. Denote-o de Γ_2;

15. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione os dois círculos Γ_2 e Γ construídos e marque os dois pontos de interseção entre eles, e denote-os por C e E (Figura 36);

Figura 36 – Construção do hexágono regular inscrito no círculo



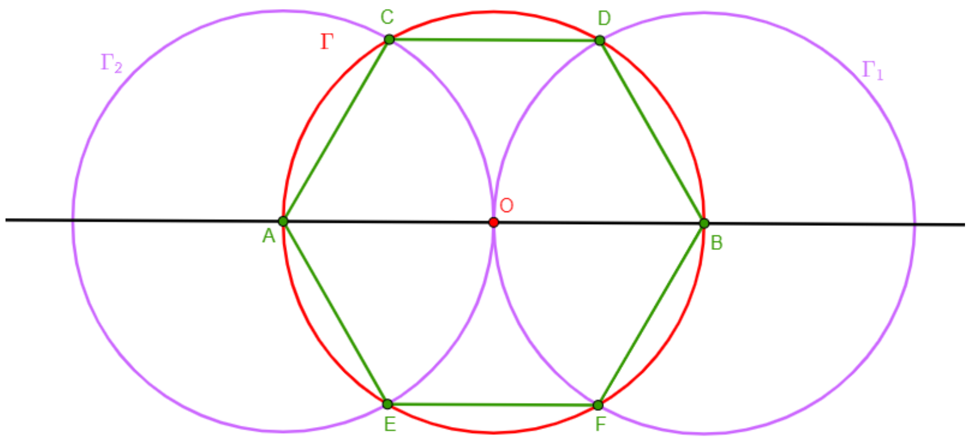
(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

16. Na seção "Retas", clique no ícone “Segmento” e una os pontos C e D, D e B, B e F, F e E, E e A, A e C e C e D, obtendo os segmentos CD, DB, BF, FE, EA, AC e CD.

17. $CDBFEA$ é um hexágono regular regular. (Figura 37).

Figura 37 – Hexágono regular inscrito no círculo dado



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.4.2 Hexágono regular circunscrito

Aproveitando a construção do hexágono inscrito na circunferência, construiremos o hexágono circunscrito na circunferência. Para essa construção é necessário traçar as tangentes, a circunferência que passam pelos vértices do hexágono inscrito $CDBFEA$.

1. Na aba “Retas”, selecione o ícone “Reta Tangente”;

2. Selecione um dos vértices do hexágono, e em seguida selecione a circunferência, desse modo temos a primeira reta tangente;

3. Repita o passo para os demais vértices do pentágono para obter as seis retas tangentes;

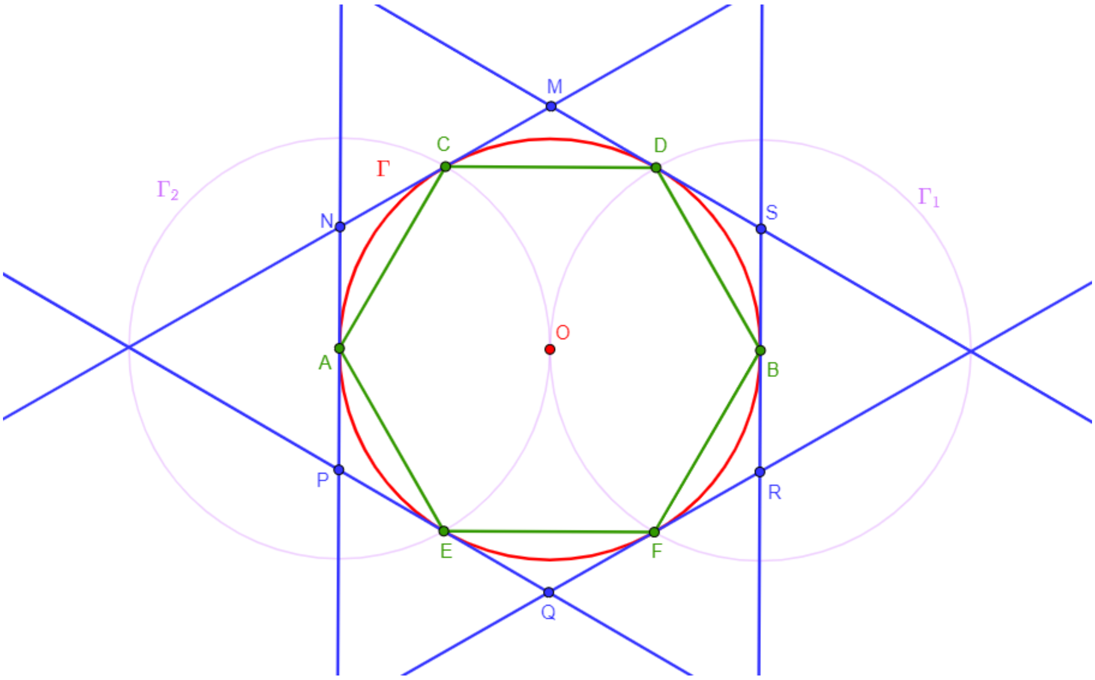
4. Na seção “Pontos” selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos” e na sequência selecione as retas tangentes duas a duas com o intuito de obter as interseções;

5. Marque os pontos de intersecções das retas tangentes, denotando-os por M, N, P, Q, R e S;

6. Na aba “Ferramentas” selecione o ícone “Segmento” na seção de “Retas” para traçar os segmentos MN, NP, PQ, QR, RS e SM;

7. $MNPQRS$ é um hexágono (Figura 38).

Figura 38 – Construção do hexágono regular circunscrito no círculo

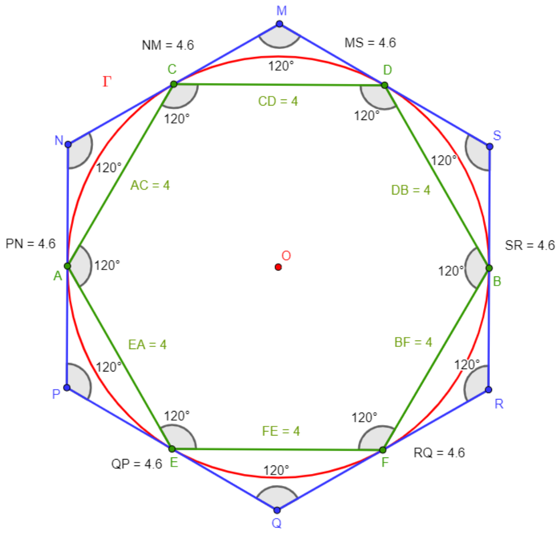


Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

O hexágono regular é um polígono de seis lados, com os seis lados e os seis ângulos congruentes. Podemos tirar a prova e saber a veracidade das construções usando apenas o software GeoGebra. Basta seguir o passo a passo a seguir:

1. Na aba "Ferramentas", na seção de "Medições", selecione o ícone "Ângulo";
2. Selecione, na sequência, trios de vértices respeitando o sentido anti-horário para obter ângulos internos iguais a 120° e comprovar que todos os seis ângulos internos são congruentes;
3. Na aba "Ferramentas", na seção de "Medições", selecione o ícone "Distância, Comprimento";
4. Em seguida, selecione os lados dos hexágonos obtidos para comprovar que todos os seis lados são congruentes (Figura 39).

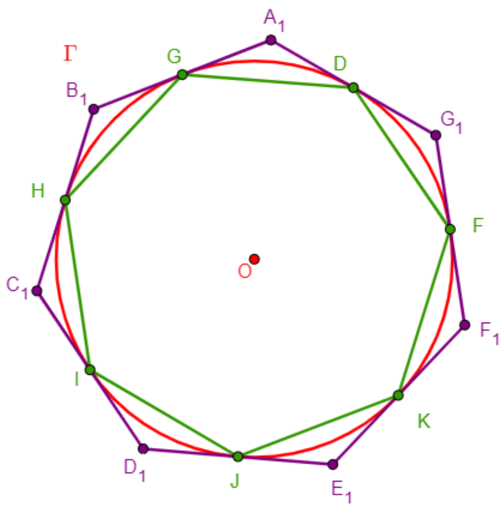
Figura 39 – Hexágonos regulares inscrito e circunscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.5 Divisão do Círculo em 7 Partes Iguais - Heptágono Regular

Figura 40 – Heptágonos regulares inscrito e circunscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.5.1 Heptágono regular inscrito

1. Abra o software GeoGebra;
2. Selecione a aba “Ferramentas”;
3. Na seção “Círculos”, Selecione o ícone “Circulo: Centro & Raio”;

4. Marque o centro e chame-o de O e, em seguida, escolha um raio $r > 0$ qualquer, digamos $r = 4$;

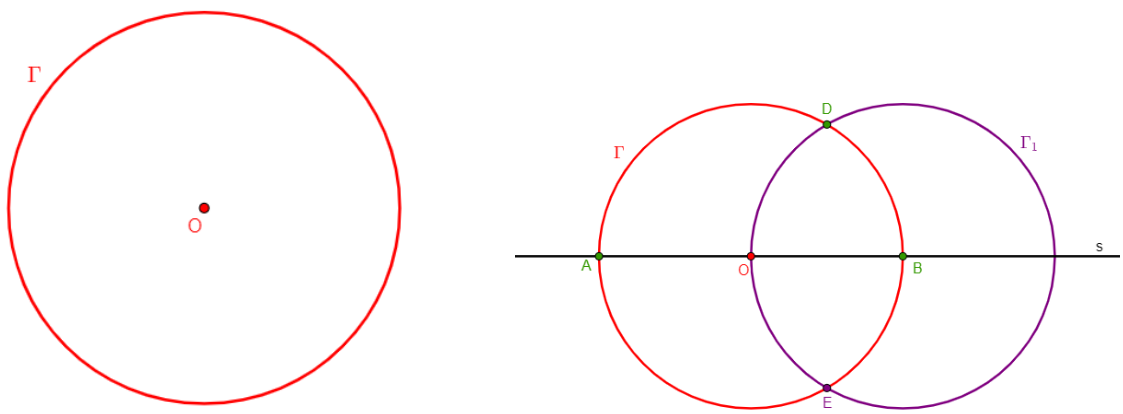
5. Chame esse círculo de Γ;

6. Na seção "Retas", marque o ícone "Reta", e trace a reta que passa por O e por um ponto qualquer do círculo, chame-o de A;

7. Denote a reta $\overleftrightarrow{AO}$ por s;

8. Na seção "Pontos", encontre o ícone "Interseção de Dois Objetos" e, em seguida, selecione o círculo Γ e a reta $\overleftrightarrow{AO}$ para encontrar o segundo ponto de interseção entre estes objetos, chame-o de B (Figura 41);

Figura 41 – Construção do heptágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

9. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

10. Marque o ponto O e o ponto B, desse modo temos uma circunferência centrada em B e raio $\overline{OB}$;

11. Denote-a de Γ_1;

12. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e marque os pontos interseção de Γ com Γ_1,denote-os de D e E;

13. Na seção "Construções", selecione o ícone "Mediatriz";

14. Marque os pontos O e B;

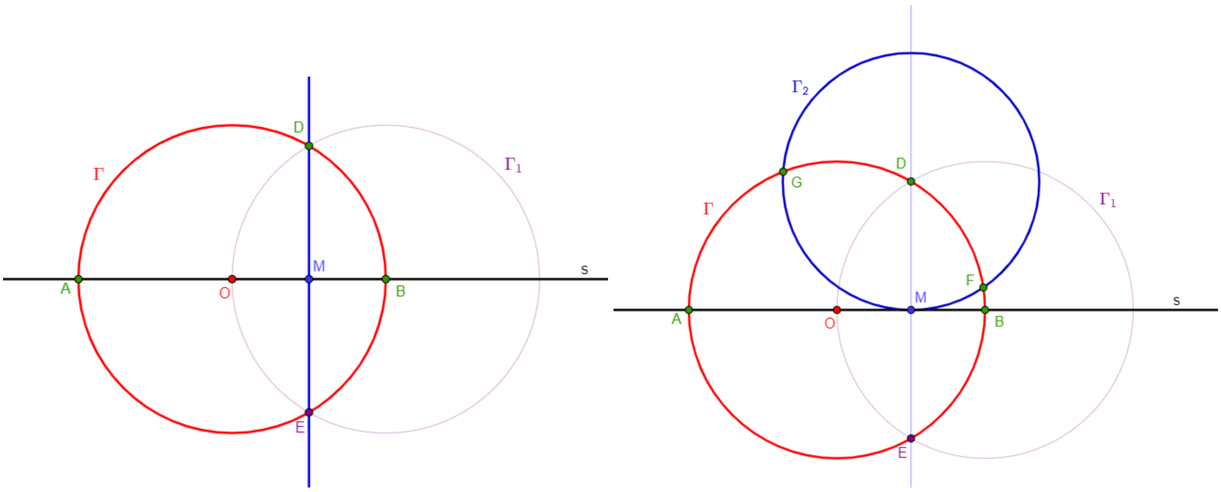
15. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e marque o ponto interseção da mediatriz com a reta s, denote-o de M;

16. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso", marque os pontos D e M, de modo que a circunferência esteja centrada em D e raio$=\overline{DM}$;

17. Denote-a de Γ_2;

18. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e marque os pontos interseções de Γ_2 com Γ, denote-os de F e G (Figura 42);

Figura 42 – Construção do heptágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

19. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

20. Marque os pontos G e D, de modo que a circunferência seja centrada em G e raio$=\overline{GD}$

21. Denote-a de Γ_3;

22. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_3 e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por H;

23. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

24. Faça marcações nos pontos H e G, garantindo que a circunferência tenha seu centro em H e seu raio seja igual à distância entre H e G.

25. Denote-a de Γ_4;

26. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_4 e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por I;

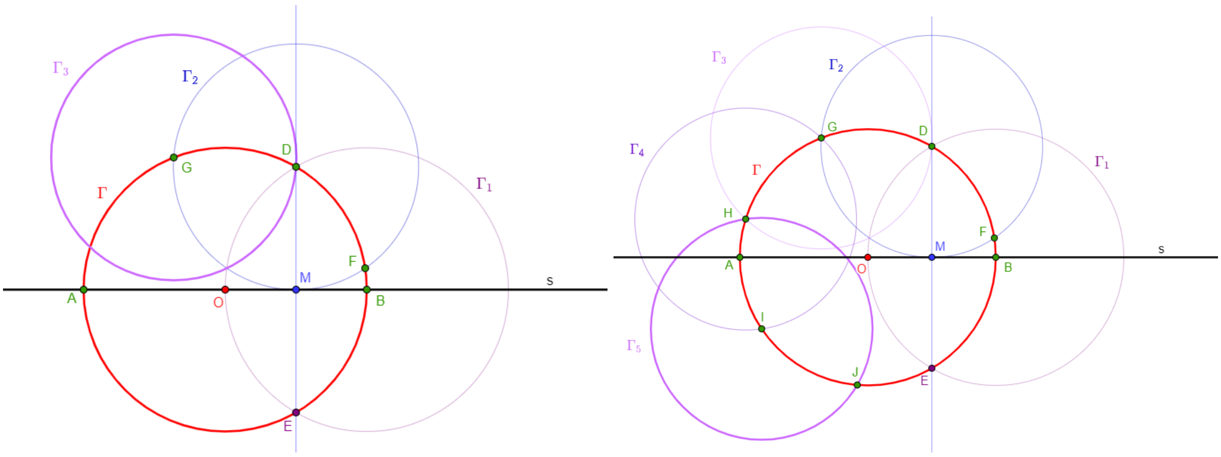
27. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

28. Marque os pontos I e H, de modo que a circunferência seja centrada em H e raio$= \overline{IH}$

29. Denote-a de Γ_5;

30. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_5 e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por J (Figura 43);

Figura 43 – Construção do heptágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

31. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

32. Marque os pontos J e I, de modo que a circunferência seja centrada em J e raio$= \overline{JI}$

33. Denote-a de Γ_6

34. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_6 e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por K;

35. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

36. Marque os pontos K e J, de modo que a circunferência seja centrada em K e raio$= \overline{KJ}$

37. Denote-a de Γ_7;

38. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

39. Marque os pontos B e K, de modo que a circunferência seja centrada em B e raio$= \overline{BK}$

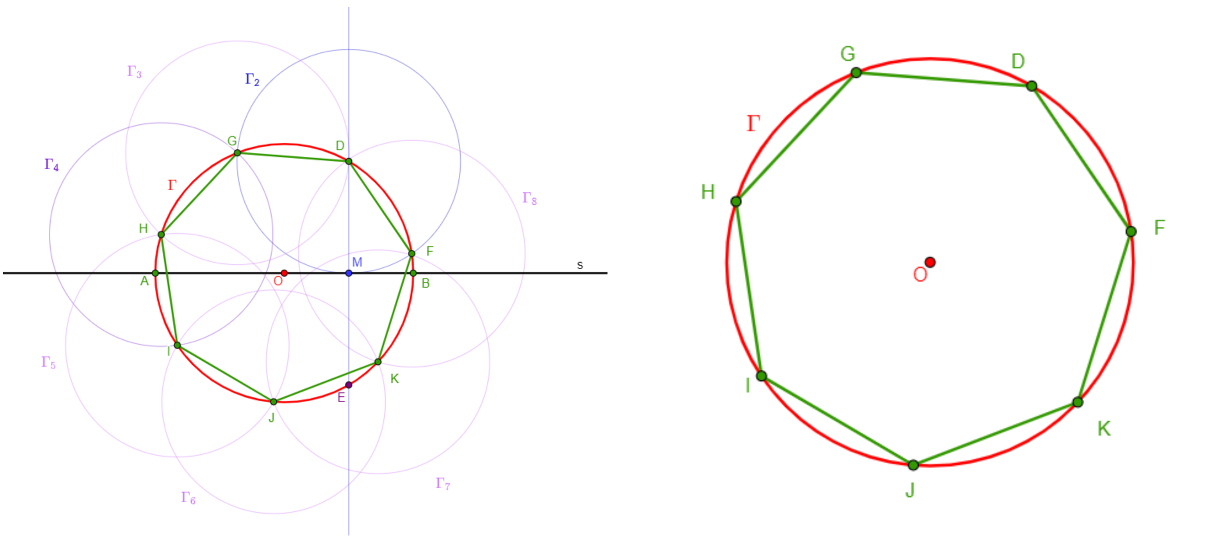
40. Denote-a de Γ_8

41. Observe que a interseção entre Γ_8 e Γ não ocorre exatamente no ponto D, evidenciando que a construção não é exata;

42. Na seção “Retas”, selecione o ícone “Segmento”, ligue os pontos: D e G, G e H, H e I, I e J, J e K, K e F e F e D;

43. $DGHIJKF$ é um heptágono (Figura 44).

Figura 44 – Construção do heptágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

OBSERVAÇÃO

A construção do heptágono regular, ou melhor, a divisão do círculo em 7 partes iguais é aproximada. Vamos calcular o erro cometido.

Podemos calcular o erro que se comete tomando, $\overline{DM}$ como a medida do lado do heptágono. Para isso calculamos, usando trigonometria, as medidas $\overline{DB} = L$, $\overline{OD} = \overline{OA} = R$ e do ângulo $D\hat{O}B = \alpha = \dfrac{360^\circ}{n}$.

Traçando ON perpendicular a DB. No triângulo OBD é isósceles, pois OD e OB são raios. Assim, ON é altura, mediana e bissetriz, de onde segue que

$$\overline{DM} = \overline{OD} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} = R \cdot \sin\frac{360^\circ}{2n} \Rightarrow L = 2R \cdot \sin\frac{180^\circ}{n},$$

fórmula geral que nos dá o lado de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio R.

Para n igual a 7, teremos $L = 2R\sin\dfrac{360^\circ}{7}$ ou $L = 08678R$. Pela construção feita tomamos para o lado do heptágono a altura do triângulo equilátero ODB, logo: $L' = \overline{DM} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = 0,8660R$.

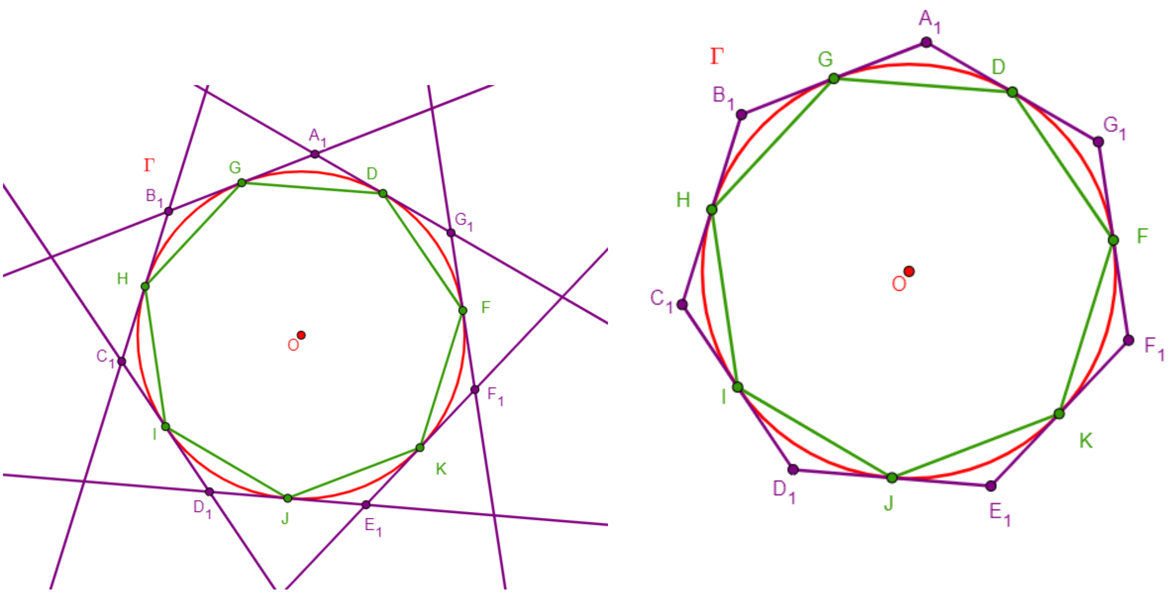
Assim, o erro acometido é de aproximadamente $L - L' = 0,0018R$, por falta e inferior a $0,002R$.

5.5.2 Heptágono regular circunscrito

Aproveitando a construção do heptágono inscrito na circunferência, construiremos o heptágono circunscrito na circunferência. Para essa construção é necessário traçar as tangentes, a circunferência que passam pelos vértices do heptágono inscrito $DGHIJKF$.

1. Na aba "Retas", selecione o ícone "Reta Tangente";
2. Selecione um dos vértices do heptágono, e em seguida selecione a circunferência, desse modo temos a primeira reta tangente;
3. Repita o passo para os demais vértices do heptágono para obter as sete retas tangentes;
4. Na seção "Pontos" selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos" e na sequência selecione as retas tangentes duas a duas com o intuito de obter as interseções;
5. Marque os pontos onde as retas tangentes se interceptam e designe-os como $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ e G_1.
6. Na aba "Ferramentas" selecione o ícone "Segmento" na seção de "Retas" para traçar os segmentos $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1G_1$ e G_1A_1;
7. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$ é um heptágono regular (Figura 45).

Figura 45 – Construção do heptágono aproximadamente regular circunscrito no círculo



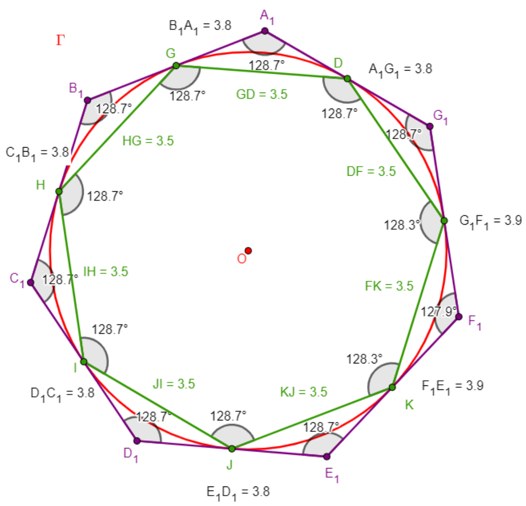
(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

O heptágono regular é um polígono de sete lados, com os sete lados e os sete ângulos congruentes. Podemos tirar a prova e saber a veracidade das construções usando apenas o software GeoGebra. Basta seguir o passo a passo a seguir:

1. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Ângulo”;
2. Selecione, na sequência, trios de vértices respeitando o sentido anti-horário para obter ângulos internos iguais a aproximadamente iguais a $128,57^\circ$;
3. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Distância, Comprimento”;
4. Em seguida, selecione os lados dos heptágonos obtidos para comprovar que todos lados possuem medidas próximas (Figura 46).

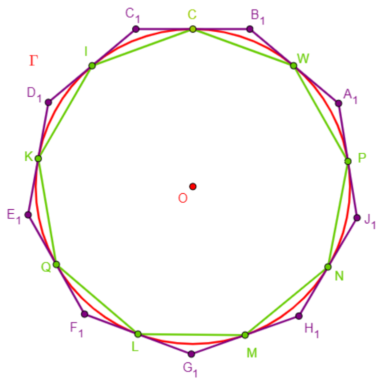
Figura 46 – Heptágonos aproximadamente regulares inscrito e circunscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.6 Divisão do Círculo em 9 Partes Iguais - Eneágono Regular

Figura 47 – Eneágonos aproximadamente regulares inscrito e circunscrito no círculo

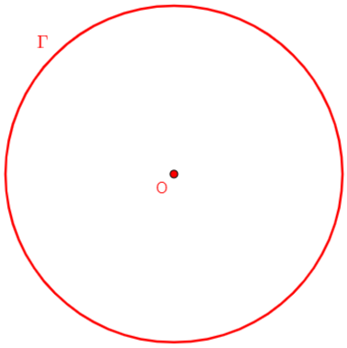


Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

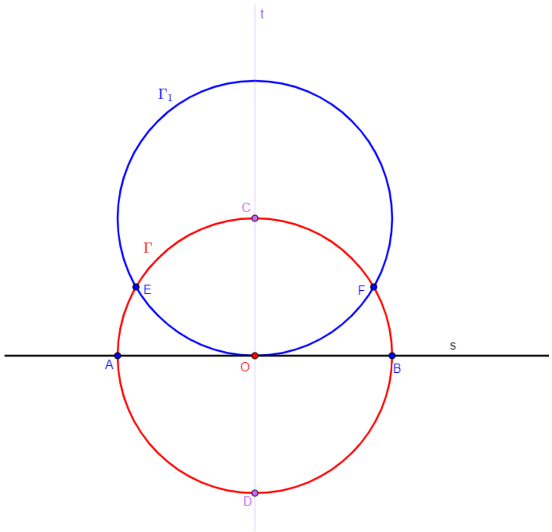
5.6.1 Eneágono regular inscrito

1. Abra o software GeoGebra;
2. Selecione a aba "Ferramentas";
3. Na seção "Círculos", Selecione o ícone "Circulo: centro & raio";
4. Marque o centro e chame-o de O e, em seguida, escolha um raio $r > 0$ qualquer, digamos $r = 4$ (Figura 48a);
5. Chame esse círculo de Γ;
6. Na seção "Retas", marque o ícone "Reta", e trace a reta que passa por O e por um ponto qualquer do círculo, o qual chamamos de A;
7. Denote-a de s (Figura 48b);
8. Na seção "Pontos", encontre o ícone "Interseção de Dois Objetos" e, em seguida, selecione o círculo Γ e a reta $\overleftrightarrow{AO}$ para encontrar o segundo ponto de interseção entre estes objetos, o qual chamamos de B (Figura 48b);
9. Na seção "Construções", selecione o ícone "Mediatriz" e, em seguida, selecione os pontos A e B (Figura 48b);
10. Denote a mediatriz de AB por de t (Figura 48b);
11. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e marque a interseção de t com Γ e chame-os de C e D (Figura 48b);

Figura 48 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a)



(b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

12. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

13. Selecione os pontos C e O, de modo que a circunferência seja centrada em C e raio$=\overline{CO}$

14. Denote-a de Γ_1 (Figura 49a);

15. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_1 e Γ construídas e marque os dois pontos de interseção entre elas e denote-os por E e F (Figura 49a);

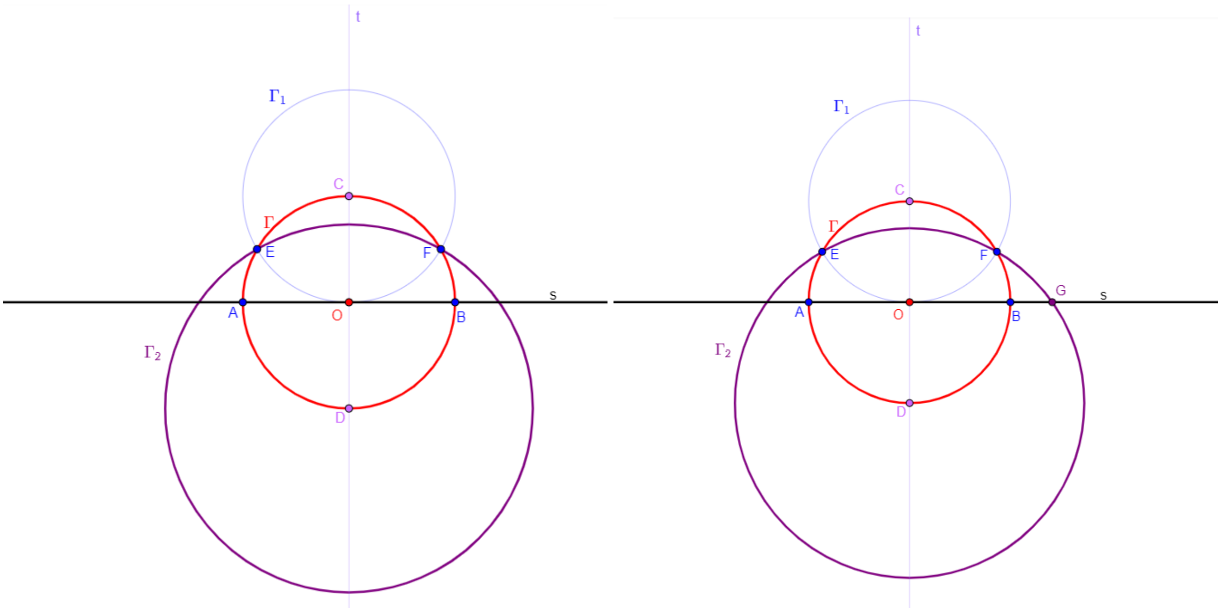
16. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

17. Selecione os pontos D e F, de modo que a circunferência seja centrada em D e raio$=\overline{DF}$ (Figura 49a);

18. Denote-a de Γ_2 (Figura 49a);

19. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_2 e s construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por G (Figura 49b);

Figura 49 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a) (b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

20. Na seção “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

21. Selecione os pontos G e C, de modo que a circunferência seja centrada em G e raio$=\overline{GC}$

22. Denote-a de Γ_3;

23. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_3 e s construídas e marque os dois pontos de interseção entre elas e denote-os por H e J;

24. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

25. Selecione os pontos H e A, de modo que a circunferência seja centrada em G e raio$=\overline{HA}$; Obs: Esse raio$=\overline{HA}$ será a medida para a divisão da nossa circunferência em 9 partes:

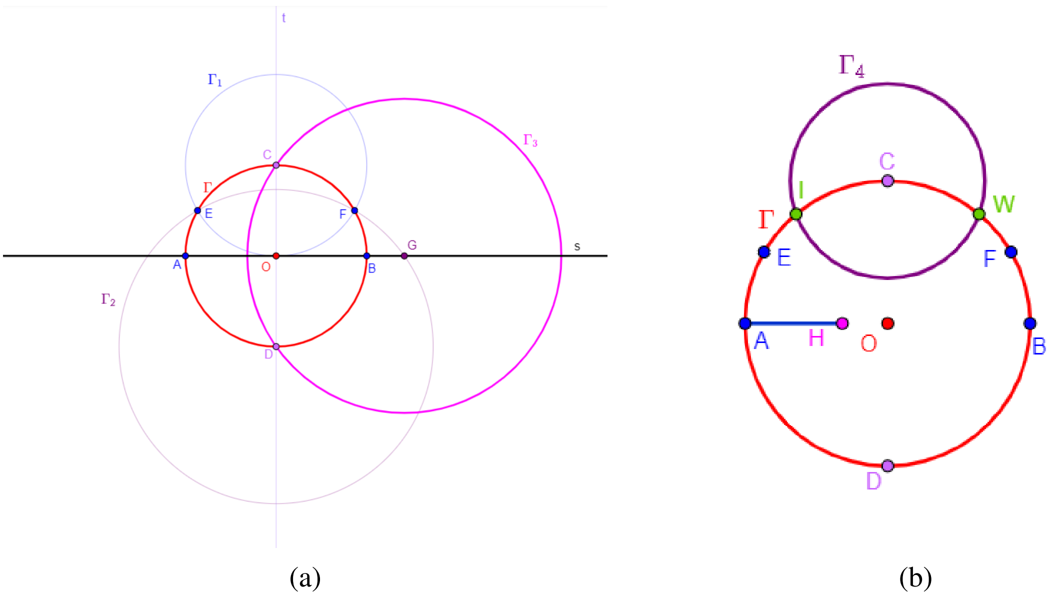
26. Mova essa até o ponto C, de modo que ela fique centrada no ponto C;

27. Denote-a de Γ_4;

28. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e marque os pontos intersecções de Γ_4 com Γ;

29. Denote-os I e W (Figura 50);

Figura 50 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

30. Na seção "Círculos", selecione o ícone "Compasso";

31. Marque os pontos I e C, de modo que a circunferência seja centrada em I e raio$=\overline{IC}$

32. Denote-a de Γ_5;

33. Na aba "Pontos", selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos", e marque o ponto intersecções de Γ_5 e Γ;

34. Denote-o K;

35. Na aba “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

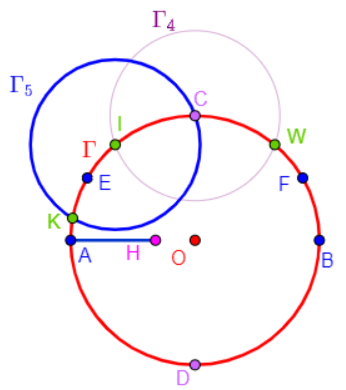
36. Marque os pontos K e I, de modo que a circunferência seja centrada em K e raio= $\overline{KI}$

37. Denote-a de Γ_6;

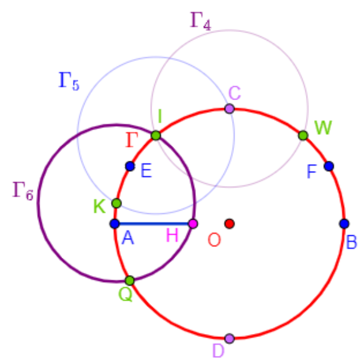
38. Na aba “Pontos”, selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos”, e marque o ponto intersecções de Γ_6 e Γ;

39. Denote-o Q (Figura 51);

Figura 51 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a)



(b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

40. Na aba “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

41. Marque os pontos Q e K, de modo que a circunferência seja centrada em Q e raio= $\overline{QK}$

42. Denote-a de Γ_7;

43. Na aba “Pontos”, selecione o ícone “Interseção de Dois Objetos”, e marque o ponto intersecções de Γ_7 e Γ;

44. Denote-o L;

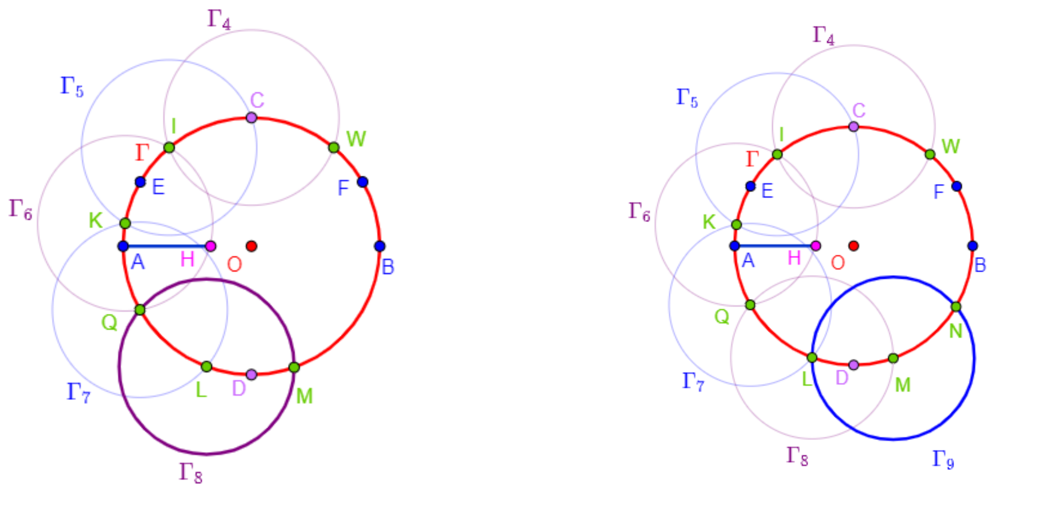
45. Na aba “Círculos”, selecione o ícone “Compasso”;

46. Marque os pontos L e Q, de modo que a circunferência seja centrada em L e raio= $\overline{LQ}$

47. Denote-a de Γ_8;

48. Na seção “Pontos”, selecione o ícone “Interseção entre Dois Objetos” e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_8 e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por M (Figura 52);

Figura 52 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo

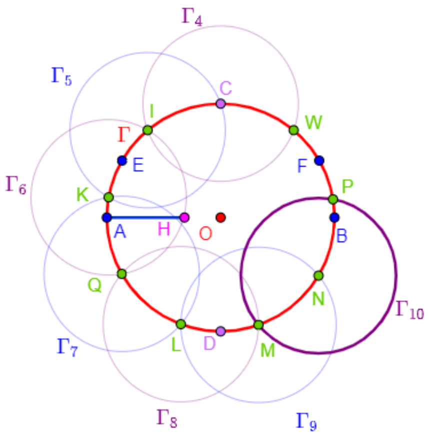


(a) (b)

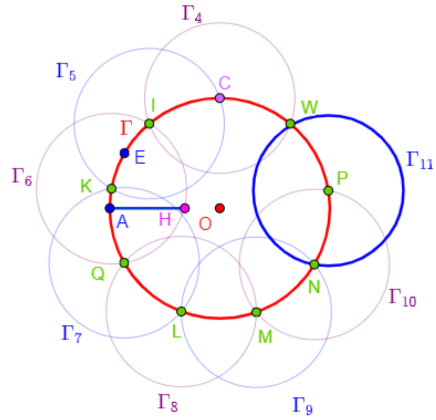
Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

49. Na aba "Círculos", selecione o ícone "Compasso";
50. Marque os pontos M e L, de modo que a circunferência seja centrada em M e raio$= \overline{ML}$
51. Denote-a de Γ_9;
52. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_9 e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por N;
53. Na aba "Círculos", selecione o ícone "Compasso";
54. Marque os pontos N e M, de modo que a circunferência seja centrada em N e raio$= \overline{NM}$
55. Denote-a de Γ_{10};
56. Na seção "Pontos", selecione o ícone "Interseção entre Dois Objetos" e, em seguida, selecione as duas circunferências Γ_{10} e Γ construídas e marque o ponto de interseção entre elas e denote-o por P;
57. Na aba "Círculos", selecione o ícone "Compasso";
58. Marque os pontos P e N, de modo que a circunferência seja centrada em P e raio$= \overline{PN}$
59. Denote-a de Γ_{11};
60. Note que a interseção entre Γ e Γ_{11} coincide no ponto W previamente determinado(Figura 53);

Figura 53 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo



(a)



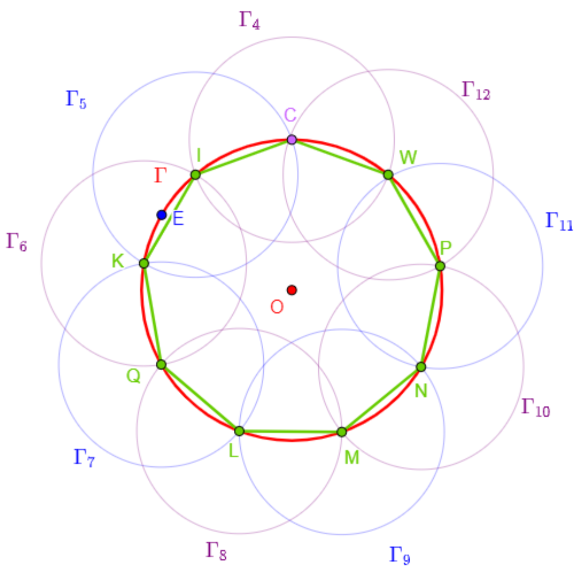
(b)

Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

61. Na seção “Retas”, selecione o ícone “Segmento”, ligue os pontos: C e I, I e K, K e Q, Q e L, L e M, M e N, N e P, P e W e W e C

62. $CIKQLMNPW$ é um eneágono (Figura 54).

Figura 54 – Construção do eneágono aproximadamente regular inscrito no círculo



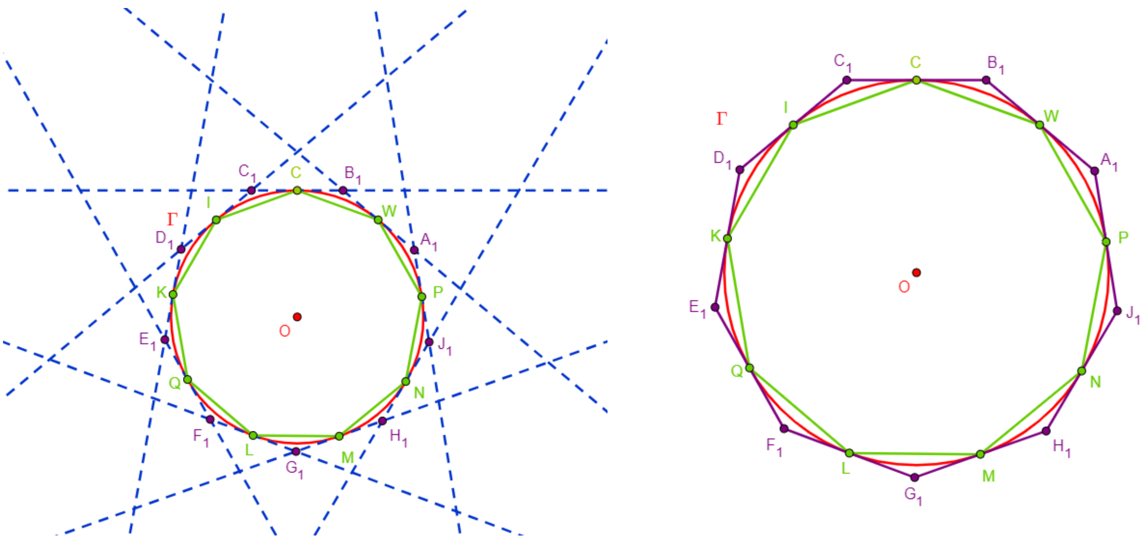
Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

5.6.2 Eneágono regular circunscrito

Aproveitando a construção do eneágono inscrito na circunferência, construiremos o eneágono circunscrito na circunferência. Para essa construção é necessário traçar as tangentes, a circunferência que passam pelos vértices do eneágono inscrito $CIKQLMNPW$.

1. Na aba "Retas", selecione o ícone "Reta Tangente";
2. Selecione um dos vértices do eneágono, e em seguida selecione a circunferência, desse modo temos a primeira reta tangente;
3. Repita o passo para os demais vértices do eneágono para obter as nove retas tangentes;
4. Na seção "Pontos" selecione o ícone "Interseção de Dois Objetos" e na sequência selecione as retas tangentes duas a duas com o intuito de obter as interseções;
5. Marque os pontos onde as retas tangentes se interceptam e designe-os como $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$, G_1, H_1 e J_1.
6. Na aba "Ferramentas" selecione o ícone "Segmento" na seção de "Retas" para traçar os segmentos $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1G_1$, G_1H_1, H_1J_1 e J_1A_1;
7. $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1J_1$ é um eneágono aproximadamente regular (Figura 55).

Figura 55 – Construção do eneágono aproximadamente regular circunscrito no círculo



(a) (b)

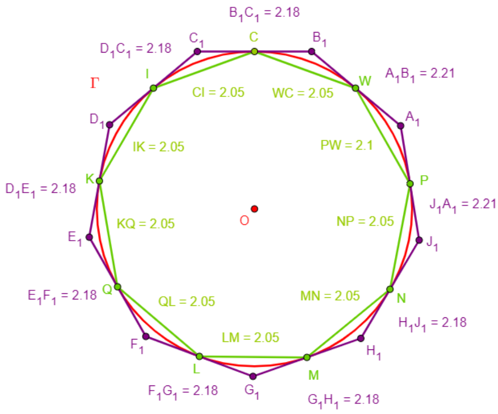
Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

O eneágono regular é um polígono de nove lados, com os nove lados e os nove ângulos congruentes. Podemos tirar a prova e saber a veracidade das construções usando apenas o software GeoGebra. Basta seguir o passo a passo a seguir:

1. Na aba “Ferramentas”, na seção de “Medições”, selecione o ícone “Distância, Comprimento”;

2. Em seguida, selecione os lados dos eneágono obtidos para comprovar que todos lados possuem medidas próximas (Figura 56).

Figura 56 – Eneágonos aproximadamente regulares inscrito e circunscrito no círculo



Elaborado pela autora utilizando o software GeoGebra, 2025.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, estudamos as relações entre círculos e polígonos na Geometria Euclidiana Plana. Vimos que, embora os polígonos regulares tenham sempre um círculo inscrito e um circunscrito, alguns polígonos não regulares também podem ter essas propriedades com certas condições. Isso mostra que a relação entre círculos e polígonos é mais ampla e muito interessante. Além disso, ao compreender essas relações, podemos visualizar melhor como essas formas se comportam, quando são relacionadas e como podem ser aplicadas em diferentes contextos matemáticos e práticos.

Também analisamos como é possível construir polígonos regulares dividindo um círculo em n partes iguais. Foi possível analisar, que, para alguns valores de n , essa divisão pode ser feita com régua e compasso, mas para outros não é possível de forma exata. Porém é possível a realização de forma aproximada, isso nos leva a entender melhor as limitações das construções geométricas.

No ensino, destacamos a importância do uso de desenhos geométricos e de softwares de geometria dinâmica, como sugerido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essas ferramentas ajudam professores e alunos a visualizar e entender melhor os conceitos geométricos, tornando o aprendizado mais dinâmico e interativo.

O uso do software GeoGebra, foi de extrema importância para realização deste trabalho, permitindo construções precisas e visualização clara das relações entre círculos e polígonos. Essa ferramenta facilitou a exploração de conceitos e ajudou a reforçar o aprendizado.

Esperamos que este estudo contribua para o aprendizado da Geometria e inspire novas pesquisas sobre o tema. Além disso, desejamos ampliar o conhecimento na área da pesquisa e despertar o interesse para o surgimento de novos estudos a partir deste trabalho. Com isso, acreditamos que será possível aprofundar ainda mais as relações entre círculos e polígonos, incentivando novas descobertas e aplicações dentro da Matemática e do ensino geométrico.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

BOCCATO, V. R. C. **Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigocientífico como forma de comunicação.** Rev. Odontol. Univ. Cidade São Paulo, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006. Disponível em: `https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/rdbci/article/view/1896`

BRASIL, MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO. **Documento Curricular do Tocantins: para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental**. 1ª ed. 2019.

BRASIL. MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CULTURA. **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: MEC, 1996.

BUSSAB, José; MILIES, Francisco. **A Geometria na antiguidade clássica.** São Paulo: FTD, 1999.

DOLCE, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau . **Fundamentos de matemática elementar - Volume 9: Geometria plana**. 7.ed. São Paulo: Atual, 1993.

EUCLIDES. **Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo.** São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GIONGO, Afonso Rocha. **Curso de desenho geométrico** 34.ed. São Paulo: Nobel, 1984.

MENEZES, Afonso H.Novaes et al. **Metodologia científica:** teoria e aplicação na educação a distância. Petrolina- PE: Universidade Federal do Vale do São Francisco, 2019. 83 p.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

APÊNDICE A

Este apêndice tem por finalidade exibir alguns conceitos e resultados complementares que, apesar de coadjuvante mediante o tema apresentado, são essenciais para a boa compreensão do texto. Todos os resultados podem ser encontrados nas seguintes referências bibliográficas (MUNIZ NETO, 2022) e (BARBOSA, 2006).

Proposição A1. A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é $180°$.

Proposição A2. Se dois triângulos retângulos e isósceles possuem hipotenusas de mesma medida, então eles são congruentes. Particularmente, os outros lados possuem todos a mesma medida.

Demonstração. Sejam ABC e EFG triângulos retângulos em A e E, respectivamente, e ambos isósceles com bases BC e FG, que também são suas hipotenusas e, segundo as hipóteses possuem a mesma medida (a qual denotaremos por z). Se $\overline{AB} = \overline{AC} = x$ e $\overline{EF} = \overline{EG} = y$, então do Teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + x^2 = 2x^2,$$

e

$$z^2 = xy^2 + y^2 = 2y^2,$$

consequentemente, $2x^2 = 2y^2$, implicando que $x = y$ (já que $x, y > 0$ são medidas). Assim, ABC e EFG pelo caso de congruência lado-lado-lado. ■

Definição A 1. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.

Definição A 2. Um quadrilátero convexo é um retângulo se possuir todos os ângulos congruentes, ou seja, medindo $90°$.

Definição A 3. Um quadrilátero convexo é um losango se possuir todos os lados congruentes.

Definição A 4. Um quadrilátero convexo é um quadrado se for um retângulo e um losango simultaneamente.

Proposição A3. [Muniz Neto, 2022, p.60] Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e só se, suas diagonais intersectam-se em seus respectivos pontos médios.

Proposição A4. [Muniz Neto, 2022, p.70] Um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, suas diagonais tiverem comprimentos iguais.

Proposição A5. [Muniz Neto, 2022, p.71] Um paralelogramo é um losango se, e somente se, tiver diagonais perpendiculares.

Proposição A6. Se um triângulo ABC possui todos os ângulos internos medindo $60°$, então ABC é equilátero.

Proposição A7. [Muniz Neto, 2022, p.100] Seja Γ um círculo de centro O e P um ponto exterior a ele. Se $A,\ B \in \Gamma$ são tais que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são tangentes a Γ, então:

1. $\overline{PA} = \overline{PB}$

2. $\overleftrightarrow{PO}$ é a mediatriz de AB.

3. $\overleftrightarrow{PO}$ é a bissetriz de $A\hat{O}P$ e $A\hat{P}B$.

4. $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

A proposição acima pode ser reescrita da seguinte forma

Proposição A8. Seja AB uma corda que não é diâmetro do círculo Γ de centro O. Seja P o ponto de interseção das retas tangentes ao círculo passando por A e B (sabemos que esse ponto existe, pois AB não é diâmetro). Então o triângulo APB é isósceles de base AB. Mais ainda, como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é $360°$, o ângulo $A\hat{P}B = 180° - A\hat{O}B$.