UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ALISSON SOUSA SANTOS DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE AS *2-SEQUÊNCIAS*

ARAGUAÍNA
2023

ALISSON SOUSA SANTOS DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE AS *2-SEQUÊNCIAS*

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S725e Sousa Santos da Silva, Alisson.
Um estudo sobre as 2-sequências. / Alisson Sousa Santos da Silva. – Araguaína, TO, 2023.
41 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2023.
Orientador: José Carlos de Oliveira Junior

1. Sequências. 2. Padrões Numéricos. 3. 2-Sequências. 4. Periodicidade. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ALISSON SOUSA SANTOS DA SILVA

UM ESTUDO SOBRE AS *2-SEQUÊNCIAS*

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: 14 / 12 / 2023 .

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR
Data: 14/12/2023 23:21:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br ALVARO JULIO YUCRA HANCCO
Data: 15/12/2023 08:36:58-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Documento assinado digitalmente
gov.br RENATA ALVES DA SILVA
Data: 14/12/2023 23:23:16-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Dedico este trabalho a minha mãe, a minha benfeitora que esteve comigo a minha vida inteira e nas minhas principais dificuldades.

AGRADECIMENTOS

Expresso, inicialmente, meus sinceros agradecimentos à minha família, em especial à minha mãe, Consola, cujo apoio incansável e sacrifícios inestimáveis foram fundamentais para que eu alcançasse esta fase quase conclusiva de minha formação acadêmica. Aos meus dedicados amigos e colegas da universidade, em particular a Wellyson, Áurea e Iris, manifesto minha profunda gratidão por sua constante colaboração e apoio ao longo de toda a minha jornada acadêmica, indo além das expectativas. Àqueles que desempenharam papéis cruciais em minha formação, destaco meu especial reconhecimento ao orientador, cuja paciência, amizade e orientação foram essenciais durante o processo de elaboração desta monografia. Agradeço também aos respeitáveis professores da universidade, cujo conhecimento compartilhado enriqueceu minha capacidade de produção acadêmica. A todos, expresso minha imensa gratidão por suas contribuições significativas no meu percurso acadêmico.

A virtude do bem viver está nos princípios morais.

(Seu Madruga)

RESUMO

A presente monografia apresenta uma contribuição original para a teoria das sequências numéricas por meio da introdução de uma nova sequência denominada 2-sequência. O propósito central deste estudo é associar padrões a conceitos matemáticos preexistentes, buscando não apenas validar resultados já conhecidos, mas também abrir caminho para novas explorações e descobertas. Ao analisar teoremas e corolários, destacamos a utilização de artifícios matemáticos fundamentais, como o mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, sequências numéricas e periódicas, assim como o período de uma sequência. Buscamos não apenas apresentar e definir a conceituação adequada de cada artifício, mas também contextualizá-los numericamente para facilitar a compreensão do leitor. As demonstrações fornecidas não apenas validam resultados previamente conhecidos, mas também indicam possíveis oportunidades de aprimoramento e aprofundamento. As 2-sequências, sendo um ponto de partida inicial, mostram-se propícias para futuras explorações envolvendo conceitos matemáticos mais avançados.

Palavras-chave: Sequências. Padrões Numéricos. 2-Sequências. Periodicidade.

ABSTRACT

This thesis presents an original contribution to the theory of numerical sequences through the introduction of a new sequence called the 2-sequence. The central purpose of this study is to associate patterns with pre-existing mathematical concepts, aiming not only to validate known results but also to pave the way for new explorations and discoveries. In analyzing theorems and corollaries, we highlight the use of fundamental mathematical tools, such as the least common multiple, greatest common divisor, numerical and periodic sequences, as well as the period of a sequence. Our goal is not only to present and define the appropriate conceptualization of each tool but also to provide numerical context for a better understanding by the reader. The demonstrations provided not only validate previously known results but also indicate potential opportunities for improvement and further exploration. The 2-sequences, being an initial starting point, prove to be conducive to future explorations involving more advanced mathematical concepts.

Keywords: Sequences. Numeric Patterns. 2-Sequences. Periodicity.

Sumário

Capítulo 1
Introdução

Na Matemática, a busca por padrões é uma jornada que transcende as fronteiras das disciplinas, envolvendo a Álgebra, a Geometria, e uma vastidão de áreas. Não obstante, analisando com maiores detalhes segundo os estudos de Vale [12] podemos revelar a matemática intrínseca presente em diversos aspectos do mundo ao nosso redor, de modo que os padrões abrangem desde as partículas mais diminutas, como a simetria na dispersão de um fóton, até as regiões mais distantes do universo, exemplificadas pelos anéis simétricos resultantes da explosão de uma supernova.

Dessa forma, a investigação de padrões numéricos nos conduz a uma exploração de territórios que fascinaram matemáticos ao longo dos séculos como, por exemplo, destaca-se o renomado matemático Carl Friedrich Gauss, cujas contribuições à teoria dos números revelaram uma apreciação aguçada pelos padrões aritméticos. Assim, suas descobertas, como a fórmula da soma da progressão aritmética, não apenas ressaltam sua genialidade, mas também evidenciam a importância de reconhecer padrões como ferramentas cruciais na manipulação de sequências numéricas.

A partir disso, podemos verificar a relevência do estudo envolvendo às sequências numéricas, bem como destacado por Ponte *et. al* [10]:

> [...] O trabalho com sequências pictóricas e com sequências numéricas finitas ou infinitas (estas últimas chamadas sucessões) envolve a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações. Note-se que a descrição dessas generalizações em linguagem natural já exige uma grande capacidade de abstracção. A sua progressiva representação de um modo formal, usando símbolos matemáticos adequados, contribui para a compreensão dos símbolos e da linguagem algébrica, nomeadamente a compreensão da variável como número generalizado e das regras e convenções que regulam o cálculo algébrico. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 40)

Portanto, o estudo das sequências não apenas contribui para a compreensão essencialmente definida de padrões matemáticos, mas também instiga o desenvolvimento da habilidade de expressar esses padrões de maneira formal e simbólica, facilitando a aplicação eficaz da linguagem algébrica e enriquecendo a compreensão geral da Matemática.

O presente trabalho irá discorrer a respeito de um estudo referente a uma nova sequência numérica associada a dois números inteiros, que chamaremos aqui de *2-sequências*, de modo a analisar o comportamento de seus termos seguindo alguns critérios. Assim sendo, com o decorrer do estudo surgirão as explicações perante o motivo pelo qual o número 2 está à frente da palavra sequência, definindo assim, a nomenclatura da sequência em questão.

Dentro dessa perspectiva, definiremos agora as chamadas *2-sequências*, objeto principal de estudo desta monografia.

Definição 1.1. Sejam $m, p \geqslant 2$ números inteiros quaisquer. Considere $(a_n^m)_{n \geqslant 1}$ a sequência definida por

$$(1, 2, 3, ..., m-1, m, m-1, ..., 3, 2, 1, 2, 3, ...)$$

A *2-sequência* associada aos números m, p é a sequência $(b_n^{m,p})_{n \geqslant 1}$ definida sendo

$$b_n^{m,p} = a_{n \cdot p}^m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Vale ressaltar que durante todo o trabalho assumiremos os números inteiros representados por m e p dados nesta ordem: primeiro m e, em seguida, p. Com isso, as sequências acima ficam bem definidas para as abordagens posteriormente submetidas.

Deve-se pensar também que apesar de parecer uma definição complexa, com o decorrer do trabalho, verificaremos que trata-se de um estudo com um enfoque instigante e não remetendo a resultados árduos e de difícil compreensão. Desse modo, a seguir, apresentamos alguns exemplos, de modo a verificar e exemplificar numericamente a definição mencionada.

Exemplo 1.2. Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica de modo que os valores associados a ela sejam os números inteiros $m = 5$ e $p = 3$. Logo,

$$(a_n^5)_{n \geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, \ldots)$$

e

$$(b_n^{5,3})_{n \geqslant 1} = (3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 3, 4, 1, 4, 3, 2, 5, 2, \ldots).$$

Exemplo 1.3. De maneira semelhante, vamos analisar uma sequência numérica de modo que os valores associados sejam os números inteiros $m = 17$ e $p = 7$. Então,

$$(a_n^{17})_{n \geqslant 1} = (1, 2, 3, \ldots, 15, 16, 17, 16, 15, \ldots, 4, 3, 2, \ldots)$$

e

$$(b_n^{17,7})_{n \geqslant 1} = (7, 14, 13, 6, 3, 10, 3, 6, 13, 14, 7, 2, 9, 15, 16, \ldots).$$

Exemplo 1.4. Similarmente, vamos analisar uma sequência numérica de modo que os valores associados sejam os números inteiros $m = 30$ e $p = 5$. Assim, temos:

$$(a_n^{30})_{n \geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 29, 30, 29, 28, \ldots, 3, 2, 1, 2, 3 \ldots).$$

e

$$(b_n^{30,5})_{n\geqslant 1} = (5, 10, 15, 20, 25, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 2, \ldots).$$

Pode-se observar que o número 2 está presente em todas as *2-sequências* associadas aos inteiros m, p dos exemplos anteriores. Com esses exemplos numéricos previamente apresentados, podemos conjecturar que esse processo se repete independetemente dos números inteiros m, p escolhidos?

Apesar das *2-sequências* associadas aos inteiros dados serem um pouco abstratas, extrairemos algumas conclusões curiosas sobre elas. Antes disso, um número importante dentro do nosso estudo será o chamado *período de uma sequência* e exploraremos de maneira mais aprofundada posteriormente.

Definição 1.5. Uma sequência (x_n) diz-se *periódica* se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+k} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O menor valor de p com essa propriedade é chamado de *período da sequência.*

A partir dos exemplos apresentados, é possível observar uma característica comum a todos eles. Caro leitor, você conseguiu identificar essa característica presente nas situações descritas?

Pode-se observar que, em todos os exemplos mencionados, independentemente dos números inteiros m e p escolhidos, constata-se a presença do número 2. Desta forma, evidencia-se a razão pela qual o termo 2 está presente na nomenclatura principal deste trabalho, referindo-se a *2-sequência*.

Diante disso, feitas essas considerações, o objetivo principal desta monografia é demonstrar os seguintes resultados, os quais envolvem a *2-sequência* e que são referentes às definições apresentadas acima.

Teorema 1.6. Sejam m, p números inteiros. Se $m \geqslant 2$ e $p = 2(m-1)$, então $b_n^{m,p} = 2$ para todo $n \geqslant 1$. Em outras palavras, a *2-sequência* associada aos números m, p dados é constante igual a 2.

Teorema 1.7. Sejam $m, p \geqslant 2$ números inteiros. Se a igualdade $(b_n^{m,p})_{n\geqslant 1} = (b_n^{p,m})_{n\geqslant 1}$ entre as *2-sequências* é verdadeira, então $m = p$.

Teorema 1.8. Considere m e p números inteiros tais que $p \geqslant 2$ e $m = p + 1$. Então,

$$b_n^{m,p} = \left\{ \begin{array}{ll} p, & n \text{ ímpar} \\ 2, & n \text{ par} \end{array} \right\}.$$

Teorema 1.9. Dados dois números inteiros $m, p \geqslant 2$, então $b_{n_0}^{m,p} = 2$, para algum n_0.

O teorema acima é que nos fez dar o nome de 2-sequências para essas intrigantes listas periódicas de números inteiros.

Teorema 1.10. Dados dois números inteiros $m, p \geqslant 4$, com $p \leqslant 2(m-1)$, considere o número $mmc[p, 2(m-1)] = p \cdot \beta$, para algum inteiro β. Então, o período da 2-sequência $(b_n^{m,p})_{n\geqslant 1}$ é igual a β, isto é, $\Pi^{m,p} = \beta$.

Como consequência direta do Teorema 1.10 referido, obtivemos os seguintes colorários que estão extremamente relacionados com a sua natureza.

Corolário 1.11. Dados os números inteiros $m, p \geq 2$ com $p \leq 2(m-1)$. Se $mdc(p, 2(m-1)) = 1$, então, $\Pi^{m,p} = 2(m-1)$.

Corolário 1.12. Dados $m, p \geqslant 4$ números inteiros, se p é ímpar, então $\Pi^{m,p}$ é par.

Corolário 1.13. Dado qualquer número natural $J \in \mathbb{N}$, existem $m, p \geq 2$, com $p \leq 2(m-1)$, tais que $\Pi^{m,p} = J$.

Todos esses resultados serão vistos com detalhes no decorrer deste trabalho. Nosso objetivo é sempre reconhecer algum padrão em relação as *2-sequências* e demonstrá-lo quando possível. Os resultados anteriores foram obtidos dessa maneira durante as orientações desta monografia.

Finalizamos este capítulo informando ao leitor as razões que nos levaram a estudar este tópico.

O presente estudo teve início por meio de uma conversa informal entre o autor e seu orientador. Durante esse diálogo, o orientador compartilhou que havia pensado em uma sequência numérica enquanto estava em uma viagem. O padrão que ele identificou em todos os exemplos que ele havia conseguido pensar o intrigava, especialmente devido à recorrência do número 2 em todas as sequências, tornando a observação ainda mais surpreendente.

Diante disso, o autor demonstrou interesse pela temática e decidiu aprofundar-se no estudo dessa sequência até então desconhecida e, assim, ao longo da pesquisa, foram obtidos todos os resultados que serão apresentados nesta monografia.

O presente trabalho será estruturado em cinco capítulos distintos, cada um abordando aspectos específicos relacionados ao tema das sequências numéricas. O primeiro capítulo dedicar-se-á a um breve panorama histórico, contextualizando a evolução e relevância das sequências numéricas ao longo do tempo.

No segundo capítulo, serão apresentados conceitos preliminares essenciais para proporcionar uma compreensão abrangente do escopo do trabalho. Nesse contexto, serão delineadas definições fundamentais relacionadas às sequências, destacando suas características particulares, além de explorar as *2-sequências* como principal objeto de estudo deste trabalho.

O terceiro capítulo consistirá na exposição detalhada das demonstrações referentes aos resultados apresentados no decorrer do trabalho. Serão elucidados de forma generalizada as conclusões e contribuições deste estudo.

Por fim, o quarto capítulo será reservado para as considerações finais da monografia, destacando a relevância dos resultados obtidos e delineando possíveis direções para futuras pesquisas no âmbito das sequências numéricas.

Capítulo 2
Contexto Histórico

Os estudos sobre sequências numéricas, originados em civilizações antigas como os babilônios e egípcios, revelam a busca incessante por padrões que pudessem proporcionar uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos naturais. Nesse contexto, inicialmente, remetemos como destaque a atenção dos egípcios, na qual voltou-se para o rio Nilo, cujas enchentes anuais desempenhavam um papel crucial em suas vidas, uma vez que prejudicavam diretamente as plantações, influenciando, assim, em sua sobrevivência. Desse modo, esses povos começaram a observar o comportamento do rio para que se pudesse avançar nessa busca por um padrão, assim, de acordo com Alves [1]

> [...] Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys, [...] Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita. (ALVES, 2016, p. 18)

Conforme destacado pelo autor, a observação minuciosa do comportamento do rio revelou uma correlação intrigante com o surgimento da estrela Sírius. Essa abordagem não apenas reflete a avançada habilidade matemática das antigas civilizações, mas também evidencia a interligação entre o conhecimento astronômico e a organização prática da vida cotidiana.

Boyer [3] evidencia, por meio de seus estudos, que historicamente a existência do denominado Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes, deu-se em homenagem ao escriba que o reproduziu em aproximadamente 1650 a.C., este documento é atribuído a um protótipo proveniente do Reino do Meio, datando de cerca de 2000 a 1800 a.C. em que foi escrito em hierático[1], dessa forma, o papiro tornou-se a principal fonte para o entendimento da matemática egípcia.

Hobold e Santos [7] afirmam que na antiguidade grega, os pitagóricos empregaram o conhecimento das progressões, entre outras ferramentas matemáticas, na tentativa de conduzir observações sobre o movimento e a geração de sons em cordas vibrantes, os pitagóricos deduziram que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda de uma lira desempenhava

[1]De acordo com Ferreira [5] diz-se uma escrita de que se serviam os sacerdotes egípcios, como abreviatura dos hieróglifos.

um papel crucial na manifestação da harmonia, em que intervalos musicais podiam ser adequadamente descritos por meio de progressões aritméticas. Em complementação com os estudos apresentados, Oliveira [9] apresenta também que

> [...] No contexto da civilização grega, são observados diversos exemplos de sequências numéricas notáveis. Destaca-se, por exemplo, a contribuição da escola pitagórica no século VI a.C., que explorou números figurados. Além disso, o crivo de Eratóstenes, um processo utilizado na identificação de números primos, também merece destaque nesse cenário histórico. (OLIVEIRA, 2011, p. 29) [9]

A compreensão profunda dos pitagóricos sobre as relações matemáticas na música e a diversidade de contribuições matemáticas ao longo da civilização grega antiga evidenciam não apenas um conhecimento técnico, mas também uma apreciação pela beleza e harmonia relacionadas à matemática. Dessa maneira, as contribuições dos pitagóricos formaram uma grande base de estudos a respeito da teoria das progressões, bem como, se mostrou deixando um legado duradouro que persistiu na influencia do pensamento matemático contemporâneo.

Em seu trabalho, Eves [4] explora discussões a respeito das progressões numéricas e remete a trajetória da criança-prodígio que se chamava Carl Friedrich Gauss, nascido na Alemanha em 1777, um garoto cujo ambiente familiar incluía um pai dedicado ao trabalho braçal, cujas opiniões sobre educação eram notoriamente desfavoráveis, mas que, por outro lado, sua mãe, embora inculta, incentivava seus estudos.

Eves [4] continua suas explorações apresentando que quando a criança detinha a idade de dez anos, o seu professor na escola, teria atribuído à classe a tarefa de somar os números de 1 a 100 para mantê-la ocupada. De modo quase que imediato, Gauss finalizou as somas, assim, o professor surpreendido constatou que Gauss fora o único a acertar a resposta correta, 5050, sem apresentar nenhum cálculo escrito. O garoto havia calculado mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$, observando que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$, e assim por diante, com os 50 pares possíveis dessa maneira, resultando em uma soma de $50 \times 101 = 5050$.

Dessa forma, a incursão pela história das civilizações antigas, desde os egípcios e babilônios até os gregos, representa um panorama enriquecedor sobre o papel crucial das sequências numéricas no desenvolvimento do pensamento matemático. Partindo de procedimentos desde a observação dos fenômenos naturais, a construção de calendários precisos, a análise de progressões aritméticas pelos pitagóricos, além das contribuições de matemáticos como Gauss, convergem para destacar a relevância ao longo do tempo das sequências numéricas. Destarte, essa investigação não apenas revela o domínio das civilizações antigas na manipulação de números, como também estabelece uma conexão entre o passado e o presente, fundamentando as bases para as análises contemporâneas sobre sequências numéricas.

Capítulo 3
Noções Preliminares

Para o presente capítulo, abordaremos definições relacionadas a conceitos matemáticos, iniciando com a noção intuitiva de sequências numéricas, seguidas por sequências periódicas e as *2-sequências*. Em seguida, exploraremos os conceitos de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, apresentando suas definições precisas, juntamente com exemplificações numéricas para compreender o comportamento de cada uma dessas conceituações. Essa abordagem inicial é fundamental, uma vez que esses conceitos serão posteriormente utilizados em nossos resultados.

Convido você, caro leitor, a embarcar conosco nessa jornada, na qual a arte de identificar padrões em sequências familiares se torna a porta de entrada para uma exploração única e rica em descobertas e desafios matemáticos.

3.1 Sequências

De que modo se pode pensar em uma conceitação adequada e precisa para sequências?

Imagine-se, caro leitor, em uma fila[1] e está segurando uma folha A4 em que nela está escrita a letra A, similarmente, à sua frente, está posicionada uma outra pessoa segurando uma folha A4, entretanto, a desta pessoa está escrita a letra B, desse modo, à frente desta pessoa, está posicionada uma terceira pessoa que também está segurando uma folha A4, mas está escrita a letra C nela, e assim sucessivamente até a letra Z. Com todo esse contexto, podemos pensar que você, juntamente à essas pessoas, além de estarem organizados no formato de fila, estão também dispostos em uma representação de sequência utilizando folhas A4 com todas as letras do alfabeto. Perceba que podemos representar essa sequência do seguinte modo:

$$(x_n) = (A, B, C, \ldots, Z).$$

Pode-se observar que x_1 é o primeiro termo da sequência sendo representado pela letra

[1] De acordo com Ferreira [5], fila: série, enfiada de pessoas ou coisas colocadas umas em seguida às outras.

A. Similarmente, temos x_2 representando o segundo termo da sequência pela letra B. Dessa forma, podemos identificar por x_n um termo qualquer dessa sequência, de maneira que n, nesse caso, está limitado às letras do alfabeto, logo, $1 \leq n \leq 26$.

Neste momento, ao invés de fazer referência apenas às letras do alfabeto, é possível associar valores numéricos. Por exemplo, se desejássemos ilustrar uma sequência de raízes de números ímpares, teríamos a seguinte representação:

$$(x_n) = (\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \ldots, \sqrt{31}).$$

De maneira análoga, pode-se pensar em uma situação na qual não exista uma limitação perante à quantidade de termos que possam estar dispostos na sequência, com isso, a partir de agora introduziremos uma situação de sequências infinitas, utilizando os estudos de Cantor [2] na qual discorre que uma sequência infinita (x_n) é ordenada por uma lei na qual todos os indivíduos de (x_n) aparecem, cada um deles sendo localizado em um lugar fixo na sequência que é dado pelo índice que o acompanha.

Assim sendo, apresentamos uma representação de como estaria disposta essa sequência:

$$(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{3.1}$$

Para definir uma sequência, compartilhamos a definição apresentada por Lima [8] em que uma *sequência de números reais* é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo **n** $\in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o *termo de ordem* **n**, ou **n**-ésimo termo da sequência.

Evidenciamos, portanto, a definição precisa de sequências, traremos nesse momento alguns exemplos numéricos que podem ser atribuídos ao nosso estudo de sequências. Primeiramente, pode-se perceber que existem diversos padrões relacionados à Matemática e a busca por descobrir ainda mais é deveras constante, não obstante, isso também ocorre com as sequências, por isso, vamos propor para você, felizardo leitor, iniciar uma tentativa de descoberta de alguns padrões nas seguintes sequências abaixo, além disso, determinar também o próximo elemento de cada uma delas.

Sejam as seguintes sequências:

$$(x_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots), \tag{3.2}$$

$$(x_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots), \tag{3.3}$$

$$(x_n) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots), \tag{3.4}$$

$$(x_n) = (7, 19, 45, 101, 215 \ldots). \tag{3.5}$$

Apenas com a disposição das sequências acima você conseguiu encontrar o padrão de cada uma delas? E o elemento seguinte também?

Nesse momento, utilizaremos os exemplos numéricos anteriores (3.2) e (3.3) para mostrar o respectivo termo de cada sequência. Pode-se observar que no exemplo (3.2) temos:

$$(x_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots). \tag{3.6}$$

Desse modo, o termo $x_1 = 1$, ou seja, o primeiro termo dessa sequência é igual a 1. De maneira similar, temos que o termo $x_2 = 2$, logo, o segundo termo dessa sequência é igual a 2. Portanto, o termo $x_3 = 3$, dessa forma, o terceiro termo dessa sequência é igual a 3. Poderíamos, assim, sucessivamente representar todos os **n**-termos da sequência acima.

Percebemos que no exemplo acima, coincidiu o termo da sequência ser exatamente igual ao seu valor, porém, esse é um caso particular, vamos repetir o mesmo procedimento no exemplo (3.3) para descobrir o que acontece.

Analisando o exemplo (3.3), observamos a seguinte sequência

$$(x_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots). \tag{3.7}$$

Dela podemos extrair as seguintes observações: Sabe-se que o $x_1 = 2$, assim, o primeiro termo dessa sequência é igual a 2. Similarmente, podemos notar que o $x_2 = 3$, assim, o segundo termo dessa sequência é igual a 3. Por fim, nota-se que $x_3 = 5$, analogamente, o terceiro termo dessa sequência é igual a 5. Analogamente, poderíamos também sucessivamente representar todos os **n**-termos da sequência acima.

Analisando o comportamento das duas sequências acima, percebemos que não necessariamente o índice representado na sequência será exatamente igual ao termo da sequência, ou seja, x_1 nem sempre será igual a 1.

Assim sendo, como uma síntese final temos que dada a sequência enumerada por (3.2), é facilmente perceptível que trata-se do conjunto dos números naturais, logo, o próximo elemento seria o número 8. De maneira análoga, temos a sequência (3.3), que nos remete à sequência crescente dos números primos[2]. Desse modo, cada elemento dessa sequência é divisível apenas pelos números 1 e por si próprio. O elemento seguinte é o número 19.

Por fim, na terceira proposição (3.4), temos uma progressão aritmética, na qual soma-se 2 ao termo inicial/anterior para obter o sucessor. Desse modo, o próximo elemento é 15. Em nossa última proposição (3.5), refinamos um pouco mais a sequência, tornando-a mais perspicaz para a descoberta do seu padrão, de modo que cada termo subsequente é obtido multiplicando

[2]Um número natural diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio é chamado de número primo. Pode ser consultado em Hefez [6]

o termo anterior por 2 e somando o próximo número primo, sendo o primeiro primo igual a 5.

3.2 Sequências Periódicas

As sequências numéricas desempenham um papel fundamental na matemática, assim como abordamos anteriormente, muitas vezes esse artifício matemático nos revela padrões intrigantes e propriedades interessantes. Ao explorar essas sequências, descobrimos que algumas delas exibem uma característica notável: a capacidade de se repetir em intervalos regulares. Este fenômeno é perceptível no conceito de sequências periódicas que será apresentado nesse momento.

Para ilustrar ainda melhor essa ideia, vamos explorar exemplos numéricos de sequências periódicas, desde aquelas com padrões simples até aquelas com complexidades mais intrigantes. Ao compreender esses exemplos, seremos capazes de apreciar como a repetição ordenada de elementos pode ser descrita e analisada de maneira precisa através do conceito de sequências periódicas.

Exemplo 3.1. Sequência de alguns números pares:

$$(x_n) = (2, 4, 6, 8, 10, 2, 4, 6, 8, 10 \dots). \tag{3.8}$$

Podemos observar que os valores numéricos (2, 4, 6, 8, 10) persistem em repetição, sugerindo, portanto, a presença de uma sequência periódica composta por 5 termos que se reiteram regularmente.

Exemplo 3.2. Sequência Alternada de +1 e -1:

$$(x_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1 \dots). \tag{3.9}$$

Podemos observar que os valores numéricos (1, -1) se mantém em repetição, sugerindo, portanto, a presença de uma sequência periódica composta por 2 termos que se reiteram regularmente.

Exemplo 3.3. Sequência Periódica com Progressão Aritmética:

$$(x_n) = (2, 4, 8, 16, 2, 4, 8, 16 \dots). \tag{3.10}$$

Podemos observar que os valores numéricos $(2, 4, 8, 16)$ se mantém em repetição, sugerindo, portanto, a presença de uma sequência periódica composta por 4 termos que se reiteram regularmente. Além disso, percebe-se que cada termo subsequente é obtido por meio da seguinte representação $a_n = 2^n$.

Desse modo, pudemos analisar alguns exemplos numéricos referentes às sequências periódicas, entretanto, há um outro conceito intersectado com essa definição, você leitor, conseguiu perceber?

Observa-se nos exemplos mencionados uma recorrência em situações específicas. A sequência 3.8 é composta por cinco termos que se repetem regularmente. De maneira análoga, na sequência 3.9, dois termos apresentam a mesma recorrência. Por fim, na sequência 3.10, a repetição ocorre entre quatro termos. Essa recorrência não é meramente coincidida, uma vez que trata-se de uma característica matemática específica relacionada às sequências periódicas, denominada ***período de uma sequência***.

Definição 3.4. Uma sequência (x_n) diz-se *periódica* se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+k} = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O menor valor de p com essa propriedade é chamado de *período da sequência.*

Agora vamos exemplificar numericamente alguns períodos referentes a Definição 3.4.

Exemplo 3.5. Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista o teorema apresentado, de modo que os valores associados sejam $m = 4$ e $p = 6$. Assim, temos:

$$(a_n^4)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, \ldots),$$

e

$$(b_n^{4,6})_{n\geqslant 1} = (2, 2, 2, 2, 2, \ldots).$$

Desse modo, observamos que o período da sequência $(a_n^4)_{n\geqslant 1}$ é igual a 6, visto que a sequência mantém um padrão de repetição entre os termos $(1, 2, 3, 4, 3, 2)$. De maneira análoga, temos que o período da *2-sequência* $(b_n^{4,6})_{n\geqslant 1}$ é igual a $\Pi^{4,6} = 1$, uma vez que essa sequência mantém um padrão de repetição do termo (2).

Vamos verificar se isso ocorre com outras sequências.

Exemplo 3.6. Em continuação com as nossas análises, vamos explorar o comportamento de outra sequência numérica, agora utilizando os valores $m = 12$ e $p = 7$. Dessa forma, temos:

$$(a_n^{12})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, \ldots)$$

e

$$(b_n^{12,7})_{n\geqslant 1} = (7, 10, 3, 6, 11, 4, 5, 12, 5, 4, 11, 6, 3, 10, 7, 2, 9, 8, 1, 8, 9, 2 \ldots).$$

Desse modo, observamos que o período da sequência $(a_n^{12})_{n\geqslant 1}$ é igual a 22, visto que a sequência mantém um padrão de repetição entre os termos $(1, 2, 3, \ldots, 12, 11, 10, \ldots, 4, 3, 2)$. Similarmente, temos que o período da *2-sequência* $(b_n^{12,7})_{n\geqslant 1}$ é igual a $\Pi^{12,7} = 22$, uma vez que essa sequência mantém um padrão de alternância do valor de p nela.

Exemplo 3.7. Por conseguinte, propomos explorar o comportamento de mais uma sequência, com o propósito de esclarecer numericamente e facilitar a compreensão do leitor. Nesse sentido, assumiremos os valores de $m = 3$ e $p = 13$ para o exemplo em questão. Assim, temos:

$$(a_n^3)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, \ldots)$$

e

$$(b_n^{3,13})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 2 \ldots).$$

Desse modo, observamos que o período da sequência $(a_n^3)_{n\geqslant 1}$ é igual a 4, visto que a sequência mantém um padrão de repetição entre os termos $(1, 2, 3, 2, \ldots)$. Similarmente, temos que o período da *2-sequência* $(b_n^{3,13})_{n\geqslant 1}$ é igual a $\Pi^{3,13} = 4$, uma vez que essa sequência mantém um padrão de alternância do valor de p nela.

3.3 As 2-Sequências

Neste instante, procedemos à introdução de uma nova sequência, denominada "2-sequência", que se configura como o foco de investigação deste trabalho. Constatamos, por meio de pesquisas e estudos, que se trata de uma sequência inédita e ainda não investigada, não havendo, até o presente momento, indícios de pesquisas anteriores a respeito da mesma.

Enfatizaremos as particularidades desta sequência, integrando os conceitos previamente expostos nas sequências discutidas anteriormente. Desta forma, buscaremos apresentar alguns resultados que obtivemos realizando uma análise aprofundada da sequência em questão.

Retomamos a Definição 1.1, sejam $m, p \geqslant 2$ números inteiros quaisquer, considere $(a_n^m)_{n\geqslant 1}$ a sequência definida por

$$(a_n^m)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, ..., m-1, m, m-1, ..., 3, 2, 1, 2, 3...).$$

A *2-sequência* associada aos números m, p é a sequência $(b_n^{m,p})_{n\geqslant 1}$ definida sendo

$$b_n^{m,p} = a_{n.p}^m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Nesse momento, portanto, retomamos mais alguns exemplos numéricos referentes as *2-sequências*.

Exemplo 3.8. Analisando o comportamento de uma sequência numérica de modo que os valores associados a ela sejam os números inteiros $m = 13$ e $p = 7$. Logo,

$$(a_n^{13})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, \ldots, 12, 13, 12, \ldots 3, 2, 1, 2 \ldots)$$

e

$$(b_n^{13,7})_{n\geqslant 1} = (7, 12, 5, 4, 11, 8, 1, 8, 11, 4, 5, 12, 7, 2, 9, 10, 3, 6, 13, 6, 3, 10, 9, 2 \ldots).$$

Exemplo 3.9. Analisando o comportamento de uma sequência numérica de modo que os valores associados a ela sejam os números inteiros $m = 8$ e $p = 5$. Logo,

$$(a_n^{8})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 7, \ldots 3, 2, 1, 2 \ldots)$$

e

$$(b_n^{8,5})_{n\geqslant 1} = (5, 6, 1, 6, 5, 2, 7, 4, 3, 8, 3, 4, 7, 2 \ldots).$$

Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista que os valores associados sejam $m = 7$ e $p = 3$. Assim, temos:

$$(a_n^{7})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \circlearrowleft)$$

e

$$(b_n^{7,3})_{n\geqslant 1} = (3, 6, 5, 2 \circlearrowleft).$$

Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista que os valores associados sejam $m = 11$ e $p = 6$. Assim, temos:

$$(a_n^{11})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4 \ldots, 10, 11, 10, \ldots, 4, 3, 2 \circlearrowleft)$$

e

$$(b_n^{11,6})_{n\geqslant 1} = (6, 10, 4, 4, 10, 6, 2, 1, 8, 2 \circlearrowleft).$$

Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista que os valores associados sejam $m = 6$ e $p = 3$. Assim, temos:

$$(a_n^{6})_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2 \circlearrowleft)$$

e

$$(b_n^{6,3})_{n\geqslant 1} = (3, 6, 3, 2, 5, 4, 1, 4, 5, 2 \circlearrowleft).$$

3.4 Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum

Nesta seção, faremos uma abordagem a respeito da conceituação de Mínimo Múltiplo Comum (mmc), bem como, de Máximo Divisor Comum (mdc), remetendo também algumas aplicações que podem ser realizadas a respeito desses conceitos, desse modo, as definições aqui apresentadas podem ser consultadas em Hefez [6].

Iniciaremos, a seguir uma breve explanação a respeito do conceito de mínimo múltiplo comum (mmc).

Definição 3.10. Diremos que um número inteiro $m \geqslant 0$ é um minimo múltiplo comum (mmc) dos números inteiros a e b, se possuir as seguintes propriedades:
i) m é um múltiplo comum de a e b, e
ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m \mid c$.

Nesse momento, realizaremos a explanação de alguns exemplos numéricos que remetem a definição previamente apresentada, com o intuito de melhor entendimento da definição.

Exemplo 3.11. Desse modo, vamos considerar dois números primos, dispostos como sendo $a = 5$ e $b = 7$.

Os valores númericos dos múltiplos de 5 são exatamente iguais a:

$$a_n = (5, 10, 15, 20, 25, 30, \mathbf{35} \ldots).$$

Similarmente, os valores numéricos dos múltiplos de 7 são exatamente iguais a:

$$b_n = (7, 14, 21, 28, \mathbf{35} \ldots).$$

Assim, temos que o menor múltiplo comum positivo é 35, então $mmc(5, 37) = 35$.

Exemplo 3.12. Em continuação, vamos considerar dois números inteiros, dispostos como sendo $a = 8$ e $b = 12$.

Os valores númericos dos múltiplos de 8 são exatamente iguais a:

$$a_n = (8, 16, \mathbf{24}, 32 \ldots).$$

Similarmente, os valores numéricos dos múltiplos de 12 são exatamente iguais a:

$$b_n = (12, \mathbf{24}, 32, 48 \ldots).$$

Assim, temos que o menor múltiplo comum positivo é 24, então $mmc(8, 12) = 24$.

Em continuidade, introduziremos a seguir uma breve explanação a respeito do conceito de máximo divisor comum (mdc).

Definição 3.13. Diremos que um número inteiro $d \geqslant 0$ é um máximo divisor comum (mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:
i) d é um divisor comum de a e b, e
ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Neste momento, procederemos à explanação de alguns exemplos numéricos que exemplificam a definição previamente apresentada, com o objetivo de proporcionar um melhor entendimento do conceito.

Exemplo 3.14. Sendo assim, vamos considerar dois números primos, no qual esses valores estejam sendo representados por $a = 12$ e $b = 18$.

Os valores númericos em que se enquadram como divisores positivos de 12 são exatamente iguais a:

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Similarmente, os valores númericos em que se enquadram como divisores positivos de 18 são exatamente iguais a:

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Assim, temos que o máximo divisor comum é 6, isto é, $mdc(12, 18) = 6$.

Entretanto, se um dos dois números for extremamente grande, esse método torna-se inviável, uma vez que encontrar os divisores de um número grande é bastante complexo. Logo, a título de completeza, enunciamos a divisão euclidiana abaixo que é utilizada no Algoritmo de Euclides para provar a existência do mdc entre dois inteiros. O leitor que estiver interessado em aprofundar-se um pouco mais nessas definições pode consultar Hefez [6].

Definição 3.15. Sejam $a, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0$, logo, existem dois números naturais q e r, unicamente determinados, tais que

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leqslant r < |a|.$$

O número b é chamado dividendo, o número a divisor, os números q e r são chamados, respectivamente, quociente e resto da divisão de b por a.

Elucidamos também que a demonstração desse fundamental e imprescindível conceito da Teoria dos Números pode ser encontrada em Hefez [6].

Dessa forma, forneceremos agora alguns exemplos numéricos para facilitar a compreensão da definição apresentada.

Exemplo 3.16. Para ilustrar, tomemos os valores numéricos $a = 24$ e $b = 36$. Assim, procederemos ao cálculo do mdc entre esses dois números.

Desse modo, realizaremos as seguintes divisões:

- 24 por 36: $24 = 36 \times 0 + 24$

- 36 por 24: $36 = 24 \times 1 + 12$

- 24 por 12: $24 = 12 \times 2 + 0$

  Dessa maneira, percebe-se que o último e maior divisor não nulo é 12. Portanto o $mdc(24, 36) = 12$.

Exemplo 3.17. Para continuar, tomemos os valores numéricos $a = 56$ e $b = 72$. Assim, procederemos ao cálculo do mdc entre esses dois números.

Desse modo, realizaremos as seguintes divisões:

- 56 por 72: $56 = 72 \times 0 + 56$
- 72 por 56: $72 = 56 \times 1 + 16$
- 56 por 16: $56 = 16 \times 3 + 8$
- 16 por 8: $16 = 8 \times 2 + 0$

  Dessa maneira, percebe-se que o último e maior divisor não nulo é 8. Portanto o $mdc(56, 72) = 8$.

Por fim, remeteremos a última conceituação envolvendo mmc e mdc na presente seção.

Lema 3.18. Sejam a e b dois inteiros positivos. Tem-se a seguinte identidade:

$$mmc(a, b) \times mdc(a, b) = a \times b.$$

Demonstração: Veja a Proposição 5.15, p. 90, em Hefez [6]. □

Exemplo 3.19. Traremos de maneira análoga a abordagem anterior, desse modo, tomemos os valores numéricos $a = 12$ e $b = 18$. Assim, procederemos ao cálculo do mdc entre esses dois números.

Desse modo, realizaremos as seguintes verificações:

- Calcular o mdc de 12 e 18: $mdc(12, 18) = 6$
- Calcular o mmc de 12 e 18: $mmc(12, 18) = 36$
- Verificar a identidade: $6 \times 36 = 12 \times 18$

  Dessa maneira, percebe-se que a identidade é verificada.

3.5 Período de uma 2-sequência

O período das 2-sequências é importante para esta monografia, uma vez que vários dos resultados principais envolvem tal número. Portanto, daremos a ele uma nomenclatura própria.

Nesse momento, outro conceito que será um pouco mais explorado trata-se do período de uma *2-sequência* associada aos inteiros m, p será denotado por $\Pi^{m,p}$.

Outrossim, vale ressaltar também que dados os inteiros $m, p \geqslant 2$, uma vez que a sequência $(a_n^m)_{n\geqslant 1}$ é periódica, daqui em diante, utilizaremos a seguinte notação para ela:

$$(a_n^m)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, ..., m-1, m, m-1, ..., 3, 2 \circlearrowleft).$$

Similarmente, o símbolo $\circlearrowleft$ será também usado para a sequência periódica $(b_n^{m,p})_{n\geqslant 1}$.

Abordaremos também que o período de uma *2-sequência* associada aos inteiros m, p será denotado por $\Pi^{m,p}$.

Destacaremos as características desta sequência, incorporando os conceitos previamente apresentados nas sequências discutidas anteriormente.

Agora vamos exemplificar numericamente alguns períodos referentes a Definição 3.4 na qual remete a respeito do período de uma *2-sequência*.

Exemplo 3.20. Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista o teorema apresentado, de modo que os valores associados sejam $m = 5$ e $p = 2$. Assim, temos:

$$(a_n^5)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2 \circlearrowleft),$$

$$(b_n^{5,2})_{n\geqslant 1} = (2, 4, 4, 2 \circlearrowleft).$$

Desse modo, observamos que o período da sequência $(a_n^5)_{n\geqslant 1}$ é igual a 8, visto que a sequência mantém um padrão de repetição entre os termos $(1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2)$. De maneira análoga, temos que o período da *2-sequência* $(b_n^{5,2})_{n\geqslant 1}$ é igual a $\Pi^{5,2} = 4$, uma vez que essa sequência mantém um padrão de repetição dos termos $(2, 4, 4, 2)$.

Exemplo 3.21. Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista o teorema apresentado, de modo que os valores associados sejam $m = 7$ e $p = 9$. Assim, temos:

$$(a_n^7)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2 \circlearrowleft),$$

$$(b_n^{7,9})_{n\geqslant 1} = (5, 6, 3, 2 \ldots).$$

Desse modo, observamos que o período da sequência $(a_n^7)_{n\geqslant 1}$ é igual a 12 visto que a sequência mantém um padrão de repetição entre os termos $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$. De maneira análoga, temos que o período da *2-sequência* $(b_n^{7,9})_{n\geqslant 1}$ é igual a $\Pi^{7,9} = 4$, uma vez que essa sequência mantém um padrão de repetição dos termos $(5, 6, 3, 2)$.

Exemplo 3.22. Vamos analisar o comportamento de uma sequência numérica, tendo em vista o teorema apresentado, de modo que os valores associados sejam $m = 6$ e $p = 3$. Assim, temos:

$$(a_n^6)_{n\geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2 \circlearrowleft),$$

$$(b_n^{6,3})_{n\geqslant 1} = (3, 6, 3, 2, 5, 4, 1, 4, 5, 2 \circlearrowleft).$$

Desse modo, observamos que o período da sequência $(a_n^6)_{n\geqslant 1}$ é igual a 6, visto que a sequência mantém um padrão de repetição entre os termos $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2)$. De maneira análoga, temos que o período da *2-sequência* $(b_n^{6,3})_{n\geqslant 1}$ é igual a $\Pi^{6,3} = 10$, uma vez que essa sequência mantém um padrão de repetição dos termos $(3, 6, 3, 2, 5, 4, 1, 4, 5, 2)$.

Capítulo 4

Principais Resultados

O propósito deste capítulo consiste em enunciar e comprovar os resultados mais significativos obtidos na pesquisa. Embora todos eles tenham sido previamente introduzidos, cada resultado será abordado de maneira individual e detalhada, a fim de proporcionar uma compreensão mais aprofundada.

Sempre que possível, com o objetivo de aprimorar a familiaridade do leitor com a discussão, buscaremos fornecer exemplos numéricos que ilustrem a tese dos resultados apresentados. Desse modo, com o intuito de não apenas facilitar a compreensão, mas também enriquecer a abordagem, proporcionando uma aplicação prática e concreta dos conceitos discutos na monografia.

4.1 Teorema 1.6

Teorema 1.6: Sejam m, p números inteiros. Se $m \geqslant 2$ e $p = 2 \cdot (m-1)$, então $b_n^{m,p} = 2$ para todo $n \geqslant 1$. Em outras palavras, a *2-sequência* associada aos números m, p dados é constante igual a 2.

Dessa forma, com o objetivo de verificar a veracidade do enunciado, apresentaremos algumas exemplificações numéricas para tal propósito.

Exemplo 4.1. Seja $m = 3$, por exemplo. Logo, dada a condição de $p = 2 \cdot (m-1)$, realizaremos a substituição de m por 3. Assim, obtemos:

$$p = 2 \cdot (3-1) \Rightarrow p = 2 \cdot (2) \Rightarrow p = 4. \tag{4.1}$$

Dessa maneira, obtemos os valores de $m = 3$ e $p = 4$, logo, obtemos a sequência $(b_n^{3,4})_{n \geqslant 1}$.

Assim, os primeiros termos da sequência seriam dispostos da seguinte maneira:

$$(b_n^{3,4})_{n \geqslant 1} = (b_1^{3,4} = 2, b_2^{3,4} = 2, b_3^{3,4} = 2, \ldots). \tag{4.2}$$

Verifica-se, desse modo, que independente do valor numérico associado ao n escolhido, de modo que $n \geqslant 1$, resulta em uma sequência constante do termo 2.

Será que isso acontece para qualquer valor numérico associado a m e p escolhidos?

Exemplo 4.2. Tomaremos, nesse momento, um valor específico diferente para m, nesse caso, $m = 4$, por exemplo. Logo, dada a condição de $p = 2(m-1)$, realizaremos a substituição de m por 4. Assim, obtemos:

$$p = 2 \cdot (4-1) \Rightarrow p = 2 \cdot (3) \Rightarrow p = 6. \tag{4.3}$$

Dessa maneira, obtemos os valores de $m = 4$ e $p = 6$, logo, obtemos a sequência $(b_n^{4,6})_{n \geqslant 1}$.

Assim, os primeiros termos da sequência seriam dispostos da seguinte maneira:

$$(b_n^{4,6})_{n \geqslant 1} = (b_1^{4,6} = 2, b_2^{4,6} = 2, b_3^{4,6} = 2 \dots). \tag{4.4}$$

Verifica-se, desse modo, que se repete a mesma situação apresentada em (4.1), tal que independente do valor numérico associado ao n escolhido, de modo que $n \geqslant 1$, resulta em uma sequência constante do termo 2.

A seguir, apresentaremos a demonstração a respeito desse teorema, validando-o, bem como, generalizando a sua utilização.

Demonstração: Temos a sequência $(a_n^m)_{n \geqslant 1}$ disposta do seguinte modo:

$$(a_n^m)_{n \geqslant 1} = (1, 2, 3, \dots, m, (m-1), \dots, 3, 2 \circlearrowleft). \tag{4.5}$$

Como a quantidade de termos da sequência é igual a $p = 2(m-1)$, segue que $b_1^{m,p} = a_{2(m-1)}^m$ é o último elemento dos números que aparecem no período dado em (4.5) que é igual a 2. A partir daí, a contagem se reinicia no 1 e vai até o 2 novamente, que é o seu último termo. Logo, obtemos que $b_n^{m,p} = 2, \ n \geqslant 1$. □

4.2 Teorema 1.7

Teorema 1.7: Sejam $m, p \geqslant 2$ números inteiros. Se a igualdade $(b_n^{m,p})_{n \geqslant 1} = (b_n^{p,m})_{n \geqslant 1}$ entre as *2-sequências* é verdadeira, então $m = p$.

Demonstração: Suponha por contradição que $p < m$. Nesse caso, como

$$(a_n^m) = (1, 2, 3, 4, \dots, m, (m-1) \dots 3, 2, \dots \circlearrowleft),$$

A parte destacada em vermelho contém o número p, uma vez que $p < m$. Tomando $n = 1$, obtemos

$$b_1^{m,p} = a_{p\cdot 1}^m = p \text{ (realize uma contagem até } p\text{).}$$

Por outro lado,

$$(a_n^p) = (1, 2, 3, \ldots, \boldsymbol{p}, (p-1), 3, 2 \circlearrowleft).$$

Nessa sequência disposta, todos os valores dos números inteiros são menores do que ou iguais a p. Mas, nesse caso, $p = b_1^{m,p} = b_1^{p,m} = a_{m\cdot 1}^p = a_m^p$. Veja que, na sequência (a_n^p) acima, o número p aparece apenas uma vez a cada período $2(p-1)$. Assim, como $a_m^p = p$, isso só ocorre quando $m = p + k \cdot (2(p-1))$, $k \geqslant 0$ um inteiro. Como supomos $p < m$, segue que

$$p + k(2(p-1) = m > p \Rightarrow k \geqslant 1.$$

Então, segue do fato de

$$m = p + k(2(p-1)) \geqslant p + 2(p-1) = 3p - 2 \geqslant 2p \ \ (\text{pois } \ p \geqslant 2)$$

que, escolhendo $n = 2$, $b_2^{m,p} = 2p = a_{2m}^p$, mas $2p$ não está na sequência $(1, 2, 3, \ldots, p, (p-1), \ldots 3, 2 \circlearrowleft)$. Por isso, absurdo! Logo, não pode valer $p < m$, ou seja, $p \geqslant m$. Da mesma forma, não vale $m < p$. Portanto, $p = m$. □

Verifica-se, desse modo, que o presente resultado demonstra que a ordem das variáveis m e p na sequência tem um significado crucial e que trocar as posições dessas variáveis resulta em sequências diferentes, a menos que $m = p$.

4.3 Teorema 1.8

Teorema 1.8: Considere m e p números inteiros tais que $p \geqslant 2$ e $m = p + 1$. Então,

$$b_n^{m,p} = \left\{ \begin{array}{cr} p, & n \text{ ímpar} \\ 2, & n \text{ par} \end{array} \right\}.$$

Vamos começar explorando um exemplo numérico a respeito do Teorema 1.8, buscando evidenciar a veracidade da sua tese.

Exemplo 4.3. Tomaremos, nesse momento, um valor específico para m e p, nesse caso, particularizaremos como sendo $m = 5$ e $p = 4$ por exemplo.

Pelo nosso teorema, temos que:

- $m = p + 1 \geqslant 2$, com $p \geqslant 2$.

Assim, substituímos os valores associados a m e p:

- $5 = 4 + 1 \geqslant 2$

Desse modo, obtemos as seguintes sequências:

$$(a_n^5) = (1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2 \ldots).$$

$$(b_n^{5,4}) = (4, 2, 4, 2, 4, 2 \ldots).$$

Percebe-se que, nas posições pares, dispostas na sequência, todas as atribuições remetem ao termo 2. Similarmente, percebe-se que, nas posições ímpares, todos remetem ao termo 4 que é exatamente igual a p.

Em suma, esse é apenas um mero caso particular. Em prosseguimento, será apresentada a demonstração a respeito dessa proposição, tendo em vista a sua validação.

Demonstração: Dados $p \geqslant 2$ e $m = p + 1$, temos que

$$(a_n^m) = (1, 2, 3, \ldots, \boldsymbol{p}, m, \boldsymbol{p}, \ldots, 2 \circlearrowleft),$$

em que **p** é igual a $(m-1)$. A sequência possui $2m-2$ termos, ou seja, $2m-2 = 2(p+1)-2 = 2p$ termos. Isso nos diz que, por definição, $b_1^{m,p} = p$ e $b_2^{m,p} = 2$ que é o último termo que aparece na lista acima. A partir daqui, a contagem se reinicia e repete tais termos. Assim,

$$b_n^{m,p} = \left\{ \begin{array}{ll} p, & n \text{ ímpar} \\ 2, & n \text{ par} \end{array} \right\}.$$

□

4.4 Teorema 1.9

Teorema 1.9: Dados dois números inteiros $m, p \geqslant 2$, então $b_{n_0}^{m,p} = 2$, para algum n_0.

Demonstração: A sequência $(1, 2, 3, \ldots, m, (m-1), \ldots, 3, 2 \circlearrowleft)$ tem período igual a $2(m-1)$. Desse modo, temos que o termo com índice $2(m-1)$ é igual 2. Seja $n_0 = p \cdot [2(m-1)]$, vamos mostrar que $b_{n_0}^{m,p} = 2$. De fato, por definição da sequência $b_n^{m,p}$, o índice n remete a quantidade de vezes que se conta p. Assim, $b_{2(m-1)}^{m,p}$ é o termo $2(m-1) \cdot p$ na contagem. Logo, podemos observar que $b_n^{m,p} = a_{np}^m \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, esse resultado é igual a 2, uma vez que esse termo pode ser entendido como $2(m-1)$ elementos contados p vezes. □

4.5 Teorema 1.10

Teorema 1.10: Dados dois números inteiros $m, p \geqslant 4$, com $p \leqslant 2(m-1)$, considere o número $mmc[p, 2(m-1)] = p \cdot \beta$, para algum inteiro β. Então, o período da 2-sequência $(b_n^{m,p})_{n \geqslant 1}$ é igual a β, isto é, $\Pi^{m,p} = \beta$.

Vamos agora demonstrá-lo, buscando validá-lo, bem como generalizar a sua utilização.

Demonstração: Pela definição do período $\Pi^{m,p}$, tem-se que, para todo $n \geqslant 1$,

$$b_{n+\Pi^{m,p}}^{m,p} = b_n^{m,p}.$$

Segue, então, da definição da 2-sequência $(b_n^{m,p})$ que, para todo $n \geqslant 1$,

$$a_{(n+\Pi^{m,p})p}^{m} = a_{np}^{m},$$

isto é, para todo $n \geqslant 1$,

$$a_{np+\Pi^{m,p}p}^{m} = a_{np}^{m}. \tag{4.6}$$

Nesse momento, vamos separar em alguns casos possíveis para o valor de $p \leq 2(m-1)$.

Caso 1) $p = 2(m-1)$. Nessa situação, segue do Teorema 1.6 que o período da 2-sequência $(b_n^{m,p})$ é 1. Também temos que $mmc(p, 2(m-1)) = 2(m-1) = p \cdot 1$, mostrando que $\beta = 1 = \Pi^{m,p}$. Logo, o resultado está provado para esse caso.

Caso 2) $p = m-1$. Nesse caso, temos $mmc(p, 2(m-1)) = 2(m-1) = p \cdot 2$ e $\beta = 2$. Além disso, $b_n^{m,p} = a_{n(m-1)}^{m} = m-1$ se n é ímpar e 2 se n é par. Com isso, $\Pi^{m,p} = 2 = \beta$, pois $m-1$ é diferente de 2 já que $m \geqslant 4$. Isso mostra que o teorema é válido para esse caso também.

Caso 3) $p = m$. Aqui, analisamos a sequência $(a_n^m)_{n \geqslant 1}$ que é dada por

$$(1, 2, \ldots, m, m-1, \ldots, 3, 2 \circlearrowleft).$$

Note que o número $p = m$ só se repete 1 vez a cada sequência dos números que aparecem acima, que são apenas $1, 2, \ldots, m$. Assim, para que, por exemplo, $a_{p+\Pi^{m,p}p}^{m} = a_p^m = p = m$ (que é a igualdade (4.6) escolhendo $n = 1$), temos necessariamente que o valor $\Pi^{m,p}p$ deve ser múltiplo do período da sequência $(a_n^m)_{n \geqslant 1}$, isto é,

$$\Pi^{m,p}p = 2 \cdot (m-1) \cdot \gamma$$

para algum inteiro positivo γ.

Caso 4) $2 \leqslant p < m-1$. Nesse cenário, temos que a sequência $(a_n^m)_{n\geqslant 1}$ é dada por

$$(1, 2, \ldots, p, \ldots, m, m-1, \ldots, p, \ldots, 3, 2, \circlearrowleft).$$

Aparecem dois valores de p nesse período destacado acima: um antes de m e o outro depois. Como a igualdade (4.6) é válida para todo n e, para $n = 1$, $a_p^m = p < m$, então, para que $a_{p+\Pi^{m,p}p} = p$, há duas possibilidades:

Possibilidade 1) O valor de $\Pi^{m,p}p$ é tal que, somado com p no índice da sequência, resulta exatamente no mesmo p inicial (o primeiro que aparece na lista). Se assim for, o valor $\Pi^{m,p}p$ deve ser igual a um múltiplo do período da sequência (a_n^m), pois é a única forma da contagem realizar um ciclo completo, isto é,

$$\Pi^{m,p}p = 2(m-1)\gamma$$

para algum inteiro positivo γ.

Possibilidade 2) O valor de $\Pi^{m,p}p$ é tal que, somado com p no índice da sequência, resulta exatamente no segundo p que aparece na lista. Contando as casas, temos que, de p a m (sem contar o p), há $m-p$ termos e, de m ao segundo p, tem-se $m-p$ termos também. Assim, ao todo, há $2(m-p)$ termos do primeiro p ao segundo. Concluímos que

$$\Pi^{m,p}p = 2(m-p) + 2(m-1)\gamma$$

para algum inteiro não negativo γ (aqui γ pode ser 0). Todavia, observe que $p < m$ implica $p \leqslant m-1$ e, portanto, $2p \leqslant 2(m-1)$. Isso mostra que contar $2p$ termos da sequência (a_n^m) para encontrar o valor de a_{2p}^m vai resultar em um termo que está dentro da lista dada por

$$(1, 2, \ldots, p, \ldots, m, m-1, \ldots, p, \ldots, 3, 2, \circlearrowleft),$$

que contém $2(m-1)$ termos. Assim, a igualdade

$$a_{2p+\Pi^{m,p}p}^m = a_{2p}^m,$$

quando subtituímos $2p+\Pi^{m,p}p = 2p+2(m-p)+2(m-1)\gamma = 2m+2(m-1)\gamma$ e lembramos que $a_{2m}^m = a_{2+2(m-1)}^m = 2$, produz

$$2 = a_{2m}^m = a_{2p+\Pi^{m,p}p}^m = a_{2p}^m.$$

Mas só há dois números dois na lista acima, que só ocorrem se contarmos $2p = 2$ (o que não é verdadeiro, pois $p \neq 1$) ou se $2p = 2(m-1)$, isto é, se $p = m-1$, que não é verdadeiro nesse caso. Essas considerações mostram que a *Possibilidade 2)* não pode ocorrer.

Caso 5) $m < p < 2(m-1)$. Esse caso é análogo ao anterior.

Diante de todos os possíveis casos acima, só há uma alternativa:

$$\Pi^{m,p}p = 2(m-1)\gamma \tag{4.7}$$

para algum inteiro positivo γ. Agora, note que, sendo $\alpha = mmc(p, 2(m-1)) = p\beta$ tanto um múltiplo de p quanto um múltiplo de $2(m-1)$, tem-se

$$a^m_{np+\alpha} = a^m_{np}$$

para todo $n \geqslant 1$, isto é,

$$b^{m,p}_{n+\frac{\alpha}{p}} = b^{m,p}_n$$

para todo $n \geqslant 1$. Isso mostra que $\beta = \dfrac{\alpha}{p} = \Pi^{m,p}\lambda$ é um múltiplo de $\Pi^{m,p}$, para algum inteiro positivo λ. Vamos mostrar que $\lambda = 1$ e concluir o resultado. Para tanto, a igualdade (4.7) garante que o número $\Pi^{m,p}p$ é ao mesmo tempo múltiplo de p e de $2(m-1)$. Pela definição de mmc, segue que $mmc(p, 2(m-1)) = p\beta$ divide o número $\Pi^{m,p}p$, isto é, existe um inteiro positivo k tal que

$$p\beta k = \Pi^{m,p}p.$$

Cancelando p em ambos os lados e substituindo o valor de β, concluímos que

$$\Pi^{m,p}\lambda k = \Pi^{m,p},$$

isto é, $\lambda k = 1$. Como λ e k são inteiros positivos, isso mostra que $\lambda = 1$ e finaliza a demonstração do teorema.

□

4.6 Colorário 1.11

Colorário 1.11: Dados os números inteiros $m, p \geqslant 4$ com $p \leqslant 2(m-1)$, se $mdc(p, 2(m-1)) = 1$, então $\Pi^{m,p} = 2(m-1)$.

Esse importante resultado será inicialmente explorado por meio de um exemplo numérico, buscando evidenciar a sua tese.

Exemplo 4.4. Como condição inicial, assumiremos valores numéricos para m e p, como sendo $m = 6$ e $p = 3$, por exemplo.

Tais valores assumidos, satisfazem a condição dessa proposição: $p \leqslant 2 \cdot (m - 1)$, substituindo os valores associados em m e p, temos que:

$$3 \leqslant 2 \cdot (6 - 1) \Rightarrow 3 \leqslant 10.$$

Satisfeita essa condição, agora vamos verificar a validade da identidade do mdc.

$$\begin{aligned} mdc(3, 10) &: \\ 10 &= 3 \times 3 + 1 \\ 3 &= 1 \times 3 + 0. \\ \therefore mdc(3, 10) &= 1 \end{aligned}$$

Desse modo, pode-se concluir que $\Pi_b = 2(m - 1)$, ou seja, o período da referida sequência tem que ser exatamente igual a:

$$\Pi^{m,p} = 2 \cdot (6 - 1) \Rightarrow \Pi_b = 2 \cdot (5) \Rightarrow \Pi^{m,p} = 10$$

Vamos validar se isso se apresenta correto perante a nossa sequência em questão? Primeiramente, iniciaremos com a representação da sequência:

$$(a_n^6)_{n \geqslant 1} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2 \circlearrowleft). \tag{4.8}$$

$$(b_n^{6,3})_{n \geqslant 1} = (3, 6, 3, 2, 5, 4, 1, 4, 5, 2 \circlearrowleft). \tag{4.9}$$

Portanto, pode-se observar que o período da nossa b_n é exatamente igual a 10, verificando a proposição apresentada.

Em suma, esse é apenas um mero caso particular, em prosseguimento, será apresentada a demonstração a respeito dessa proposição, tendo em vista a sua validação e generalização de utilização.

Demonstração: Segue do Teorema 1.10 e do Lema 3.18 que

$$p\Pi^{m,p} \times mdc(p, 2(m - 1)) = 2(m - 1)p,$$

isto é, como $mdc(p, 2(m - 1)) = 1$,

$$\Pi^{m,p} = 2(m - 1).$$

□

4.7 Corolário 1.12

Corolário 1.12: Dados $m, p \geqslant 4$ números inteiros, se p é ímpar, então $\Pi^{m,p}$ é par.

Demonstração: Segue do Teorema 1.10 que $mmc(p, 2(m-1)) = p\Pi^{m,p}$. Ora, se p é ímpar como $mmc(p, 2(m-1))$ é par (pois é múltiplo de $2(m-1)$), segue que $\Pi^{m,p}$ deve ser necessariamente um número par. □

Dentro das hipóteses desse corolário, não existem 2-sequências com período ímpar e com p também ímpar. Por exemplo, não existe uma 2-sequência com $m \geqslant 4$ e $p = 15$ cujo período seja 5, 7, 33 ou qualquer outro número ímpar.

4.8 Colorário 1.13

Colorário 1.13: Dado qualquer número natural $J \in \mathbb{N}$, existem $m, p \geqslant 4$, com $p \leqslant 2(m-1)$, tais que $\Pi^{m,p} = J$.

Demonstração: Vamos escolher m e p de tal modo que $mmc(p, 2(m-1)) = p \cdot J$. Escolha p um número par maior do que ou igual a 6 e ponha $2(m-1) = p \cdot J$, isto é, $m = \dfrac{p}{2}J + 1$. Dessa forma, teremos que $m, p \geqslant 4$ satisfazendo $p \leq 2(m-1)$ e

$$mmc(p, 2(m-1)) = mmc(p, pJ) = pJ,$$

e, pelo Teorema 1.10, $\Pi^{m,p} = J$, como queríamos. □

Por exemplo, para construirmos uma 2-sequência cujo período seja igual a 37, basta escolhermos o valor de $p = 6$ (poderia ser qualquer número par maior do que ou igual a 4) e o valor de $m = \dfrac{37p}{2} + 1 = 111 + 1 = 112$. Então, $mmc(p, 2(m-1)) = mmc(p, 37p) = p \cdot 37$ e, pelo Teorema 1.10, $\beta = 37 = \Pi^{112,6}$.

Capítulo 5

Resultados em Aberto sobre as 2-Sequências

Apresentamos aqui alguns problemas que ainda estão em aberto sobre as 2-sequências estudadas neste trabalho. Como possíveis trabalhos futuros, pensaremos em argumentos adequados para resolvê-los.

Problema 1: Dados $m, p \geqslant 2$ números inteiros, em que condições os termos da 2-sequência $(b_n^{m,p})$ contém todos os valores $\{1, 2, 3, \ldots, m-1, m\}$?

Problema 2: Se tivermos uma sequência (c_n), em que condições ela é uma 2-sequência associada a inteiros $m, p \geqslant 2$?

Problema 3: Como generalizar e definir as k-sequências, com $k \geqslant 3$ um inteiro, e provar todos os resultados respectivos?

Problema 4: Dados $m, p, k \geqslant 2$ números inteiros, como construir 2-sequências cujos termos contém todos os valores de $\{1, 2, \ldots, m\}$ exceto os múltiplos de k?

Problema 5: Dados $m, p \geqslant 2$, em que condições a 2-sequência $(b_n^{m,p})$ é igual à sequência (a_n^m)?

Capítulo 6
Considerações Finais

A presente monografia proporcionou uma análise profunda e esclarecedora sobre diversos aspectos matemáticos e teve como um dos intuitos a busca por associar as ideias de padrões com conceitos matemáticos já existentes e alcançar novos resultados por meio de sequências numéricas. A temática que foi estudada remete a uma nova possibilidade: as 2-sequências.

Assim, as investigações realizadas nesta pesquisa indicam claramente a importância dessas sequências recém-descobertas, pois, as demonstrações fornecidas até o momento são apenas um ponto de partida, e fica evidente que um aprofundamento adicional pode revelar mais nuances sobre suas naturezas e definições, uma vez que está presente nos teoremas e colorários demonstrados nesse trabalho a utilização de várias outras conceituações matemáticas, de caráter um pouco mais introdutório. Logo, com um pouco mais de empenho, pode-se incrementar ainda mais o estudo dessa nova sequência.

Deixamos alguns problemas em aberto no capítulo final que evidenciam como é grande o campo de alcance desse novo objeto estudado.

Concluímos que as demonstrações realizadas neste trabalho não só validaram os resultados apresentados anteriormente, mas também remeteram para várias possibilidades de exploração em torno das 2-sequências. A partir disso, percebe-se que uma investigação mais aprofundada para explorar integralmente suas propriedades e implicações matemáticas contribuirá significativamente para o avanço dos conhecimentos em sequências numéricas, especificamente da 2-sequência.

Referências

[1] ALVES, A. A. **Noções de Matemática Básica aplicada à Matemática Financeira**. 2016. 76 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

[2] ÁVILA, G. Cantor e a Teoria dos Conjuntos. **Revista do Professor de Matemática (RPM)**. São Paulo, n. 43, p. 6-14, 2000.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

[4] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução (Hygino H. Domingues). 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

[5] FERREIRA, A. B. H. **Novo Aurélio século XXI**: o dicionário da língua portuguesa. 3 Curitiba: Editora Positivo, 2004, 2120 p.

[6] HEFEZ, A. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA, (2015).

[7] HOBOLD, C. H. Sequências numéricas e séries: livro didático. 1. ed. rev. Palhoça : **UnisulVirtual**, 2011.

[8] LIMA, E. L. **Análise Real volume 1**: funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[9] OLIVEIRA, F. S. **O estudo das sequências através de padrões numéricos**.32 f. Monografia - Curso de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011.

[10] PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. 2009.

[11] POLYA, G. (1973). **How to Solve It**: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press.

[12] VALE, I. P. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, [S.L.], v. 8, n. 2, p. 64-81, 16 dez. 2013. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p64.