



UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCOS DANILO MOURA BARBOSA CAMPOS

BREVE ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

ARAGUAÍNA - TO
2022

MARCOS DANILO MOURA BARBOSA CAMPOS

BREVE ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

ARAGUAÍNA - TO

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

- C198b Campos, Marcos Danilo Moura Barbosa .
BREVE ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA HIPERBÓLICA. / Marcos
Danilo Moura Barbosa Campos. – Araguaína, TO, 2022.
110 f.
- Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus
Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.
Orientador: Alvaro Julio Yucra Hanco
1. Geometria. 2. Geometria não Euclídiana. 3. Geometria Hiperbólica. 4. 5º
Postulado. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer
forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte.
A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184
do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

MARCOS DANILO MOURA BARBOSA CAMPOS

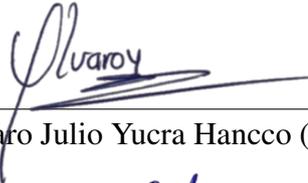
BREVE ESTUDO SOBRE A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

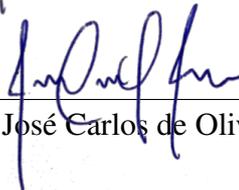
Orientador: Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco.

Aprovada em: 06 / 12 / 2022 .

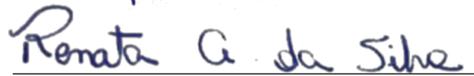
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hanco (orientador)



Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior



Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Em memória de Marcos Barbosa Campos.

AGRADECIMENTOS

- Primeiramente agradeço à **Deus** pelo dom da vida;
- Agradeço à toda família **Moura** pelo apoio e acolhimento, em especial minha mãe **Marilza** por simplesmente tudo, minha tia **Maura** por todo suporte, minha madrinha **Ira-nete** pela sua presença, minha tia **Maurina** pelo apoio, meu tio **Renato** pela esperança que ele tem em mim e minha vó **Terezinha** pela fé que ela tem em mim;
- Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. **Alvaro Julio Yucra Hanco**, por todo tempo que ele dedicou para mim, para que essa monografia fosse possível;
- Agradeço também aos amigos que fiz na UFNT, em especial **Amanda, Kalyta, Pollyana, Daniel, Gustavo, Pedro** e **Wellyson**, pelos bon momentos na Universidade;
- Agradeço ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) por fazer diferença na minha jornada nos estudos, em especial ao pessoal que conheci por meio dele, e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES);
- Agradeço aos professores presentes na banca examinadora, Profa. Dra. **Renata Alves da Silva** e Prof. Dr. **José Carlos de Oliveira Junior**, pela contribuição prestada ao presente trabalho;
- Agradeço aos **professores do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da UFNT**, em especial a Profa. Dra. **Fernanda Vital** por me ajudar no desenvolvimento da pesquisa estatística, e aos demais que tive a oportunidade de ser aluno;
- Agradeço à todos os **estudiosos que constam nas referências**, que são autores dos trabalhos que foram estudados para que essa monografia fosse realizada.

“Como sou pouco, e sei pouco, faço o pouco que me cabe me dando por inteiro.”

Ariano Suassuna

RESUMO

O presente trabalho é uma monografia na qual discutimos, de maneira a não esgotar o tema, sobre a Geometria Hiperbólica e divulgá-la. Para tanto, buscamos analisar essa Geometria em três dimensões: histórica, matemática e utilitária. Na parte histórica trazemos fragmentos históricos sobre o problema que envolve o 5º Postulado de Euclides, que durante sua investigação ao longo da história, acarretou o surgimento das Geometrias não Euclidianas. No referente a Matemática, desenvolvemos resultados presentes unicamente nessa teoria, como também resultados que ela “herda” da Geometria Euclidiana, tais como a congruência de triângulos e o postulado de Pasch. Ainda, apresentamos um quadro no qual elencamos algumas das peculiaridades de cada Geometria mencionada. E mais, apresentamos alguns modelos por meio dos quais a Geometria Hiperbólica é representada. Enfim, no tocante a utilidade, discorremos sobre algumas possibilidades e aplicações da teoria Geométrica Hiperbólica, que se fazem presentes na própria Matemática, bem como em outros ramos do saber.

Palavras-chaves: Geometria. 5º Postulado. Geometria não Euclidiana. Geometria Hiperbólica

ABSTRACT

The present work is a monograph in which we discuss, in order not to exhaust the theme, about Hyperbolic Geometry and disseminate it. Therefore, we seek to analyze this geometry in three dimensions: historical, mathematical and utilitarian. In the historical part we bring historical fragments about the problem involving the 5th Postulate of Euclid, which during its investigation throughout history, led to the emergence of non-Euclidean Geometries. Regarding Mathematics, we develop results present only in this theory, as well as results that it “inherits” from Euclidean Geometry, such as the congruence of triangles and Pasch’s postulate. Still, we present a table in which we list some of the peculiarities of each Geometry mentioned. Furthermore, we present some models through which Hyperbolic Geometry is represented. Finally, with regard to utility, we discuss some possibilities and applications of the Hyperbolic Geometric theory, which are present in Mathematics itself, as well as in other branches of knowledge.

Keywords: Geometry. 5th Postulate. Non-Euclidean Geometry. Hyperbolic Geometry.

Lista de Figuras

2.1	Teorema do ângulo externo para triângulos.	20
2.2	Caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos.	21
2.3	Triângulos ABC e $A'B'C'$	22
2.4	Caso lado-lado-lado de congruência de triângulos.	22
2.5	Relação lado oposto ao ângulo.	23
2.6	Representação do Teorema 2.5.	24
2.7	Apoio para a demonstração do Teorema 2.5.	24
2.8	Representação do Postulado de Pasch.	25
2.9	Apoio para a demonstração do Teorema 2.7.	26
3.1	Euclides de Alexandria.	28
3.2	Claudius Ptolomeu.	29
3.3	Proclus Diadochus.	30
3.4	Nasir Eddin.	30
3.5	Johann Heinrich Lambert à direita, e Adrien-Marie Legendre à esquerda.	32
3.6	John Playfair.	32
3.7	Johann Carl Friedrich Gauss.. . . .	33
3.8	Janos Bolyai.	34
3.9	Nicolai Lobachevsky.	34
4.1	Ângulo de paralelismo.	37
4.2	Modelo desenvolvido por Beltrami.	38
4.3	Curva tractriz.	38
4.4	Modelo desenvolvido por Félix Klein.	39
4.5	Modelo desenvolvido por Henri Poincaré.	40
4.6	Exemplo de distância hiperbólica.	41
4.7	Quadrilátero de Saccheri.	41
4.8	Congruência dos ângulos superiores de um quadrilátero de Saccheri.	42
4.9	Perpendicular a base e ao topo de um Quadrilátero de Saccheri.	44
4.10	Quadrilátero de Lambert.	45

4.11 Do quadrilátero de Lambert para o quadrilátero de Saccheri.	46
4.12 Representação do item i).	46
4.13 Representação do item ii)	47
4.14 Representação do item iii).	47
4.15 Apoio para a demonstração do Teorema 4.11 (ângulo agudo).	48
4.16 Apoio para a demonstração do Teorema 4.11 (ângulo reto).	49
4.17 Apoio para a demonstração do Teorema 4.11 (ângulo obtuso).	49
4.18 Triângulo qualquer e sua decomposição em dois triângulos retos.	50
4.19 Triângulos retos ABD e ACD	52
4.20 Triângulo $A_1B_1C_1$ formado segundo o Teorema 2.5.	53
4.21 Triângulo $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$ formado segundo várias aplicações do Teorema 2.5.	54
4.22 Verificação de uma única perpendicular comum a duas retas em Geometria Hiperbólica.	56
4.23 Existência de infinitas retas paralelas a uma reta dada.	57
4.24 Representação dos pontos na Geometria Hiperbólica.	58
4.25 Representação dos triângulos generalizados de respectivamente um, dois e três vértices ideais.	59
4.26 Demonstração do ângulo externo para triângulos generalizados.	59
4.27 Sequência da demonstração do ângulo externo para triângulos generalizados.	60
4.28 Representação da Parte A item i) do Teorema 4.26	61
4.29 Representação da Parte A item ii) do Teorema 4.26	61
4.30 Representação da Parte A item iii) do Teorema 4.26	62
4.31 Representação da Parte B item i) subitem a) do Teorema 4.26.	63
4.32 Representação da Parte B item i) subitem b) do Teorema 4.26.	63
4.33 Representação da Parte B item iii) do Teorema 4.26	64
4.34 Caso de congruência lado-ângulo para triângulos generalizados	65
4.35 Representação da demonstração do caso de congruência lado-ângulo para triângulos generalizados	65
4.36 Caso de congruência ângulo-ângulo para triângulos generalizados.	66
4.37 Representação da demonstração do caso de congruência ângulo-ângulo para triângulos generalizados.	66
4.38 Quadrilátero de Saccheri no disco de Poincaré.	68
4.39 Quadrilátero de Lambert no disco de Poincaré.	69
4.40 Retas paralelas a uma reta dada no disco de Poincaré.	69
4.41 Triângulo hiperbólico no disco de Poincaré.	70
4.42 Triângulo hiperbólico com um vértice ideal no disco de Poincaré.	70
4.43 Triângulo hiperbólico com dois vértices ideais no disco de Poincaré.	71

4.44	Triângulo hiperbólico com três vértices ideais no disco de Poincaré.	71
5.1	Construção da quadratura do círculo na Geometria Hiperbólica.	74
5.2	Tesselação regular de hexágonos.	75
5.3	Mosaico semirregular quadrado sem corte.	76
5.4	Tesselação demirregular.	76
5.5	Mosaico irregular.	77
5.6	A esquerda um mosaico periódico, e a direita um mosaico aperiódico	77
5.7	Pavimentação regular no disco de Poincaré.	78
5.8	Tesselação irregular.	78
5.9	Disco de Poincaré sendo usado por Escher em uma de suas obras.	79

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Conversa Inicial	14
1.2	Justificativa	15
1.3	Metodologia	17
1.4	Estrutura do Trabalho	18
2	Conhecimentos Preliminares	20
3	Recorte Histórico	27
3.1	Sobre Euclides e Os Elementos	27
3.2	Investigações a Respeito do Postulado das Paralelas	29
3.3	Os Fundadores da Geometria Hiperbólica	33
4	Sobre a Geometria Hiperbólica	35
4.1	A Consistência da Geometria Hiperbólica	35
4.2	Paralelismo	36
4.3	Modelos da Geometria Hiperbólica	37
4.3.1	Modelo de Beltrami	37
4.3.2	Modelo de Félix Klein	39
4.3.3	Modelo de Poincaré	39
4.4	Teoremas da Geometria Hiperbólica	41
4.4.1	Pontos na Geometria Hiperbólica	57
4.4.2	Triângulo Generalizado	58
4.5	Algumas Diferenças Entre as duas Geometrias	67
4.6	Representações de Alguns Elementos da Geometria Hiperbólica no Modelo de Poincaré	68
5	Potencialidades e Algumas Aplicações	72
5.1	Quadratura do Círculo na Geometria Hiperbólica	72
5.2	Tesselações na Geometria	75

<i>SUMÁRIO</i>	13
5.3 Navegadores Hiperbólicos	78
5.4 As Outras Geometrias	79
6 Considerações Finais	81
Referências	83
A Pesquisa Estatística: Geometrias	85
B Comunicação Científica	104

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conversa Inicial

Este não é um trabalho sobre Geometria Euclidiana. Mas o que isso quer dizer? Bem, é muito comum que ao falarmos de Geometria já nos vem em mente o estudo de objetos matemáticos, tais como círculos, triângulos, entre outros polígonos. No entanto, há um vasto terreno fértil para aprender e investigar a Matemática que está inserido no campo da Geometria, ou melhor, geometrias, clamando por curiosos.

Primeiramente vamos saber o que é Geometria, tema da nossa pesquisa. Ora, de acordo com Silva¹, as origens etimológicas da palavra *Geometria* nos remete ao significado *medir a terra*. Ainda, segundo o mesmo autor, “é o estudo das formas dos objetos presentes na natureza, das posições ocupadas por esses objetos, das relações e das propriedades relativas a essas formas.” Agora, antes de partirmos para a temática central desta pesquisa, vale a pena falar sobre a Geometria Euclidiana. Para tanto, falaremos de um personagem icônico da história da Matemática, o Euclides de Alexandria. De fato, Euclides é uma figura bem popular na Matemática e nas ciências, pois, segundo [4] (2001), na sua obra *Os Elementos*, este desenvolveu a chamada Teoria Euclidiana para a Geometria.

Isto foi um marco importante para a Matemática como um todo, pois a Geometria Euclidiana foi a primeira teoria da Matemática a ser axiomatizada. O método axiomático desenvolvido por ele é de tão grande valor que esse meio de formalizar teorias na Matemática perdura até hoje. A axiomatização da Matemática é o fator que condecora esta disciplina com todo prestígio que possui. No entanto, cerca de dois mil anos depois do grande trabalho de Euclides, alguns estudiosos começaram a investigar as raízes da teoria de Euclides sobre a Geometria, e o resultado foi a expansão do pensamento geométrico, que veremos no desenvolvimento do presente trabalho.

Deste modo, seguimos com algumas perguntas ousadas. Por que euclidiana? Por que o

¹ver em <https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-geometria.htm>

axioma das paralelas é tão estranho em algumas formulações? Existem outras superfícies além da superfície plana?

Claro, para que perguntas como estas sejam possíveis, cabe ao educador matemático que preparar e desenvolver suas aulas trazendo uma quantidade adequada de, por exemplo, episódios da História da Matemática. Por outro lado, a própria denominação da disciplina pode instigar esse debate, isto caso ela seja nomeada como, por exemplo, Geometria Euclidiana.

Enfim, retomando a pergunta inicial, temos que, para uma Geometria ser entendida como não euclidiana “é preciso que em seu conjunto de axiomas, pelo menos um dos axiomas da Geometria Euclidiana não seja verdadeiro”([9], 2004, p.14). Por sua vez, Robold (1992) diz que para uma Geometria seja entendida como não euclidiana basta que ela seja formulada “sem ajuda da hipótese euclidiana das paralelas e contendo muito sua posição sobre paralelas incompatíveis com a de Euclides”(apud [3], 2021, p. 60). Os objetos de estudo deste trabalho melhor se encaixam nesta última definição.

Nessa linha de pensamento, este é um trabalho sobre Geometria não Euclidiana, mais especificamente, sobre a **Geometria Hiperbólica**. É um trabalho de cunho qualitativo, apesar de trazer alguns dados quantitativos. A saber, é uma pesquisa bibliográfica, mas isto será explicado mais adiante.

O intuito desta pesquisa é conhecer e divulgar esta área do saber matemático que demonstra grande potencial de ensino e aprendizagem, isto será justificado no desenvolver do trabalho. Ainda, nos valeremos da presente monografia para divulgação. E mais, na próxima seção será explicitada as dimensões que escolhemos para conhecermos tal Geometria.

É importante destacar que nos valem de um trabalho de pesquisa estatística realizado na disciplina de Estatística, a fim de darmos mais consistência à escolha das nossas justificativas para a pesquisa e elaboração desta monografia. Algumas informações sobre essa pesquisa estatística estão disponíveis no Apêndice A, que se encontra ao final desta monografia.

1.2 Justificativa

Duas retas paralelas se encontram no infinito? Inicialmente durante o curso, algumas considerações avulsas e curiosas, como a pergunta inicial, e ainda, de alguns professores podem ter servido de gatilho quando foi decidido estudar sobre o presente tema. E ainda frases do tipo: vamos calcular a distância entre esses dois pontos da cidade, mas iremos desconsiderar a Geometria do Táxi² e vamos calcular essa distância como sendo uma reta no plano.

Na verdade, o interesse em conhecer mais a respeito de Geometria se deu na disciplina de História da Matemática. No livro do Howard Eves, a saber, [6], sobre História da Matemática, um componente da bibliografia da referida disciplina, há um capítulo onde um dos

²Geometria que deriva da Geometria Euclidiana Plana que possui uma métrica diferente desta.

assuntos é o físico Kepler. Este capítulo traz menções a respeito da pavimentação do plano euclidiano e sobre o antiprisma³.

Por fim, foi durante leituras de referências teóricas para elaboração de um trabalho para o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) que soube sobre a existência da Geometria Esférica. A partir da ação de buscar conhecer mais a respeito da Geometria Esférica, o autor tomou nota de outras geometrias que são diferentes da Euclidiana.

Com o conhecimento desta nova área, o questionamento que iniciou este texto foi respondido, e isso foi de importante significação para a escolha da opção de pesquisar sobre as Geometrias não Euclidianas, em especial, a Geometria Hiperbólica.

Daí, durante o período de buscar referência teórica, foi encontrado em Júnior (2020) argumentos que justificam, de maneira rigorosa e sistematizada, a necessidade ou importância de trabalhar com as Geometrias não Euclidianas tanto em curso de formação de professores quanto na Escola Básica.

No nível de formação de professores, [8] (2020) traz:

Brum, Schuhmacher e Da Silva (2015) compreendem a importância do ensino de Geometrias não Euclidianas na formação de professores, alegando que as mesmas servem de instrumentos para diversas áreas do conhecimento, ampliando a visão do professor sobre a construção do conhecimento geométrico. Além disso, o estudo de outras Geometrias diferentes da Euclidiana pode corroborar para práticas educativas que desarticulem o excesso de formalismo que prevalece no ensino de Geometria nas aulas de Matemática. ([8],2020 p.51)

Desta maneira, ao se estudar Geometria não Euclidiana (vale dizer que esta não possui um caráter de exclusão da Geometria Euclidiana, mas sim de complementar o pensamento geométrico) o professor se apropria mais do saber matemático por trás da Geometria e, conseqüentemente, desenvolve uma certa maturidade ao lecionar Matemática, em especial, a Geometria; pois ele terá conhecimento que muito do que se conhece a respeito da Geometria é fruto de dimensão cognitiva humana, do espírito do homem, e poderá notar uma relação entre o formalismo matemático e as inquietações humanas, assim colaborando ao acadêmico superar a visão na qual o indivíduo não tem muita participação no fazer matemático. Assim sendo, o docente poderá refletir (sentido de reflexão, como o de espelho) esta maneira de conceber a Geometria em sua prática, proporcionando até mesmo uma Educação Matemática mais significativa.

Já no âmbito do Ensino Básico, [8] (2020, p. 52) baseado em sua pesquisa, diz que, ao se tratar da constituição do conhecimento geométrico, “[...] a criança estabelece primeiro as relações de ordem topológicas, para em seguida construir quase que simultaneamente as relações projetivas e euclidianas.” Isto nos traz como ensinamento que, como a criança tem um determinado processo de aprender noções geométricas baseado em sua intuição, imaginação e cognição, optar por começar o estudo da Geometria pela Euclidiana, aquela que requer um certo amadurecimento intelectual para compreender suas regras (axiomas) e seu modo de pensar (dedutivo), pode acabar por extinguir ou subdesenvolver a imaginação, a intuição e a cognição do

³Figura espacial que se diferencia do prisma por ter suas faces laterais triangulares

indivíduo, dimensões tão importantes não somente no campo da Matemática, ou das geometrias, mas de fundamental valor para o desenvolvimento pessoal e social.

Vendo por esta óptica, realizamos uma pesquisa estatística com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins, à procura de dados que pudessem nos dar uma pista do conhecimento destes alunos em relação às geometrias em geral. No desenvolvimento da referida pesquisa concluímos que nossa amostra possui como principal referência a Geometria Euclidiana, ao se tratar de Geometrias. Notamos também uma confusão quanto aos referenciais teóricos dos discentes, uma vez que as perguntas foram construídas de modo a pôr em prova a funcionalidade da Geometria de Euclides em espaços não planos, por exemplo, o planeta Terra. Por fim, vimos que as Geometrias não Euclidianas não são totalmente desconhecidas por eles, não obstante, conhecida por uma quantidade ínfima; no entanto, o problema da distinção das Geometrias e dos espaços onde estas teorias são desenvolvidas são o bastante para seguirmos com a nossa pesquisa, pois verificou-se que os alunos apresentam uma compreensão de elementos que os permitem expandir seus conhecimentos geométricos, porém, esse conhecimento em potencial é inibido pela hegemonia da Geometria Euclidiana.

Em virtude dos argumentos aqui explicitados, tais como o aprofundamento do saber geométrico por parte do professor, a forma como o pensamento geométrico é desenvolvido pela criança e pelo fato de que os alunos do curso de Licenciatura em Matemática demonstram elementos que permitem concluir que existe um certo desconhecimento de tal tema ou sobre as particularidades de cada teoria geométrica, esta pesquisa se faz necessária, tendo como objetivo, em primeira instância, divulgar a respeito sobre o tema em questão e, por consequência, enriquecer os debates na nossa Universidade sobre a Geometria, no referente, sobre a forma de aprender e ensinar geometrias em geral.

1.3 Metodologia

Um dos objetivos deste trabalho, como já foi dito anteriormente, é conhecer mais a respeito da Geometria Hiperbólica. Para alcançarmos essa meta optou-se por uma investigação com abordagem qualitativa, mais especificamente, por uma pesquisa bibliográfica nos parâmetros conceituados por Severino (2014), que diz:

A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utiliza-se de dados ou de categorias teóricas já trabalhados por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos. ([12], 2014 p.75)

Isto é, para constituição desta monografia foram necessárias a leitura, análise e documentação de outras obras que já tratam sobre o tema. Ao falarmos de documentação,

estamos nos referindo a uma técnica de pesquisa que consiste em “toda forma de registro e sistematização de dados, informações, colocando-os em condições de análise por parte do pesquisador”

([12], 2014, p. 76). Por fim, a tomaremos no sentido de desenvolvimento de uma pesquisa, pois “é a técnica de identificação, levantamento, exploração de documentos fontes do objeto pesquisado e registro das informações retiradas nessas fontes e que serão utilizadas no desenvolvimento do trabalho.”(SEVERINO, 2014, p. 76), isto é, para a realização da presente monografia não bastou apenas a leitura avulsa das fontes, mas sim de uma leitura mais atenciosa a fim de registrar informações relevantes contidas nas fontes consultadas para a realização da mesma.

1.4 Estrutura do Trabalho

Para conhecer, iremos buscar conteúdos relacionados a Geometria Hiperbólica no que tange à dimensão histórica, dimensão matemática (resultados formais presentes em tal teoria) e dimensão utilitária (a respeito se há aplicação da mencionada Geometria). Deste modo, iremos dizer o que há em cada um dos seguintes capítulos.

- No capítulo intitulado *Conhecimentos Preliminares 2*, o leitor há de encontrar alguns resultados pertencentes a Geometria Euclidiana Plana, como alguns dos critérios de congruência de triângulos, o Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Euclidianos, a relação lado oposto ao ângulo, Postulado de Pasch, entre outros. Tais resultados foram posto nessa seção por serem úteis no desenvolvimento de uma parcela dos resultados apresentados na Geometria Hiperbólica, bem como para servir ao leitor como comparação entre resultados comuns a ambas Geometrias.
- No capítulo intitulado *Recorte Histórico 3*, trazemos um pouco sobre a história por trás das Geometrias não Euclidianas, em especial a Geometria Hiperbólica. Assim, há fragmentos a respeito de Euclides e sua obra *Os Elementos*, alguns dos matemáticos que tentaram provar o 5º Postulado e os fundadores da Geometria Hiperbólica.
- No capítulo intitulado *Sobre a Geometria Hiperbólica 4*, abordaremos a respeito da Geometria Hiperbólica discorrendo sobre a sua consistência, sobre o paralelismo, sobre os modelos hiperbólicos e demonstraremos alguns teoremas.
- No capítulo intitulado *Potencialidades e Algumas Aplicações 5*, como sugere o título, abordamos algumas potencialidades e aplicações da referida Geometria. Dentre as aplicações trazemos sobre a Tesselação e sobre os Navegadores Hiperbólicos. Por ou-

tro lado, dentre as possibilidades, apresentamos a Quadratura do Círculo na Geometria Hiperbólica e o desenvolvimento do pensamento geométrico.

- E finalmente no capítulo de *Conclusões Finais* 6, fazemos um balanço a fim de verificarmos se nossos objetivos foram alcançados, bem como uma pequena síntese de cada capítulo.

Capítulo 2

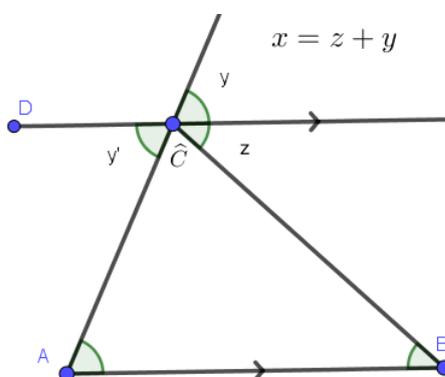
Conhecimentos Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados da Geometria Euclidiana Plana de maneira explicada por não se tratarem de resultados triviais, mas, de certa maneira, já consolidados na Geometria de Euclides. Estes axiomas e teoremas serão úteis para melhor fundamentar as demonstrações de proposições presentes na Geometria Hiperbólica, bem como permitir ao leitor uma comparação do desenvolvimento entre os teoremas que são comuns a ambas teorias. Para tanto, a principal fontes para a elaboração desta seção foi: [5] (2005). Dessa forma, seguem os resultados:

Teorema 2.1 (Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Euclidianos). *Para qualquer triângulo na Geometria Euclidiana, qualquer ângulo externo de um dos vértices é igual à soma dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo euclidiano.

Figura 2.1: Teorema do ângulo externo para triângulos.



Fonte: Arquivo próprio.

Tomamos como referência o ângulo do vértice C , e o nomeamos de \widehat{C} , o ângulo externo adjacente a ele é nomeado por x .

Considerando a Figura 2.1, temos como hipótese que x é o ângulo externo adjacente a \widehat{C} . E como tese, que os ângulos formados nos vértices A e B , respectivamente, \widehat{A} e \widehat{B} , satisfazem $\widehat{A} + \widehat{B} = x$.

Agora, escolhamos um ponto D tal que possamos traçar um segmento CD que seja paralelo ao segmento AB . Note que, ao fazermos isso podemos escrever o ângulo $x = y + z$.

Por outro lado, obtemos as relações de ângulos formados pelos segmentos paralelos AB e CD , e também pelas secantes a ambas, AC e BC :

- Como AB é paralelo a CD , então $\widehat{A} = y$, por serem ângulos alternos internos e pela congruência dos ângulos opostos;
- Como AB é paralelo a CD , então $\widehat{B} = z$, por serem ângulos alternos internos.

Dado que $x = y + z$, $\widehat{A} = y$ e $\widehat{B} = z$, obtemos $\widehat{A} + \widehat{B} = y + z$, isto é

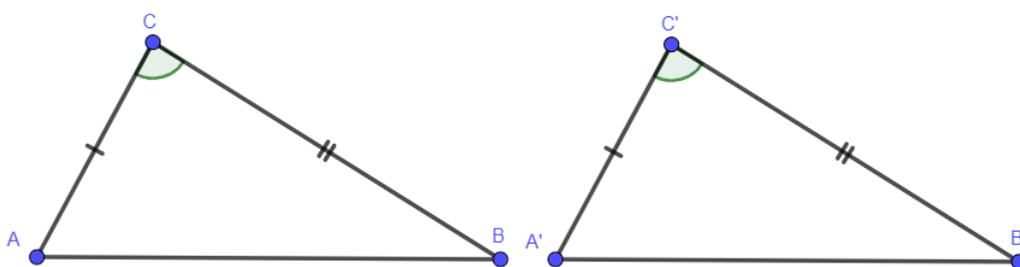
$$x = \widehat{A} + \widehat{B}.$$

Portanto, num triângulo euclidiano, um ângulo externo qualquer é igual a soma dos outros dois ângulos internos não adjacentes a ele.

□

Postulado 2.2 (Caso Lado-Ângulo-Lado). Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre eles, então ambos triângulos são congruentes.

Figura 2.2: Caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos.

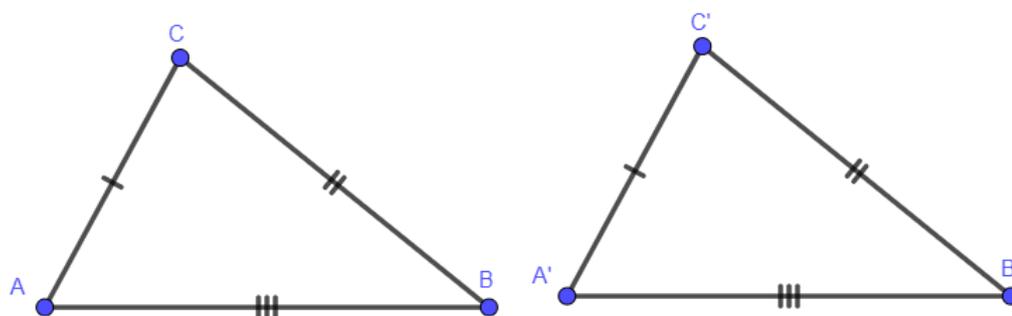


Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 2.3 (Caso lado-lado-lado). Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes seus três lados, então esses triângulos são congruentes.

Demonstração: Sejam A, B e C os vértices de um triângulo e A', B' e C' vértices de um outro triângulo.

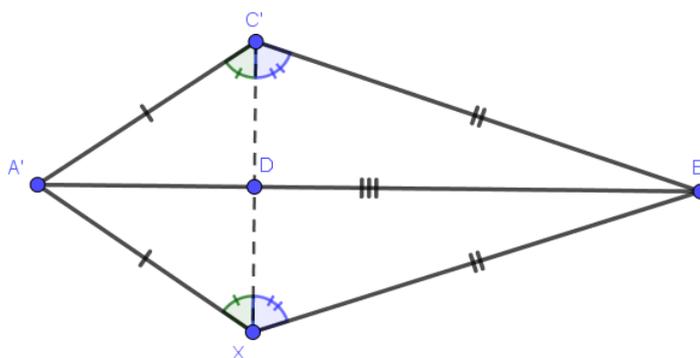
Figura 2.3: Triângulos ABC e $A'B'C'$.



Fonte: Arquivo próprio.

Considerando a Figura 2.4, temos como hipótese que $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C', AC \equiv A'C'$. E como tese, que o triângulo ABC é congruo do triângulo $A'B'C'$.

Figura 2.4: Caso lado-lado-lado de congruência de triângulos.



Fonte: Arquivo próprio.

Escolhemos um ponto X de forma que $A'X \equiv AC$ e $X\hat{A}'B' \equiv C\hat{A}B$. Notemos que X está no semiplano oposto ao de C' em relação ao lado AB . Dado que, $AC \equiv A'C'$, temos $A'X \equiv A'C'$.

Agora, tomamos o segmento $C'X$ e marcamos seu ponto de interseção com o segmento $A'B'$, nomeando esse ponto de D .

Observemos que os triângulos ABC e $A'B'X$ são congruentes, pois $A'B' \equiv AB$, $X\hat{A}'B' \equiv C\hat{A}B$ e $A'X \equiv AC$. Daí concluímos que $XB' \equiv CB$.

Por sua vez, já que $A'X = A'C'$, temos que o triângulo $A'C'X$ é isósceles de base $C'X$, logo

- i) O ângulo $A'\hat{C}'X$ é congruo com o ângulo $A'\hat{X}C'$.

Por outro lado, como $XB' \equiv C'B'$, temos que o triângulo $B'C'X$ é isósceles de base $C'X$, daí

ii) Afirmamos a congruência (entre os ângulos) $B'\widehat{C}'X \equiv B'\widehat{X}C'$.

Notemos que de i) e ii), resulta a congruência $A'\widehat{C}'B' \equiv A'\widehat{X}B'$.

Dado que, $A'X \equiv A'C'$, temos que o triângulo $B'C'X$ é isósceles de base $C'X$ e $XB' \equiv C'B'$. Assim, obtemos a congruência dos triângulos $A'B'C' \equiv A'B'X$.

Portanto, temos a congruência dos triângulos $ABC \equiv A'B'C'$.

□

Teorema 2.4 (Relação lado oposto ao ângulo). *Se ABC e DEF são dois triângulos tais que $AB = DE$, $AC = DF$ e $BC > EF$, então $\widehat{A} > \widehat{D}$.*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $\widehat{A} \leq \widehat{D}$. Vamos analisar dois casos:

- Caso $\widehat{A} = \widehat{D}$

Nesta situação, teríamos um caso de congruência de triângulos lado-ângulo-lado, o que seria um absurdo, pois, dessa forma $BC \equiv EF$, contrariando a hipótese.

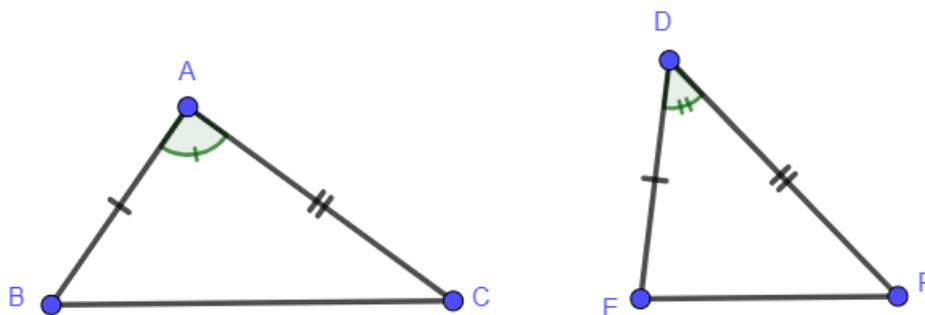
- Caso $\widehat{A} < \widehat{D}$

Nesse caso, teríamos que $BC < EF$, pois oposto ao maior lado está o maior ângulo. Também resultaria num absurdo, pois $BC < EF$, vai contra a nossa hipótese de que $BC > EF$.

Portanto, $\widehat{A} > \widehat{D}$.

□

Figura 2.5: Relação lado oposto ao ângulo.

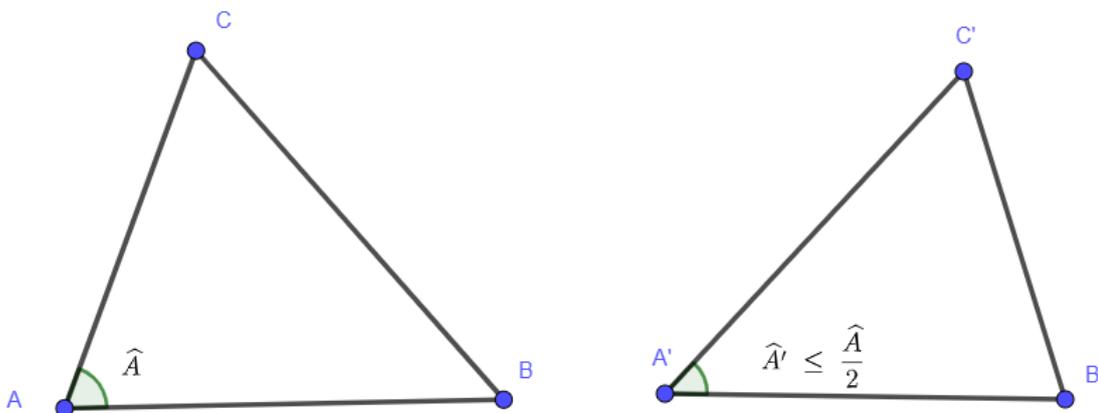


Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 2.5. *Dado um triângulo ABC , existe outro triângulo $A'B'C'$ com a soma dos ângulos internos igual, mas com a medida do ângulo no vértice A' menor ou igual à metade da medida do ângulo A .*

Demonstração:

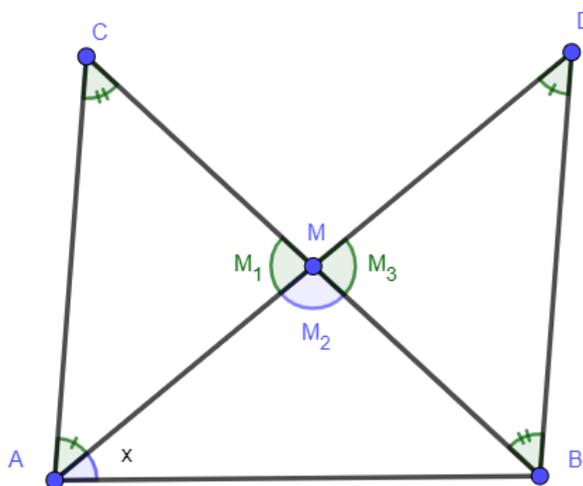
Figura 2.6: Representação do Teorema 2.5.



Fonte: Arquivo próprio.

Como vamos usar triângulos euclidianos, supomos que a soma dos ângulos internos deles é 180° . Seja o triângulo ABC . Tracemos um segmento de reta que intercepta no ponto médio do segmento CB em um ponto M , e tem como extremos os pontos A e D , tal que $AM \equiv MD$ e $CM \equiv BM$. Observe na Figura 2.7 que formamos dois triângulos congruentes pelo caso lado-ângulo-lado (Postulado 2.2), a saber, $AMC \equiv DMB$.

Figura 2.7: Apoio para a demonstração do Teorema 2.5.



Fonte: Arquivo próprio.

Notemos que

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + 180^\circ = (\hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{C}) + (\hat{A} + \hat{M}_2 + \hat{B}).$$

Como $AMC \equiv DMB$, pelo Postulado 2.2, podemos reescrever a relação anterior da seguinte maneira:

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + 180^\circ = (\hat{D} + \hat{M}_3 + \hat{B}) + (\hat{A} + \hat{M}_2 + \hat{B}). \tag{2.1}$$

Analogamente, analisamos o triângulo ABD , e obtemos

$$(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}) + 180^\circ = (\widehat{A} + \widehat{M}_2 + \widehat{B}) + (\widehat{B} + \widehat{M}_3 + \widehat{D}). \quad (2.2)$$

De acordo com (2.1) e (2.2)

$$(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) + 180^\circ = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}) + 180^\circ,$$

ou seja,

$$(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}).$$

Com isso, existe o triângulo $A'B'C'$, tal que

$$(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = (\widehat{A}' + \widehat{B}' + \widehat{C}').$$

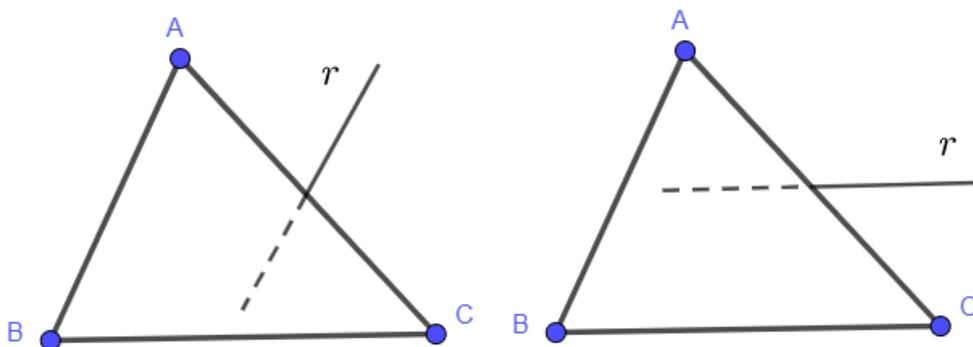
Note que podemos escrever o ângulo $\widehat{A} = a + x$, tal que $a \leq \frac{\widehat{A}}{2}$ ou $x \leq \frac{\widehat{A}}{2}$, pois as duas medidas não podem ser simultaneamente maiores do que $\frac{\widehat{A}}{2}$.

Portanto, temos um triângulo $A'B'C'$ com a soma dos ângulos internos iguais ao triângulo ABC , de modo que possui um ângulo interno menor ou igual que $\frac{\widehat{A}}{2}$.

□

Postulado 2.6 (Postulado de Pasch). Dados três pontos A , B e C , não colineares e uma reta r , no plano determinado por estes três pontos, e que não contém nenhum deles, se r passa por um ponto de AC então também passa por um ponto de BC ou de AB . O processo é análogo caso r passe por um ponto de AB ou BC .

Figura 2.8: Representação do Postulado de Pasch.



Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 2.7. *Em Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é exatamente 180° .*

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e que α, β e γ seja seus ângulos internos. Traçamos uma reta r paralela ao lado BC do triângulo que passa pelo ponto A , e alongamos os lados AB e AC ambos no sentido de A , como na Figura 2.7.

Notemos que os ângulo α e α_1 são correspondentes, logo, são congruos. Ainda, α_2 é o ângulo oposto à α_1 em relação ao vértice A , portanto, $\alpha_2 \equiv \alpha$.

De maneira análoga, temos que β e β_1 são correspondentes, logo, são congruos. E mais, β_2 é o ângulo oposto à β_1 em relação ao vértice A , portanto, $\beta_2 \equiv \beta$.

Agora, temos que o ângulo raso (180°) no vértice A na reta r foi dividido em três ângulos, sendo eles β_2, γ e α_2 . Dessa forma, temos que

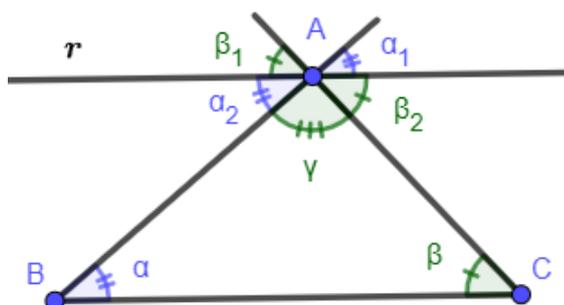
$$\beta_2 + \gamma + \alpha_2 = 180^\circ.$$

Notemos que $\alpha \equiv \alpha_2$ e $\beta \equiv \beta_2$, assim,

$$\beta + \gamma + \alpha = 180^\circ.$$

□

Figura 2.9: Apoio para a demonstração do Teorema 2.7.



Fonte: Arquivo Próprio.

Capítulo 3

Recorte Histórico

Neste capítulo estão as notas históricas acerca da Geometria não Euclidiana fruto do estudo bibliográfico do autor. Para enriquecer o trabalho, trago uma narrativa que envolve: os questionamentos sobre o Postulado das Paralelas; das tentativas ao longo do tempo de provar o Postulado das Paralelas ou, pelo menos, aperfeiçoar seu enunciado; alguns resultados que eles alcançaram; os estudos de Saccheri; a descoberta da Geometria não Euclidiana feita por Gauss, Bolyai e Lobachevsky; entre outros fatos interessantes para aqueles que desejam conhecer mais a respeito da história das ciências, em especial a História da Matemática. Para tanto, a elaboração deste capítulo foi totalmente baseada nas seguintes referências: [2] (2008) e [6] (2004).

3.1 Sobre Euclides e Os Elementos

Começamos a discorrer a partir do período em que Euclides de Alexandria (325-265 a.C.) elaborou seu maior trabalho, cerca de 300 anos a.C. Porém, é importante deixar claro ao leitor que a Geometria existia desde os primórdios da humanidade, bem como era bem útil para o desenvolvimento humano, sobretudo da agrimensura¹ e astronomia². Segundo [6] (2004, p. 167), ocorria um caso bem comum ao que costuma ocorrer hoje em dia nas aulas de Matemática do nosso país: um aluno de Euclides o indagou querendo saber qual a utilidade prática do conteúdo estudado naquele momento. Euclides, comovido com tal pergunta, mandou o seu escravo dar uma moeda a este aluno “para que tivesse algum ganho com que estava aprendendo.”([6], p. 167).

Enfatizamos este fato para mostrar o caráter de apreciação pela Matemática, de desenvolvimento espiritual e intelectual que acreditava-se ser consequência do estudo da Matemática.

¹Ciência em que se utiliza conhecimentos da Geomática como ferramenta para a captura e gerenciamento de dados espaciais. Ver em: <https://blog.cpetecnologia.com.br/entenda-a-diferenca-entre-agrimensura-e-topografia/>

²Ciência que estuda os corpos celestes do espaço sideral

Podemos notar que essas características são heranças da visão de Pitágoras, Platão, suas respectivas escolas e dos seus alunos que nelas frequentavam. Enfim, essa perspectiva sobre o conhecimento matemático reverbera até os dias atuais, e foi de fundamental importância para o surgimento das Geometrias não Euclidianas.

Retornamos a falar de Euclides, mais especificamente, do seu trabalho. O trabalho em questão trata-se da coleção de 13 livros, intitulado *Os Elementos*. Este se constitui como um tratado matemático de estudos referentes à Geometria, à Álgebra Elementar e à Teoria dos Números. O diferencial deste trabalho está na maneira como foi organizado. As 465 proposições presentes neste tratado são deduções lógicas oriundas e sustentadas a partir de outras deduções que, por sua vez, são deduções lógicas de um número finito de premissas aceitas como verdadeiras. Este método de conceber teorias matemáticas é chamado de dedutivo-axiomático. Este é o modelo de desenvolvimento do conhecimento matemático, e *Os Elementos* foi a primeira obra a possuir este caráter.

Figura 3.1: Euclides de Alexandria.



Fonte: Arcadi, 2008, p. 3.

Os Elementos de Euclides trazem 10 afirmações, sendo divididas em 5 axiomas e 5 postulados. Com exceção do 5º Postulado, os outros quatro possuem a característica de ser de simples compreensão que são considerados auto-evidentes. Transcrevemos aqui o 5º Postulado a fim de mostrar ao leitor o porquê dele ser a exceção entre os outros postulados existentes:

P5 se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos. [6], (2004 p.180)

Como visto, este postulado não cumpre com a característica de alta evidência e necessita de um certo entendimento geométrico para que seja aceito pelo leitor como uma verdade. Apesar do seu enunciado ser mais elaborado, há outra curiosidade acerca do tal. Ao explorarmos o livro de Euclides, percebemos que as vinte e oito primeiras proposições não fazem uso do 5º Postulado em sua formulação, assim, o referido postulado só aparece a partir da proposição de

número 29³. Por conta dessas peculiaridades, pessoas de todas as eras se lançaram a investigar o porquê dessas questões intrigantes que orbitam o Postulado das Paralelas.

3.2 Investigações a Respeito do Postulado das Paralelas

Nesta seção faremos alguns recortes históricos das tentativas ao longo do tempo de provar o postulado das paralelas ou, pelo menos, aperfeiçoar seu enunciado. Vale dizer que o leitor pode encontrar o raciocínio matemático por trás das tentativas dos matemáticos de demonstrar o postulado no capítulo 4 da referência [2] (2008).

Trazemos em primeiro lugar o matemático e astrônomo chamado Claudius Ptolomeu (85-165 d.C.). De acordo com o [6] (2004 p. 204) ele é o autor de uma obra bem relevante no campo da astronomia intitulada *Almagesto*. Esse trabalho só foi superado por estudos de Copérnico e Kepler. Apesar de se dedicar na Astronomia e na Trigonometria, Ptolomeu possuía uma opinião controversa para o tal postulado e propôs uma prova para o mesmo a partir dos outros quatro postulados. O resultado de sua demonstração consiste em usar uma proposição equivalente ao Postulado das Paralelas para provar o próprio postulado, o que não é aceitável.

Figura 3.2: Claudius Ptolomeu.

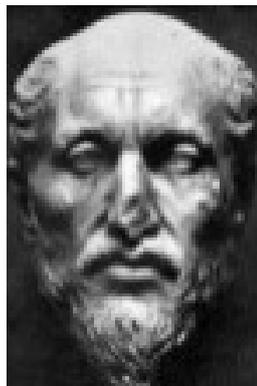


Fonte: Arcadi, 2008, p. 4.

Proclus Diadochus (411-485 d.C.) foi um importante estudioso grego. Entre suas obras está a chamada *Comentários sobre o Euclides*, material no qual ele também demonstrou ser indiferente quanto ao Postulado das Paralelas. Enfim, a demonstração de Proclus não tornou o Postulado das Paralelas em um teorema, pois o desenvolvimento da argumentação é fundamentada no fato de que as retas paralelas são equidistantes, argumento que é equivalente ao próprio Postulado das Paralelas.

³A proposição é enunciada da seguinte maneira: “A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos.” Ver na página 120 de *BICUDO, Irineu. Os elementos. Unesp, 2009.*

Figura 3.3: Proclus Diadochus.



Fonte: Arcadi, 2008, p. 4.

Nasir Eddin (1201-1274) foi um importante matemático árabe da sua época. “É dele o primeiro trabalho de trigonometria plana e esférica considerado independente da astronomia” ([6], 2004 p. 261). As investigações de Nasir sobre o Postulado das Paralelas é de suma importância para o surgimento das Geometrias não Euclidianas, pois entre suas contribuições está a famosa hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso⁴. As referidas hipóteses são de fundamental importância para os sucessores do árabe, entre eles está Saccheri, um personagem que avançou bastante no estudo sobre as Geometrias não Euclidianas.

Figura 3.4: Nasir Eddin.



Fonte: Arcadi, 2008, p. 5.

Não houve estudos de grande relevância acerca do Postulado das Paralelas durante o período entre a tentativa de Nasir até antes do trabalho de Saccheri, já na Idade Média. Girolamo Saccheri (1667-1733) foi professor em várias universidades, isso após aos 23 anos quando também concluiu o noviciado na Ordem Jesuíta. O grande avanço que Saccheri proporcionou

⁴As referidas hipótese dizem respeito aos valores que os ângulos superiores do quadrilátero de Saccheri, bem como o ângulo não reto do quadrilátero de Lambert. Assim, os citados ângulos assumem um valor de acordo com a hipótese escolhida, agudo(s), reto(s) ou obtuso(s). Vale ressaltar que cada uma dessas hipóteses desdobram em teorias geométricas distintas, como veremos adiante.

para o conhecimento sobre as Geometrias não Euclidianas envolveu o seguinte processo.

Primeiro, após estudar os elementos e ficar fascinado com o método de demonstração de redução ao absurdo, tanto que publicou um livro trazendo esse método à lógica formal. Assim sendo, na sua publicação posterior, *Euclides Livre de Toda Imperfeição*, Saccheri se vale da redução ao absurdo na tentativa de demonstrar o intrigante postulado; segundo [2](2008), Saccheri foi o primeiro a usar este meio para demonstrar o referido postulado. Para sua demonstração, Saccheri concebe um quadrilátero birretângulo, um quadrilátero $ABCD$ onde os ângulos da base são retos (\widehat{A} , \widehat{D}), os ângulos superiores são congruos (\widehat{B} , \widehat{C}) e os segmentos AB e BD possuem a mesma medida. Essa figura é fruto dos estudos de Saccheri referente às 28 proposições primeiras do *Os Elementos*, as quais não necessitam do Postulado das Paralelas.

Deste modo, uma vez que os ângulos superiores são iguais, então há apenas três hipóteses: ou eles são retos ou eles são agudos ou eles são obtusos. Segundo [6] (2004 p. 540), a intenção de Saccheri era mostrar que a hipótese do ângulo agudo e a hipótese do ângulo obtuso levam a contradições. Desta forma, de acordo com o método de redução ao absurdo, seria válida a hipótese do ângulo reto, hipótese a qual resultaria na prova do Postulado das Paralelas. Como veremos posteriormente, esta contradição não existe, porém, uma vez que Saccheri estava tão obstinado em provar o Postulado de Euclides, ele realizou conclusões equivocadas na argumentação da suposta contradição presente na hipótese do ângulo agudo. É importante saber que durante a tarefa de justificar a tal contradição Saccheri formulou muito dos Teoremas da Geometria Hiperbólica. Enfim, caso Saccheri não tivesse insistido tanto em contradizer a hipótese do ângulo agudo seria dele o título de fundador das Geometrias não Euclidianas.

Agora, trazemos mais dois personagens que deixaram suas contribuições acerca do tema, porém sem desenvolvimento acentuado na área. De qualquer modo, deixaram investigações que tangem o que implicaria a aceitação de alguma das hipóteses e suas relações com objetos geométricos já conhecidos.

Primeiramente, trazemos o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777). Ele investigou o problema através de um quadrilátero trirretângulo, o qual era a metade de um Quadrilátero de Saccheri, e aplicou as mesmas três hipóteses para o quarto ângulo. Do mesmo modo que seu antecessor, demonstrou que a soma dos ângulos internos do triângulo: na hipótese do ângulo agudo é menor que dois ângulos retos, na hipótese do ângulo obtuso é maior que dois ângulos retos e que na hipótese do ângulo reto é igual a dois ângulos retos. Indo mais além que Saccheri, Lambert constatou que o excesso e a deficiência de dois ângulos retos na soma dos ângulos internos dos triângulos decorrente, respectivamente, da hipótese do ângulo obtuso e da hipótese do ângulo agudo possuem uma relação de proporcionalidade com a área dos respectivos triângulos. Em decorrência dessas observações, ele notou a semelhança entre a Geometria consequente da hipótese do ângulo obtuso é a Geometria Esférica. De modo análogo, Lambert especulou que a Geometria oriunda da hipótese do ângulo agudo poderia

ser verificada numa esfera de raio negativo, a pseudoesfera. Ademais, Lambert não conseguiu provar o Postulado das Paralelas por dificuldades e equívocos em refutar a hipótese do ângulo agudo.

Por fim, agora trazemos o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Ele investigou o problema a partir das hipóteses da soma dos ângulos internos de um triângulo ser maior que, menor que, ou igual a dois ângulos retos. No entanto, sem resultados convincentes. Sua maior contribuição está em ter popularizado o problema do Postulado das Paralelas nas várias edições do seu livro *Éléments de Géométrie*.

Figura 3.5: Johann Heinrich Lambert à direita, e Adrien-Marie Legendre à esquerda.



Fonte: Arcadi, 2008, p. 7.

Antes de irmos de fato aos fundadores Independentes das Geometrias não Euclidianas, temos que registrar a contribuição do matemático e físico John Playfair (1748-1819). Sua contribuição é uma reformulação equivalente ao Postulado das Paralelas que diz: “por um ponto fora da reta pode se traçar uma única reta paralela à reta dada”. O Postulado de Playfair se relaciona bem com as hipóteses do ângulo agudo, ângulo reto e ângulo obtuso; adaptando a expressão de Playfair com as três hipóteses obtemos a seguinte conjectura: *por um ponto fora de uma reta pode se traçar pelo menos duas, apenas uma ou nenhuma reta paralela à reta dada*.

Figura 3.6: John Playfair.



Fonte: <https://www.britannica.com/biography/John-Playfair>

3.3 Os Fundadores da Geometria Hiperbólica

Com as sucessivas falhas na negação da hipótese do ângulo agudo, a certeza da independência do Postulado das Paralelas era só uma questão de tempo, bem como a chance de haver outra Geometria diferente da de Euclides que se desencadeava a partir de tal hipótese.

Diante desse contexto, três grandes matemáticos descobriram de forma independente a Geometria que há nos desdobramentos da hipótese do ângulo agudo, são eles: Johann Carl Friedrich Gauss, Janos Bolyai e Nicolai Lobachevsky. Eles investigaram o problema do Postulado de Euclides a partir do Postulado de Playfair adaptado como comentado anteriormente. Possivelmente a intenção deles era provar o Postulado das Paralelas se valendo dos outros quatro, porém, como a hipótese do ângulo agudo pareceu inegável, o trio de estudiosos partiram para desenvolver mais resultados que surgiram a partir dessa possibilidade.

Gauss, certamente, foi o primeiro a conhecer a existência das Geometrias não Euclidianas, mas especificamente, a Geometria Hiperbólica. Isto se deve ao fato de Gauss ter se correspondido através de cartas com outros matemáticos, cujo conteúdo das cartas eram resultados da referida Geometria. No entanto, a não publicação oficial dos seus estudos na área não deram a ele o título de fundador da Geometria não Euclidiana, assim, este prestígio ficou para os outros dois matemáticos, Bolyai e Lobachevsky.

Figura 3.7: Johann Carl Friedrich Gauss..



Fonte: Arcadi, 2008, p. 8.

Janos Bolyai (1775-1856), um oficial do exército húngaro que foi incentivado a estudar Matemática pelo seu pai, que era um professor de Matemática e nutria uma longa amizade com Gauss. Após estudar e compreender a questão das paralelas, tão logo percebeu a impossibilidade de provar como teorema o referido postulado e partiu para explorar os inusitados resultados da Geometria que emergia da hipótese do ângulo agudo. Em uma carta enviada ao seu pai, Bolyai comunica com entusiasmo sua descoberta; após alguns anos, Bolyai publica oficialmente seu trabalho sobre a nova Geometria na forma de apêndice no livro do seu pai sobre Matemática Elementar. Esta foi a única publicação acadêmica de Bolyai e possivelmente por

não ter se aprofundado nas idéias da peculiar Geometria, o prestígio dessas descobertas ficam mais ligadas a Lobachevsky.

Figura 3.8: Janos Bolyai.



Fonte: Arcadi, 2008, p. 8.

Agora chegamos ao russo Nicolai Lobachevsky (1792-1856) que manteve durante toda a vida vínculo com a Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor e, por fim, como reitor. Os artigos sobre a Geometria não Euclidiana escritos por Lobachevsky foram oficialmente publicados alguns anos antes do trabalho de Bolyai, no entanto, por conta da língua utilizada na escrita do seu trabalho aliada à dificuldade de trânsito de informações, bem como o caráter estranho dos resultados, os artigos do russo foram completamente ignorados pela comunidade acadêmica local e global. Porém, ele não se deu por vencido e persistiu em suas descobertas para que estas ganhassem o merecido reconhecimento. Então, o russo publicou seu trabalho, após aprimoramento do mesmo, em um livro escrito em língua alemã com o intuito de conquistar novos leitores. Finalmente em 1855, um ano antes de sua morte, Lobachevsky publicou na língua francesa sua obra mais completa sobre o assunto, *Pangeometria*, Lobachevsky, que foi ditada, pois ele já se encontrava cego e debilitado.

Figura 3.9: Nicolai Lobachevsky.



Fonte: Arcadi, 2008, p. 9.

Capítulo 4

Sobre a Geometria Hiperbólica

Neste capítulo, será desenvolvido a parte matemática-formal da nossa pesquisa, abordando algumas definições e resultados que servirão para entendermos melhor essa Geometria. Para escrevermos a respeito dos modelos da Geometria Hiperbólica e a respeito do paralelismo nos inspiramos nas seguintes fontes: [2] (2008), [4] (2001), [1] (2021) e [7] (2014).

4.1 A Consistência da Geometria Hiperbólica

Antes de continuarmos é importante conhecermos mais sobre o método dedutivo-axiomático. Para construirmos um modelo dedutivo-axiomático são necessários três itens: conceitos primitivos, axiomas e teoremas.

- Por conceitos primitivos entendemos a definição de objetos geométricos tais como, por exemplo: o que é um plano, o que é um ponto e o que é uma reta.
- Por axioma entendemos como sendo as relações entre os conceitos primitivos que não precisam de comprovação, por exemplo, o axioma que diz que por dois pontos distintos passa apenas uma única reta que os contém.
- Por teoremas entendemos como verdades comprovadas através dos axiomas, por exemplo o Teorema de Pitágoras.

Para complementar, [4] (2001, p. 33) diz que os axiomas devem ser construídos objetivando três características, a saber, eles devem ser consistentes suficientes e independentes. Quando atribuímos a um sistema de axiomas a qualidade de consistência, estamos nos referindo que este sistema não produz teoremas contraditórios. Um sistema de axiomas é suficiente quando não falta nenhum axioma para compor a teoria desenvolvida. E, por fim, um conjunto de axiomas é dito como independente quando nenhum axioma pode ser demonstrado com base nos demais, a grosso modo, nenhum axioma na verdade é um teorema.

Há teóricos que fazem distinção quanto aos significados das palavras axioma e postulado, apesar de serem interpretadas como sendo palavras sinônimas no cotidiano acadêmico. Dentre as distinções que existem, trazemos uma mencionada por [6] (p. 179), “um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.

Uma vez que, até o momento, era impossível de ser demonstrado o Postulado das Paralelas com base nos outros quatro postulados, isso significa que, de fato, o intrigante postulado é independente dos outros. Ainda sobre a hipótese do ângulo agudo, vimos que não é possível encontrar uma contradição, pois matemáticos como Bolyai, Gauss e Lobachevsky descobriram, há outras geometrias que surgem a partir de tal hipótese.

No entanto, a comunidade matemática queria o veredito: *será a Geometria desenvolvida por Bolyai e Lobachevsky, de fato, consistente?* Com isso queria-se saber se em algum momento poderia surgir algum resultado contraditório dentro daquela Teoria Geométrica. Para tanto, eles elaboraram uma estratégia.

Assim, o plano desses matemáticos objetivou escrever a Teoria Geométrica Hiperbólica na linguagem da Geometria Euclidiana sob o seguinte argumento: se os elementos e a relação entre esses elementos fosse possível dentro de uma parte do espaço euclidiano, então a Teoria Hiperbólica seria consistente até o dia em que a Teoria Euclidiana também fosse. A seguir apresentaremos uma série de resultados que levaram ao surgimento da Geometria Hiperbólica, bem como resultados próprios desta Geometria.

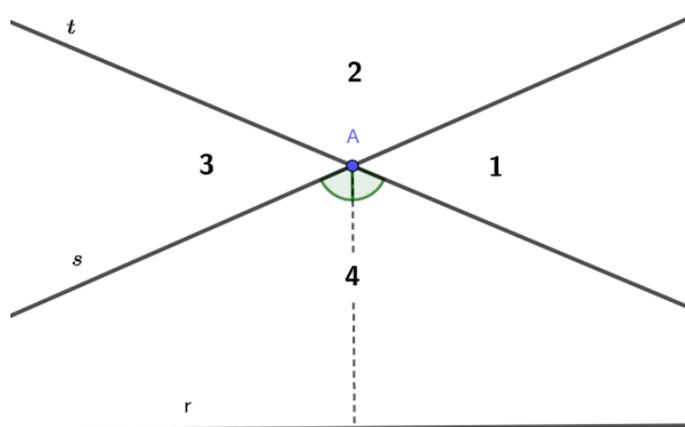
4.2 Paralelismo

Como dito no Capítulo 3, os matemáticos concluíram que o Postulado das Paralelas é independente dos demais postulados, e Playfair deixou uma expressão equivalente ao 5º Postulado que se adapta bem às hipóteses do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso, a lembrar, temos que *por um ponto fora de uma reta pode se traçar pelo menos duas, apenas uma ou nenhuma reta(s) paralela(s) à reta dada*. Sabemos que a Geometria que se desenvolve tomando a inexistência de retas paralelas à uma reta dada é a Geometria Esférica, e que a Geometria Euclidiana é alicerçada quando tomamos a expressão que postula a existência de apenas uma única paralela à reta dada. A Geometria Hiperbólica é construída com base nos modernamente conhecidos como axiomas de incidência, ordem, congruência, continuidade juntamente com a negação do Postulado das Paralelas tomando a hipótese do ângulo agudo, a saber, o Postulado de Lobachevsky enunciado da seguinte maneira:

Postulado 4.1 (Postulado de Lobachevsky). Por um ponto fora de uma reta pode se traçar pelo menos duas retas paralelas à reta dada.

Deste modo, conforme a Figura 4.1, dada uma reta r e um ponto A não pertencente a r , há duas retas s e t que passam por A e são paralelas a r . Ainda, s e t dividem o plano hiperbólico em quatro setores distintos, sendo eles os setores 1, 2, 3 e 4. Esses setores são definidos pelas regiões angulares formadas pelas retas s e t no ponto A . Assim, temos que nas regiões 1 e 3 estão definidas infinidade de retas que passam por A e não interceptam r . Nas regiões angulares 2 e 4 estão situadas todas as retas que passam por A e que interceptam r em algum ponto. Ao traçarmos uma perpendicular que passa por A e toca r , dividimos a região 4 em dois ângulos. Eles são chamados de *ângulos de paralelismo*, isto se deve ao fato de que toda reta que passa por A e não intercepta r está situada numa região angular estritamente maior a este ângulo.

Figura 4.1: Ângulo de paralelismo.



Fonte: Arquivo próprio

4.3 Modelos da Geometria Hiperbólica

Para finalmente confirmar a consistência da Geometria Hiperbólica, Beltrami, Félix Klein e Henri Poincaré propuseram a fechar essa lacuna. Para tanto, eles desenvolveram modelos para a nova Geometria a fim de dar mais propriedade nos resultados contra intuitivos oriundos desta nova teoria. A seguir breves comentários acerca dos modelos próprios da Geometria Hiperbólica e, por fim, alguns dos elementos vindos desta Geometria representados pelo modelo de disco de Poincaré.

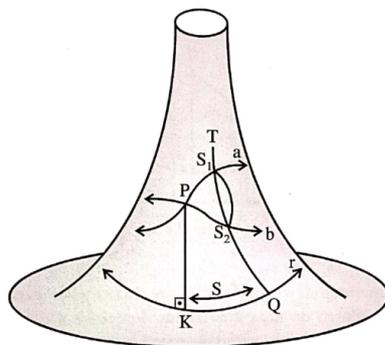
4.3.1 Modelo de Beltrami

Sabendo que a Geometria Hiperbólica se desenvolve em uma superfície de curvatura negativa¹ tem-se o Parabolóide Hiperbólico, no entanto Beltrami optou pela Pseudoesfera, que

¹Temos o plano como superfície de curvatura constante e de valor igual a zero, pois ele não possui deformidades em nenhuma região do mesmo. Por outro lado, na superfície de curvatura negativa, ela possui deformidades ao

não somente atendia as exigências que esta Geometria requeria, como também é um modelo mais conveniente em relação ao primeiro. O modelo de Beltrami é conhecido como o Modelo da Pseudoesfera, por admitir que a superfície deste modelo é uma esfera de raio negativo denominada como tal. A pseudoesfera é um sólido de revolução obtido a partir da rotação de uma curva chamada tractriz em torno do seu eixo horizontal. Por não se tratar de uma superfície cuja curvatura é nula, como a superfície plana, devemos tomar outro método para mensurar a distância mínima entre dois pontos, que agora não será dada pelo segmento de reta que passa por estes dois pontos, mas sim de uma curva de distância mínima chamada geodésica. A seguir, temos a representação gráfica deste modelo:

Figura 4.2: Modelo desenvolvido por Beltrami.

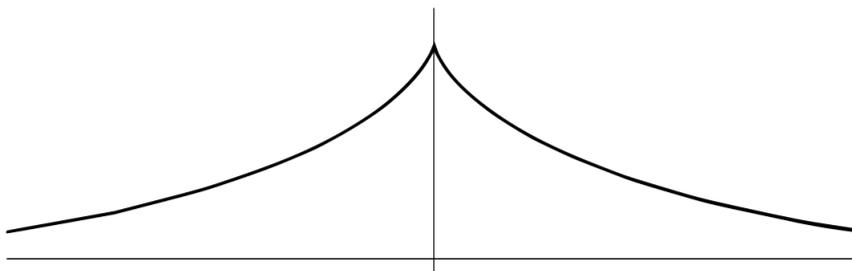


Fonte: Coutinho, 2001, p. 41.

A curva tractriz é dada por uma aplicação de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, sendo I um intervalo em \mathbb{R} e,

$$x \in I \mapsto \alpha(x) = \left[\text{sen}(x); \cos(x) + \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) \right].$$

Figura 4.3: Curva tractriz.



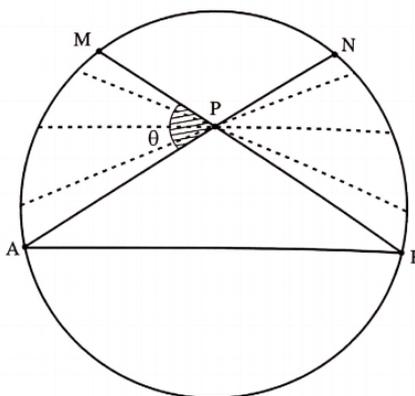
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Tractriz>.

longo de sua estrutura, e elas são “depressões” em seu relevo.

4.3.2 Modelo de Félix Klein

Um modelo plano para a Geometria Hiperbólica foi desenvolvido pelo matemático Félix Klein. Neste modelo toma-se uma circunferência euclidiana de raio unitário no qual desconsidera sua borda. Neste modelo as retas são cordas deste círculo onde as suas extremidades são desconsideradas. Vale explicitar que a forma de calcular a distância entre dois pontos neste modelo ocorre de maneira diferente dos demais modelos. Para calcular a distância deve agora ter que representar a noção de infinito dentro de um espaço finito; para tanto, usamos uma métrica que se baseia na ideia de que nossa unidade de medida varia de maneira proporcional à medida que estamos nos aproximando da borda da circunferência, por isso desconsideramos a borda da circunferência e as extremidades da corda. Já para medir ângulos, deixaremos registrado que é um processo diferente da maneira euclidiana. A seguir temos a representação gráfica deste modelo:

Figura 4.4: Modelo desenvolvido por Félix Klein.



Fonte: Coutinho, 2001, p. 42.

4.3.3 Modelo de Poincaré

Por sua vez, o matemático francês Henri Poincaré desenvolveu seu modelo plano para a Geometria Hiperbólica. Denominada de Modelo do Disco de Poincaré, tomava, assim como no modelo proposto por Félix Klein, uma circunferência aberta (sem considerar a borda), diferenciando desta última quanto à representação das retas. Segue sua definição:

Definição 4.2. Seja o plano Euclidiano \mathbb{E} . Fixado um ponto O e um valor unitário para o raio r , o disco de Poincaré \mathbb{D} é o conjunto de todos os pontos pertencentes ao plano Euclidiano que são interiores à circunferência \mathbb{C} de centro O e raio unitário, munido de uma métrica hiperbólica, ou seja, de uma definição de distância. Assim,

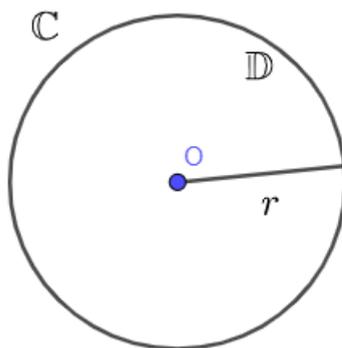
$$\mathbb{D} = \{(A; B) \in \mathbb{R}^2 \mid A^2 + B^2 < 1\}.$$

No Modelo do Disco de Poincaré as retas são arcos de circunferência que satisfazem:

- i) Dados três pontos distintos e não colineares (digamos A , B e C), sendo A e B pontos situados no interior do disco de Poincaré, existe uma única circunferência de centro C perpendicular ao disco que A e B fazem parte do seu arco;
- ii) Caso A , B e C são pontos colineares, então existe uma única reta euclidiana que passa por esses três pontos, que na verdade é o diâmetro do disco de Poincaré.

Neste modelo calculamos os ângulos formados entre duas semirretas de origem comum da mesma maneira que no modelo euclidiano, assim, mensuramos o ângulo formado a partir do ângulo formado pelas duas tangentes na origem das semirretas, respectivas aos arcos de suas respectivas circunferências. Por sua vez, para a distância entre dois pontos é dada a seguinte expressão:

Figura 4.5: Modelo desenvolvido por Henri Poincaré.



Fonte: Arquivo próprio.

Definição 4.3. Sejam A e B pontos de uma reta hiperbólica cujos extremos são os pontos C e D , a distância entre A e B é expressa por:

$$d(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AC/AD}{BC/BD} \right) \right|.$$

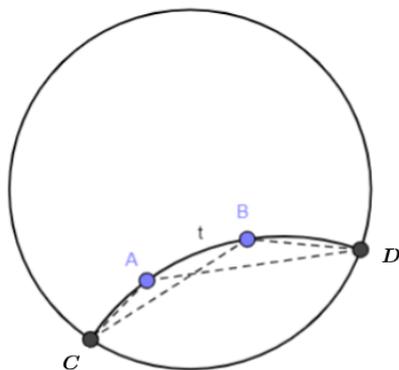
Ressaltamos que os segmentos AC , AD , BC e BD são medidos da maneira euclidiana.

Vamos mostrar um exemplo dessa distância hiperbólica. Assim, tomamos que $AC = 0,9$; $AD = 0,45$; $BD = 0,9$ e $BC = 0,63$. Como segue:

$$d(A, B) = \left| \ln \left(\frac{0,9/0,45}{0,63/0,9} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{2}{0,7} \right) \right| = \left| \ln (2,86) \right| \approx 1,05 \text{ um.}^2$$

²Unidade de medida

Figura 4.6: Exemplo de distância hiperbólica.



Fonte: Arquivo próprio.

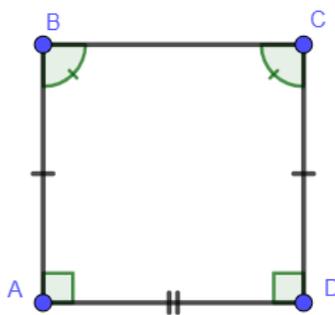
4.4 Teoremas da Geometria Hiperbólica

Nesta seção serão abordados os conceitos elementares sobre Geometria Hiperbólica, bem como teoremas que mostram quão peculiar é esta Geometria em relação às demais. Para elaborar esta seção trouxemos resultados presentes nas seguintes referências: [1] (2021), [2] (2008), [4] (2001) e [7] (2014).

Definição 4.4 (Quadrilátero de Saccheri). Seja $ABCD$ um quadrilátero, em que os lados AB e DC são congruentes e perpendiculares ao lado AD . Tal quadrilátero é chamado de Quadrilátero de Saccheri.

Os lados AD e BC são chamados, respectivamente, base e topo, os ângulos \hat{A} e \hat{D} são chamados de ângulos da base, e os ângulos \hat{B} e \hat{C} são chamados ângulos do topo.

Figura 4.7: Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Arquivo próprio.

O que torna esse quadrilátero especial é o fato dele ter sido constituído durante os estudos de Saccheri, quando ele se propôs demonstrar o Postulado das Paralelas como se fosse um teorema. Um quadrilátero de Saccheri tem a peculiaridade de que apesar de possuir ângulos

superiores cômputos, é possível admitir uma hipótese a respeito da natureza desses ângulos, podendo eles serem, agudos, retos ou obtusos. Cada hipótese desencadeia numa teoria geométrica diferente, sendo elas respectivamente, Geometria Hiperbólica, Geometria Plana e Geometria Esférica.

Teorema 4.5. *Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são congruentes.*

Demonstração: Considerando um quadrilátero de Saccheri $ABCD$ (ver Figura 4.7), tracemos uma diagonal AC e outra BD . Deste modo, temos que AD pertence aos triângulos BAD e CDA . Por hipótese, sabemos que os ângulos $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CDA}$ são cômputos e, ainda, BA é congruente a CD , ou seja,

$$\widehat{BAD} \equiv \widehat{CDA}$$

e

$$BA \equiv CD,$$

respectivamente. Assim, por semelhança de triângulos do tipo *lado-ângulo-lado*, BAD é semelhante a CDA . Logo,

$$AC \equiv BD.$$

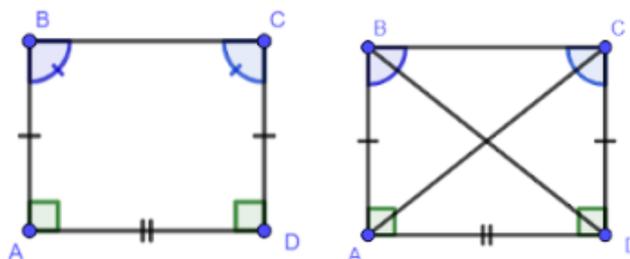
Agora, considerando os triângulos ABC e DCB , temos que BD pertence a DCB , e AC pertence a ABC . Dado que $BA \equiv CD$ e $AC \equiv BD$, temos uma semelhança de triângulos do tipo *lado-lado-lado*, logo, ABC é semelhante a DCB .

Portanto,

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{DCB}.$$

□

Figura 4.8: Congruência dos ângulos superiores de um quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 4.6. *Se uma reta intersecta os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri, então tal reta é perpendicular à base e ao topo do quadrilátero.*

Demonstração: Consideremos um quadrilátero de Saccheri $ABCD$ e trazemos uma reta t , tal que M e N pertençam a t (ver Figura 4.9). Note que temos dois quadriláteros

$$ABMN \quad (4.1)$$

e

$$NMCD. \quad (4.2)$$

Agora, traçamos em (4.1) suas diagonais AM e BN . Similarmente, traçamos as diagonais em (4.2), obtendo MD e NC .

No triângulo BAN , notemos que $AN \equiv ND$, $AB \equiv DC$ e $\widehat{BAN} \equiv 90^\circ \equiv \widehat{CDN}$. Tornando o triângulo BAN semelhante, pelo caso *lado-ângulo-lado*, ao triângulo CDN . Logo,

$$BN \equiv NC.$$

Consideremos agora, os triângulos ABM e DCM . Como M é ponto médio de BC , temos $BM \equiv MC$. Note que $AB \equiv CD$, pela definição de quadrilátero de Saccheri e, de acordo com o Teorema 4.5, $\widehat{ABM} \equiv \widehat{DCM}$. Assim, pelo caso de semelhança *lado-ângulo-lado*, o triângulo ABM é semelhante ao triângulo DCM , daqui

$$AM \equiv MD.$$

Por outro lado, também temos a semelhança do tipo *lado-lado-lado*, entre os triângulos AMN e DMN . Essa semelhança se deve ao fato de $AN \equiv ND$, $AM \equiv MD$ e MN ser lado comum a ambos os triângulos. A partir dessa semelhança,

$$\widehat{ANM} \equiv \widehat{DNM}.$$

Logo,

$$\widehat{ANM} + \widehat{DNM} = 180^\circ,$$

por se tratar de ângulos adjacentes sob um segmento de reta. Como eles são ângulos côngruos e a soma entre eles é igual a 180° , podemos concluir que

$$\widehat{ANM} \equiv 90^\circ \equiv \widehat{DNM}.$$

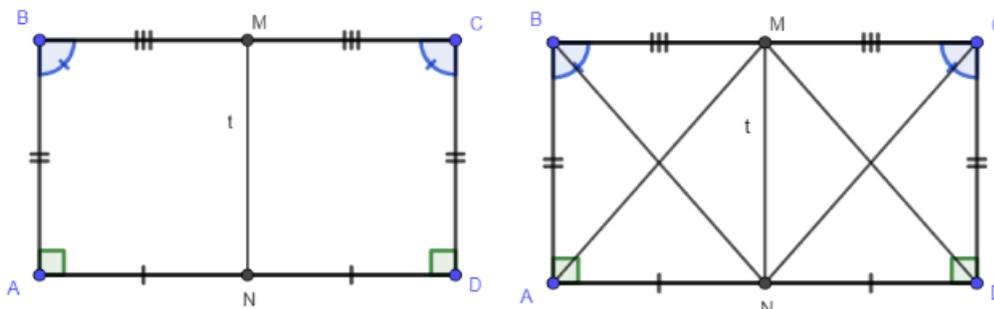
Pelo caso de semelhança *lado-lado-lado*, os triângulos BMN e CMN são semelhantes. Realizando os mesmos processos, obtemos que

$$\widehat{BMN} = 90^\circ = \widehat{CMN}.$$

Portanto, a reta t é perpendicular à base e ao topo do quadrilátero $ABCD$.

□

Figura 4.9: Perpendicular a base e ao topo de um Quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 4.7. *Seja $ABCD$ um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em A e D . Se M e N são os pontos médios de BC e AD , respectivamente, então $NMBA$ e $NMCD$ são quadriláteros, em que cada um possui pelo menos três ângulos retos.*

Demonstração: Note na Figura 4.9, perceba que ao aplicarmos o Teorema 4.6 em um Quadrilátero de Saccheri obtemos dois quadriláteros distintos $NMBA$ e $NMCD$.

Observe que o segmento MN é perpendicular aos segmentos AD e BC , assim os ângulos \widehat{BMN} , \widehat{CMN} , \widehat{ANM} e \widehat{MDN} são de 90° .

Assim, no quadrilátero $NMBA$ os ângulos \widehat{N} , \widehat{M} e \widehat{A} são retos e o ângulo \widehat{B} é o ângulo no qual aplicamos a hipótese dos ângulos superiores.

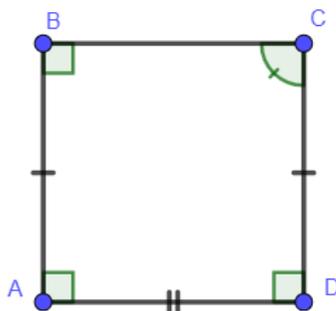
Por outro lado, o quadrilátero $NMCD$ os ângulos \widehat{N} , \widehat{M} e \widehat{D} são retos e o ângulo \widehat{C} é o ângulo no qual aplicamos a hipótese dos ângulos superiores.

Logo, caso seja possível formar um segmento perpendicular com os pontos médios da base e do topo do quadrilátero de Saccheri, então podemos decompor ele em dois quadriláteros, em que cada um possui pelo menos três ângulos retos.

□

Definição 4.8 (Quadrilátero de Lambert). Um quadrilátero $ABCD$ que tem ângulos retos nos vértices A , B e D chama-se um quadrilátero de Lambert. Em outras palavras, um quadrilátero de Lambert é a metade de um quadrilátero de Saccheri e, ainda, tem a propriedade que o ângulo não reto é onde aplicamos as hipóteses que determinam o tipo ou natureza desse ângulo, como ocorre num quadrilátero de Saccheri.

Figura 4.10: Quadrilátero de Lambert.



Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 4.9. *Se $ABMN$ é um quadrilátero de Lambert, então existem dois pontos C e D (únicos) tais que $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em \hat{A} e \hat{D} , no qual M e N são os pontos médios de BC e AD , respectivamente.*

Demonstração: Dado um quadrilátero de Lambert $ABMN$, prolongamos seus segmentos AN e BM (ver Figura 4.11). No prolongamento do segmento AN , marcamos um ponto D de modo que $AN \equiv DN$. Do mesmo modo, no prolongamento do segmento BM marcamos um ponto C , tal que $BM \equiv MC$.

Notemos que $\hat{A}\hat{N}M$ e $\hat{B}\hat{M}N$ são retos, conseqüentemente MN é perpendicular a BC e AD . Logo, $\hat{D}\hat{N}M$ e $\hat{C}\hat{M}N$ também são retos;

Observamos a semelhança do tipo *lado-ângulo-lado*, que ocorre nos triângulos BMN e CMN , pois $BM \equiv CM$, MN é comum em ambos os triângulos e, $\hat{B}\hat{M}N \equiv \hat{C}\hat{M}N = 90^\circ$. Dai, $BN \equiv CN$.

Uma vez que os triângulos BMN e CMN são semelhantes, segue que $\hat{A}\hat{N}B \equiv \hat{D}\hat{N}C$. Deste modo, vemos que os triângulos ABN e DNC são semelhantes, pelo caso *lado-ângulo-lado*, já que $BN \equiv NC$, $AN \equiv ND$ e $\hat{A}\hat{N}B \equiv \hat{D}\hat{N}C$. Logo,

$$AB \equiv CD,$$

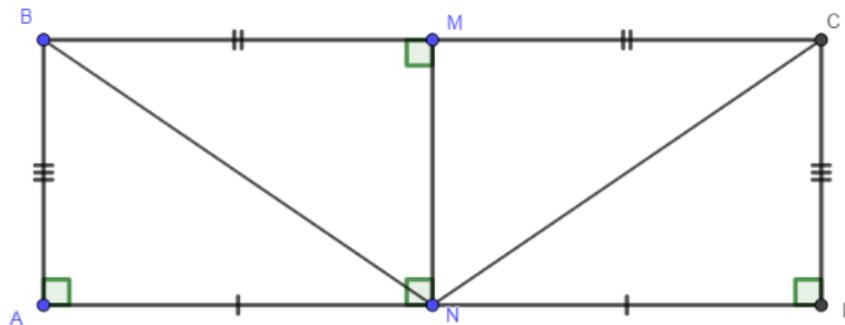
dessa última semelhança de triângulos, temos que

$$\hat{B}\hat{A}N \equiv 90^\circ \equiv \hat{C}\hat{D}N.$$

Portanto, o quadrilátero $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri com ângulos retos em \hat{A} e \hat{D} .

□

Figura 4.11: Do quadrilátero de Lambert para o quadrilátero de Saccheri.



Fonte: Arquivo próprio.

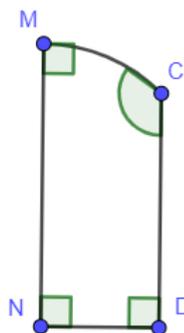
Teorema 4.10. *Num quadrilátero de Saccheri o topo é maior, igual ou menor que a base, conforme os ângulos do topo sejam, respectivamente, agudos, retos ou obtusos.*

Demonstração: Dado um quadrilátero de Saccheri $ABCD$, pelo Teorema 4.7, obtemos dois quadriláteros de Lambert, $NMBA$ e $NMCD$, em que M e N são os pontos médios de BC e AD , respectivamente.

Notemos que no quadrilátero $NMCD$ os ângulos em N , M e D são retos. Logo,

i) $MC > ND$ se, e só se, $\widehat{C} > 90^\circ$;

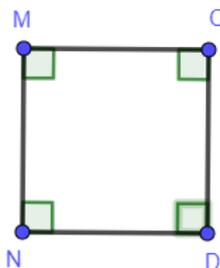
Figura 4.12: Representação do item i).



Fonte: Arquivo próprio.

ii) $MC \equiv ND$ se, e só se, $\widehat{C} = 90^\circ$;

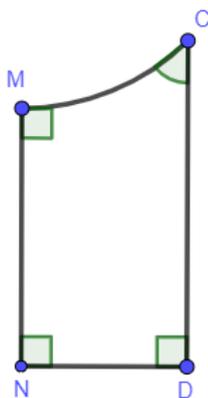
Figura 4.13: Representação do item ii)



Fonte: Arquivo próprio.

iii) $MC < ND$ se, e só se, $\widehat{C} < 90^\circ$.

Figura 4.14: Representação do item iii).



Fonte: Arquivo próprio.

Dado que $BC = 2(MC)$; $AD = 2(ND)$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, por *i*) – *iii*), concluímos que no quadrilátero de Saccheri $ABCD$, o topo BC é maior, igual ou menor que a base AD , conforme os ângulos do topo \widehat{B} e \widehat{C} sejam, respectivamente, agudos, retos ou obtusos.

□

Teorema 4.11. *Seja dado um triângulo retângulo ADC , reto em D . Sob a Hipótese do Ângulo Agudo, do Ângulo Reto ou do Ângulo Obtuso, a soma dos ângulos internos de ADC é, respectivamente, menor, igual ou maior que 180° .*

Demonstração: Sem perda de generalidade consideremos um quadrilátero de Saccheri com vértices $ABCD$ e reto em \widehat{A} e \widehat{D} . Traçamos a diagonal AC obtendo o triângulo ABC e, o triângulo ADC reto em \widehat{D} (Ver Figura 4.8). A seguir, analisamos cada caso:

- **Ângulo agudo:** Se $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DCB} < 90^\circ$, do Teorema 4.10 temos que $AD < BC$. Sabemos que $AB \equiv DC$, AC é lado comum aos triângulos ADC e ABC , e, como $AD < BC$, segue do Teorema 2.4 que $\widehat{ACD} < \widehat{BAC}$.

Note que

$$(\widehat{BAC} + \widehat{CAD}) + \widehat{ADC} = 180^\circ,$$

em que $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 90^\circ$. Como $\widehat{ACD} < \widehat{BAC}$, obtemos

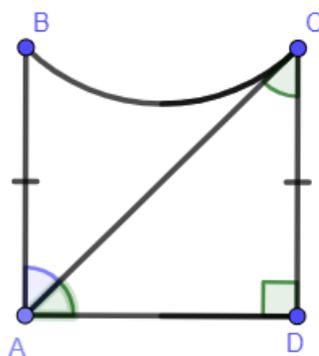
$$\widehat{ADC} + \widehat{CAD} + \widehat{ACD} < \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{ADC},$$

logo,

$$\widehat{CAD} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} < 180^\circ.$$

Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo ADC é menor que 180° .

Figura 4.15: Apoio para a demonstração do Teorema 4.11 (ângulo agudo).



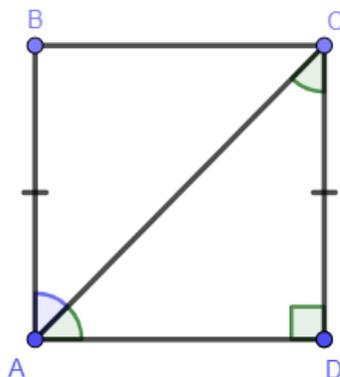
Fonte: Arquivo próprio.

- **Ângulo reto:** Suponhamos que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DCB} = 90^\circ$. Logo, como $ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri, pelo Teorema 4.10 temos que $AD \equiv BC$. Por outro lado, sabemos que $AB \equiv DC$ e, AC é comum em ambos os triângulos ABC e ADC , daqui esses triângulos são semelhantes pelo caso *lado-lado-lado*. Assim,

$$\widehat{ACD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAC} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CDA} = 180^\circ.$$

Consequentemente, a soma dos ângulos internos do triângulo ADC é igual a 180° .

Figura 4.16: Apoio para a demonstração do Teorema 4.11 (ângulo reto).



Fonte: Arquivo próprio.

- **Ângulo obtuso:** Se $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DCB} > 90^\circ$, do Teorema 4.10 temos que $AD > BC$.

Sabemos que $AB \equiv DC$, AC é lado comum aos triângulos ADC e ABC , e, como $AD > BC$, segue do Teorema 2.4 que $\widehat{ACD} > \widehat{BAC}$.

Veja que

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Dado que $\widehat{ACD} > \widehat{BAC}$, temos

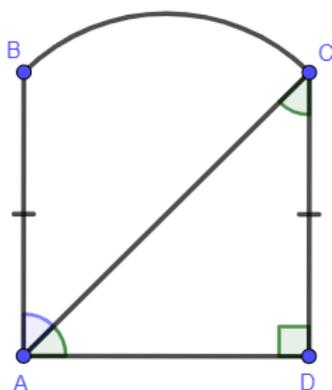
$$\widehat{ADC} + \widehat{CAD} + \widehat{ACD} > \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{ADC},$$

dai,

$$\widehat{CAD} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} > 180^\circ.$$

Dessa forma, concluímos que a soma dos ângulos internos do triângulo ADC é maior que 180° .

Figura 4.17: Apoio para a demonstração do Teorema 4.11 (ângulo obtuso).



Fonte: Arquivo próprio.

Observação 4.12. O teorema seguinte nos diz o que pode ocorrer com um triângulo qualquer, podendo ele ser respectivamente euclidiano ou hiperbólico ou esférico³.

Teorema 4.13. *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo pode ser igual, menor ou maior do que 180° .*

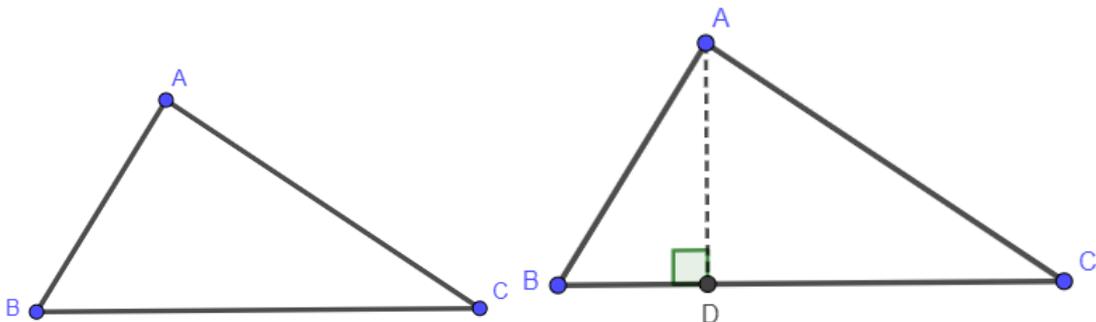
Demonstração:

Esse teorema nos diz que podemos assumir somente um dos resultados decorrentes da hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso. Sabendo disso, faremos a seguinte demonstração

Seja ABC um triângulo qualquer, conforme a Figura 4.18. Tomamos a soma dos ângulos internos conforme a hipótese escolhida, dessa forma, menor que, igual a, ou maior que 180° . E mais, é fato conhecido na Geometria que podemos decompor qualquer triângulo em dois triângulos retângulos. Sabendo disso temos as seguintes relações:

- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$
- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$

Figura 4.18: Triângulo qualquer e sua decomposição em dois triângulos retos.



Fonte: Arquivo próprio.

Daí, ao dividir o nosso triângulo qualquer em dois triângulos retos, temos:

$$\widehat{A}' + \widehat{A}'' + \widehat{B} + \widehat{C} + 90^\circ + 90^\circ = x + 180^\circ,$$

³O triângulo esférico é oriundo da Geometria Esférica. Esta Geometria é representada por uma Esfera. É a teoria geométrica construída a partir da outra negação do Postulado de Playfair, a saber, *por um ponto fora de uma reta pode se traçar nenhuma reta paralela à reta dada*, e da hipótese do ângulo obtuso comentada anteriormente. Dentre suas características temos a finitude das retas (geodésicas) e a soma dos ângulos internos de um triângulo que varia entre um valor estritamente maior que 180° e menor que 540° , fatos que vão em contramão da teoria euclidiana e hiperbólica.

sendo $\widehat{A} = \widehat{A}' + \widehat{A}''$ e $\widehat{D} = 90^\circ$

$$(\widehat{A}' + \widehat{B} + 90^\circ) + (\widehat{A}'' + \widehat{C} + 90^\circ) = x + 180^\circ$$

Observação 4.14. x será a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, assim $x < 180^\circ$, $x = 180^\circ$ e $x < 180^\circ$

Agora aplicamos nossas hipóteses (tomamos como referência a Figura 4.19).

- **Ângulo agudo:** Aqui $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$.

$$(\widehat{A}' + \widehat{B} + 90^\circ) + (\widehat{A}'' + \widehat{C} + 90^\circ) < 180^\circ + 180^\circ,$$

Em decorrência da hipótese do ângulo agudo, segundo o Teorema 4.11, temos:

$$(< 180^\circ) + (< 180^\circ) < 360^\circ,$$

Unindo os triângulos em um único,

$$(< 180^\circ - 90^\circ) + (< 180^\circ - 90^\circ) < 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ$$

$$(< 90^\circ) + (< 90^\circ) < 180^\circ$$

Reescrevendo com os ângulos do vértice,

$$(\widehat{A}' + \widehat{B}) + (\widehat{A}'' + \widehat{C}) < 180^\circ$$

$$(\widehat{A}' + \widehat{A}'') + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$$

- **Ângulo reto:** Aqui $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

$$(\widehat{A}' + \widehat{B} + 90^\circ) + (\widehat{A}'' + \widehat{C} + 90^\circ) = 180^\circ + 180^\circ,$$

Em decorrência da hipótese do ângulo reto, segundo o Teorema 4.11, temos:

$$(180^\circ) + (180^\circ) = 360^\circ$$

Unindo os triângulos em um único,

$$(180^\circ - 90^\circ) + (180^\circ - 90^\circ) = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ$$

$$(90^\circ) + (90^\circ) = 180^\circ$$

Reescrevendo com os ângulos do vértice,

$$(\widehat{A}' + \widehat{B}) + (\widehat{A}'' + \widehat{C}) = 180^\circ$$

$$(\widehat{A}' + \widehat{A}'') + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

- **Ângulo obtuso:** $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$

$$(\widehat{A}' + \widehat{B} + 90^\circ) + (\widehat{A}'' + \widehat{C} + 90^\circ) > 180^\circ + 180^\circ,$$

Em decorrência da hipótese do ângulo obtuso, segundo o Teorema 4.11, temos:

$$(> 180^\circ) + (> 180^\circ) > 360^\circ,$$

Unindo os triângulos em um único,

$$(> 180^\circ - 90^\circ) + (> 180^\circ - 90^\circ) > 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ$$

$$(> 90^\circ) + (> 90^\circ) > 180^\circ$$

Reescrevendo com os ângulos do vértice,

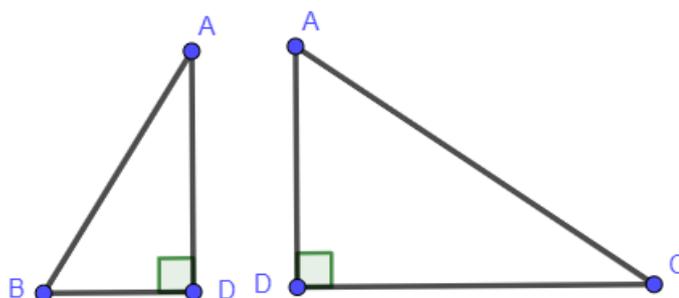
$$(\widehat{A}' + \widehat{B}) + (\widehat{A}'' + \widehat{C}) > 180^\circ$$

$$(\widehat{A}' + \widehat{A}'') + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$$

□

Figura 4.19: Triângulos retos ABD e ACD .



Fonte: Arquivo próprio.

Observação 4.15. Ora, é válido dizer que ao escolhermos a hipótese do ângulo reto, a soma dos ângulos internos de um triângulo só poderá ser igual a 180° , e que um resultado diferente levaria a uma contradição. Ocorre de maneira análoga no casos onde partimos da hipótese do ângulo agudo e da hipótese do ângulo obtuso.

Observação 4.16. O seguinte teorema é oriundo dos estudos das Geometrias Euclidiana e Hiperbólica.

Teorema 4.17 (Teorema de Saccheri-Legendre). *A soma dos ângulos internos em um triângulo é no máximo 180° .*

Demonstração: Dado um triângulo definido pelos vértices ABC . Suponhamos por absurdo que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 180^\circ$, ou seja, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = x + 180^\circ$, tal que x é um número real positivo.

Note que dado um número real $c > 0$, existe um número natural n_0 , tal que

$$\frac{1}{2^{n_0}} < c. \quad (4.3)$$

Podemos verificar essa afirmação em [10], Exemplo 12, p. 61.

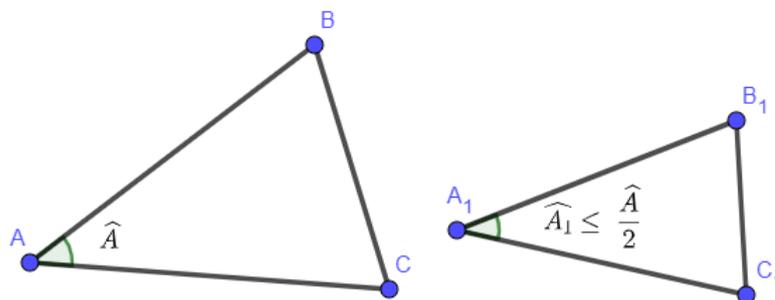
Conforme o Teorema 2.5, para o triângulo ABC existe um triângulo $A_1B_1C_1$, tal que

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 \quad \text{e} \quad \widehat{A}_1 \leq \frac{\widehat{A}}{2},$$

ou seja,

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = x + 180^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{A}_1 \leq \frac{\widehat{A}}{2^1}.$$

Figura 4.20: Triângulo $A_1B_1C_1$ formado segundo o Teorema 2.5.



Fonte: Arquivo próprio.

Similarmente, aplicamos o Teorema 2.5 para o triângulo $A_1B_1C_1$, e temos a existência de um triângulo $A_2B_2C_2$, tal que

$$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 + \widehat{C}_2 = x + 180^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{A}_2 \leq \frac{\widehat{A}_1}{2} \leq \frac{\widehat{A}}{2^2}.$$

Da mesma forma, aplicando o Teorema 2.5 para o triângulo $A_2B_2C_2$, garantimos a existência de um triângulo $A_3B_3C_3$, que verifica

$$\widehat{A}_3 + \widehat{B}_3 + \widehat{C}_3 = x + 180^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{A}_3 \leq \frac{\widehat{A}_2}{2} \leq \frac{\widehat{A}}{2^3}. \quad (4.4)$$

Notemos que para $\frac{x}{\widehat{A}} > 0$, por (4.3), existe n_0 pertencente aos números naturais, tal que

$$\frac{\widehat{A}}{2^{n_0}} < x. \quad (4.5)$$

Podemos repetir n_0 vezes, o processo realizado para obter (4.4), garantindo a existência de um triângulo $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$, tal que

$$\widehat{A}_{n_0} + \widehat{B}_{n_0} + \widehat{C}_{n_0} = x + 180^\circ \quad \text{e} \quad \widehat{A}_{n_0} \leq \frac{\widehat{A}_{n_0-1}}{2} \leq \frac{\widehat{A}}{2^{n_0}}, \quad (4.6)$$

logo, de (4.5) e (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{n_0} &\leq \frac{\widehat{A}}{2^{n_0}} < x, \\ \widehat{A}_{n_0} &< x, \end{aligned}$$

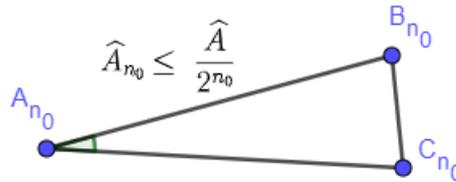
como $\widehat{A}_{n_0} + \widehat{B}_{n_0} + \widehat{C}_{n_0} = x + 180^\circ$, segue que

$$\widehat{B}_{n_0} + \widehat{C}_{n_0} = x - \widehat{A}_{n_0} + 180^\circ,$$

chamando $z = x - \widehat{A}_{n_0} > 0$, temos

$$\widehat{B}_{n_0} + \widehat{C}_{n_0} = z + 180^\circ,$$

Figura 4.21: Triângulo $A_{n_0}B_{n_0}C_{n_0}$ formado segundo várias aplicações do Teorema 2.5.



Fonte: Arquivo próprio.

contradizendo a Teorema 2.1, que afirma que a soma de dois ângulos internos de um triângulo não pode exceder 180° .

Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é no máximo 180° .

□

Teorema 4.18. *Todo triângulo em Geometria Hiperbólica tem a soma dos ângulos internos menor que 180° .*

Demonstração: Dado um triângulo ABC , aplicamos o Teorema 4.17, e obtemos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \leq 180^\circ,$$

em que \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} são os ângulos internos de ABC . A afirmação

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ, \quad (4.7)$$

é possível somente com o Postulado das Paralelas, como demonstramos no Teorema 2.7. No entanto, afirmar (4.7), significa negar o Postulado 4.1.

Não podemos manter resultados contraditórios como verdadeiros, dessa forma, segue que para a Geometria Hiperbólica (4.7) é falsa. Logo,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ.$$

Portanto, os triângulos na Geometria Hiperbólica só podem ter a soma dos seus ângulos internos menores que 180° .

□

Teorema 4.19. *Em Geometria Hiperbólica, dadas duas retas distintas, se elas admitem uma perpendicular comum, então ela é única.*

Demonstração: Sejam r e s retas distintas quaisquer, e t uma reta perpendicular comum a ambas.

Faremos uma prova por contradição, supondo que existe uma outra reta u também perpendicular às retas r e s .

Logo, suponhamos que t intercepta r e s nos pontos A e B , respectivamente. Da mesma maneira, suponhamos que u intercepta r e s nos pontos D e C , respectivamente.

Dessa forma, obtemos o quadrilátero $ABCD$. Notemos que t e u são perpendiculares a r e s , com isso, cada ângulo interno de $ABCD$ tem um valor de 90° (ver Figura 4.22).

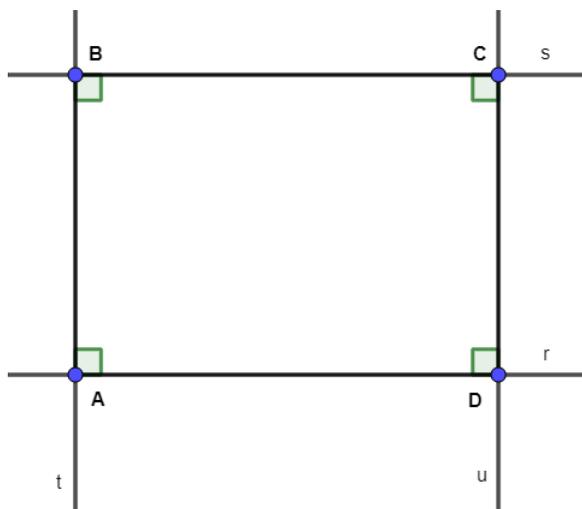
Agora, traçamos a diagonal AC e, obtemos os triângulos ABD e ADC . Isto é, dividimos pela metade o quadrilátero $ABCD$ cuja soma dos ângulos internos é igual a 360° .

Daqui, a soma dos ângulos internos em cada triângulo, ABD e ADC , é igual a 180° . Mas, isso é um absurdo, pois, conforme o Teorema 4.18, um triângulo em Geometria Hiperbólica não pode ter a soma de seus ângulos internos igual a 180° .

Portanto, se duas retas distintas admitem uma perpendicular comum, ela é única.

□

Figura 4.22: Verificação de uma única perpendicular comum a duas retas em Geometria Hiperbólica.



Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 4.20. *Em Geometria Hiperbólica, para toda reta r e todo ponto A não pertencente a r , existem infinitas retas que passam por A e não intersectam r .*

Demonstração: Seja r uma reta e A um ponto fora dela. Traçamos uma reta que passa por A e é perpendicular a r no ponto B . Agora, traçamos outra reta perpendicular ao segmento AB no ponto A , e a chamamos de s . Escolhemos um ponto C qualquer em r , diferente de B . Traçamos uma perpendicular no ponto C que intercepta s , chamando-a de t . Por fim, escolhemos um ponto D pertencente a t , diferente de C (ver Figura 4.23).

Note que a intersecção de s com t não resulta em 90° , caso contrário teríamos um retângulo contradizendo o Teorema 4.19. Observemos que s é perpendicular ao segmento AB , e que AD é perpendicular ao segmento DC no ponto D , assim, s e AD não interceptam a reta r .

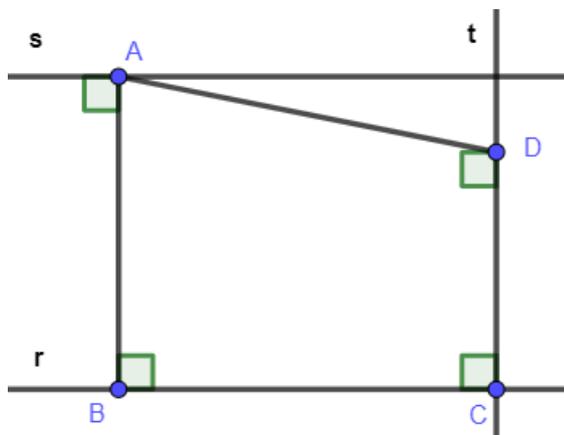
Vemos que $ABCD$ é um Quadrilátero de Lambert, com ângulo agudo no vértice A . Por outro lado, D pode ser qualquer ponto de t satisfazendo a condição de que, a reta que passa por D e A , forme uma perpendicular com t no ponto D . Desse modo, haverá infinitas retas que passam por A e não interceptam r .

Portanto, em Geometria Hiperbólica, para toda reta r e todo ponto A não pertencente a r , existem infinitas retas que passam por A e não intersectam r .

□

Observação 4.21. Reforçando, na Geometria Euclidiana, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , mas, na Geometria Hiperbólica, essa mesma soma é menor.

Figura 4.23: Existência de infinitas retas paralelas a uma reta dada.



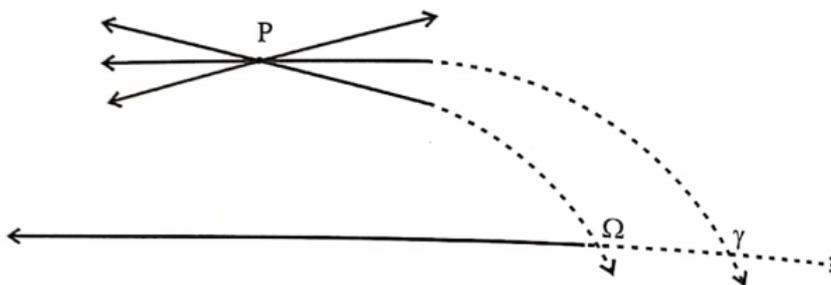
Fonte: Arquivo próprio.

4.4.1 Pontos na Geometria Hiperbólica

Na Geometria Hiperbólica há três classificações de pontos, são eles: Ponto Ideal, Ponto Gama e Ponto Ordinário.

- **Ponto ideal:** também conhecido como Ponto Ômega ou Ponto no Infinito. Apesar de carregar a nomenclatura *ponto*, os pontos ideais não são pontos como estamos acostumados a entender. Na verdade, o *ponto ideal* é uma ideia intuitiva; tomamos como ponto ideal aquele ponto no qual todas as retas paralelas convergem. É válido dizer que uma reta hiperbólica define dois pontos ideais, um para cada sentido do paralelismo. São denotados por Ω . No modelo de Poincaré são os pontos definidos na borda da circunferência.
- **Ponto Ordinário:** nome dado aos pontos não ideais no modelo de Poincaré.
- **Ponto Gama:** também conhecido como Ponto Ultra-Ideal. O ponto no qual convergem duas retas não secantes, aquelas definidas entre as paralelas, damos o nome de Ponto Gama. Um fato interessante das retas não secantes é que elas comungam de uma única perpendicular comum, caso não fosse haveria um retângulo euclidiano na Geometria Hiperbólica, o que seria um absurdo. Pela Figura 4.24, temos a ideia de que um ponto gama é um ponto que está além do ponto ideal.

Figura 4.24: Representação dos pontos na Geometria Hiperbólica.



Fonte: Coutinho, 2001, p. 65.

Teorema 4.22. *Em Geometria Hiperbólica, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é menor que 360° .*

Demonstração: Consideremos o quadrilátero $ABCD$, tal como na Figura 4.22. Traçamos a diagonal AC , esta é única, pois existe uma única reta que passa por dois pontos distintos quaisquer e, dela tiramos o referido segmento AC .

Dessa forma, decompomos um quadrilátero em dois triângulos hiperbólicos distintos, sendo eles os triângulos ABC e ACD . Pelo Teorema 4.18, sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é a 180° . Assim, ao somar os ângulos internos dos triângulos ABC e ACD obtemos um valor menor que 360° .

Portanto, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero hiperbólico é menor que 360° .

□

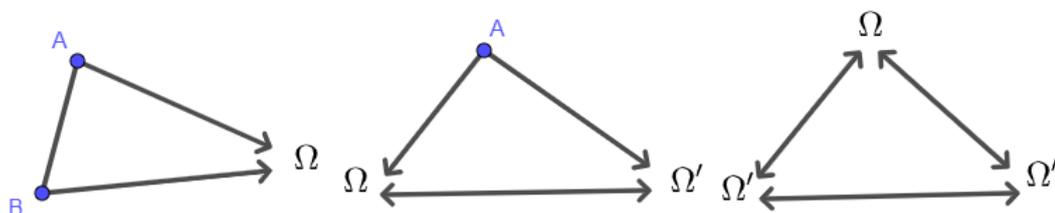
4.4.2 Triângulo Generalizado

Definição 4.23 (Triângulo Generalizado). Na Geometria Hiperbólica, um triângulo generalizado é um triângulo em que pelo menos um de seus três vértices é um ponto ideal.

Observação 4.24.

- Um triângulo generalizado também é conhecido como *triângulo com vértices ideais* ou ainda *triângulo ômega*;
- É curioso que nos vértices ideais, a medida do ângulo interior é nula;
- Outro fato que merece atenção é que os triângulos com vértices ideais herdam dos triângulos ordinários alguns resultados, tais como: o Postulado de Pasch, o teorema do ângulo externo e a congruência de triângulos.

Figura 4.25: Representação dos triângulos generalizados de respectivamente um, dois e três vértices ideais.



Fonte: Arquivo próprio.

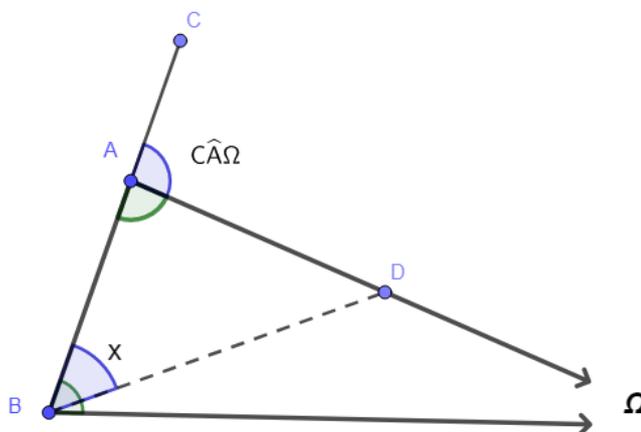
Teorema 4.25. *Para qualquer triângulo ômega $AB\Omega$, as medidas dos ângulos exteriores formados pelo prolongamento do segmento AB são maiores do que as medidas dos (respectivos) ângulos interiores opostos.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que a medida dos ângulos exteriores é igual ou menor do que a medida dos ângulos opostos interiores.

Por hipótese, alongamos o segmento AB no sentido A até um ponto C qualquer, para que seja possível construir uma nova região angular dada por $C\hat{A}\Omega$. Definimos o outro ângulo em $C\hat{B}\Omega$ (Ver Figura 4.26), e analisamos dois casos:

- **Caso 1:** Se $C\hat{B}\Omega > C\hat{A}\Omega$. Ao longo do segmento $A\Omega$ demarcamos um ponto D , e traçamos um segmento do ponto B ao ponto D de tal modo que $X = \hat{A}BD$ seja um ângulo côngruo ao ângulo $C\hat{A}\Omega$. Isto é válido, pois estamos partindo da ideia de que $C\hat{B}\Omega > C\hat{A}\Omega$.

Figura 4.26: Demonstração do ângulo externo para triângulos generalizados.



Fonte: Arquivo próprio.

Notemos que temos um triângulo ABD definido por três vértices ordinários, e nele, o ângulo em B tem a mesma medida que o ângulo externo no vértice A . Mas, isso é um

absurdo, pois como ABD é um triângulo euclidiano, nele, um ângulo externo não pode ser congruente a um de seus ângulos internos não adjacentes.

- **Caso 2:** Para o caso em que o ângulo externo é cômruo com o ângulo interno oposto.

Considerando duas semirretas $O\Omega$ e $O'\Omega$, traçamos a perpendicular AB das semirretas, e marcamos o ponto médio de AB chamando-o de M .

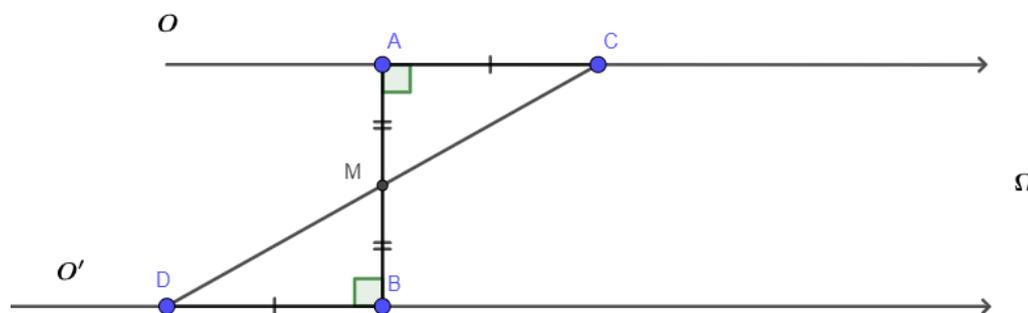
Daí marcamos um ponto C pertencente a $O\Omega$, e o ponto D pertencente a $O'\Omega$, tal que $AC \equiv BD$. Logo, traçamos uma reta transversal de modo que ela contém os pontos C , D e o ponto médio de AB (ver Figura 4.27).

Dessa forma, foram construídos dois triângulos semelhantes pelo caso lado-ângulo-lado. Notemos que AC é paralelo a $O'\Omega$, o que é um absurdo, pois o segmento AC é paralelo e faz um ângulo de 90° , contradizendo as condições de paralelismo da Geometria Hiperbólica (ver Figura 4.1).

Portanto, as medidas dos ângulos exteriores formados pelo prolongamento de AB são maiores do que as medidas dos (respectivos) ângulos interiores opostos.

□

Figura 4.27: Sequência da demonstração do ângulo externo para triângulos generalizados.



Fonte: Arquivo próprio.

Teorema 4.26. *Se uma reta corta um triângulo ômega por um de seus vértices, ou por um ponto que não é um vértice, então essa reta intercepta o lado oposto do triângulo.*

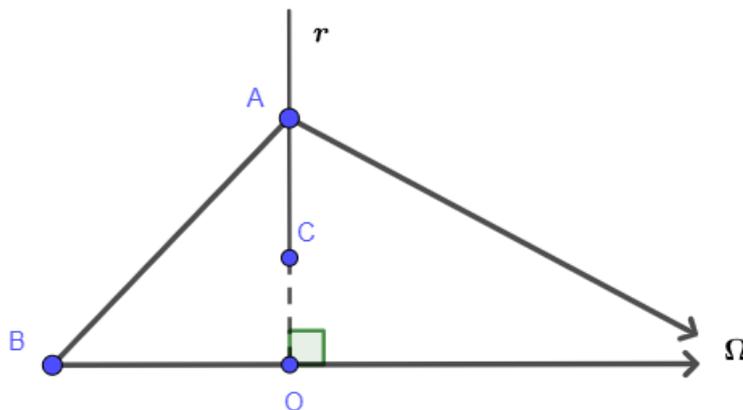
Demonstração: Demonstraremos esse teorema por partes.

- **Parte A:** Suponhamos que a reta entra no triângulo ômega por um de seus vértices.

Seja $AB\Omega$ um triângulo ômega e C um ponto pertencente ao interior desse triângulo. Denominemos por r a reta, e suponhamos que ela entra no triângulo $AB\Omega$ pelo vértice A e passa pelo ponto C . Daí temos três casos:

- i) A reta entra em A , passa por C e intersecta $B\Omega$ no pé da perpendicular que passa por A . Este caso é verdadeiro, pois entre duas paralelas existe sim uma única perpendicular;

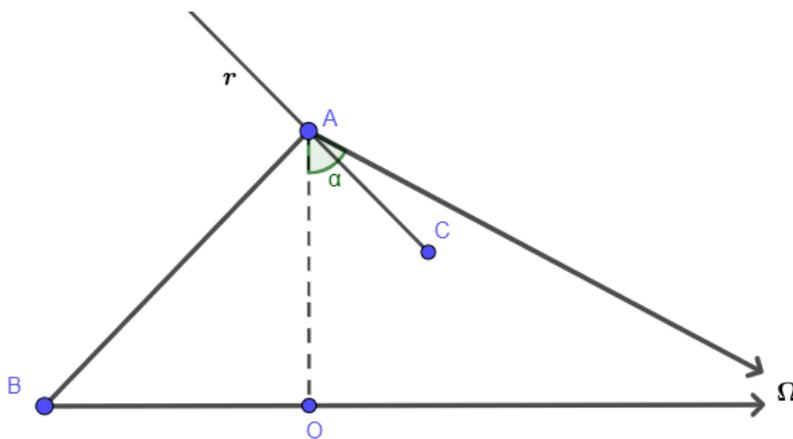
Figura 4.28: Representação da Parte A item i) do Teorema 4.26



Fonte: Arquivo próprio.

- ii) A reta r entra em A , passa por C localizado no interior do triângulo $AB\Omega$, sendo O o pé da perpendicular ao segmento $B\Omega$ passando por A . Notemos que a região angular dada por $O\hat{A}\Omega$ é o ângulo definido pela região 4 (ver Figura 4.1) e que todo segmento que pertence a essa região intercepta o segmento $B\Omega$.

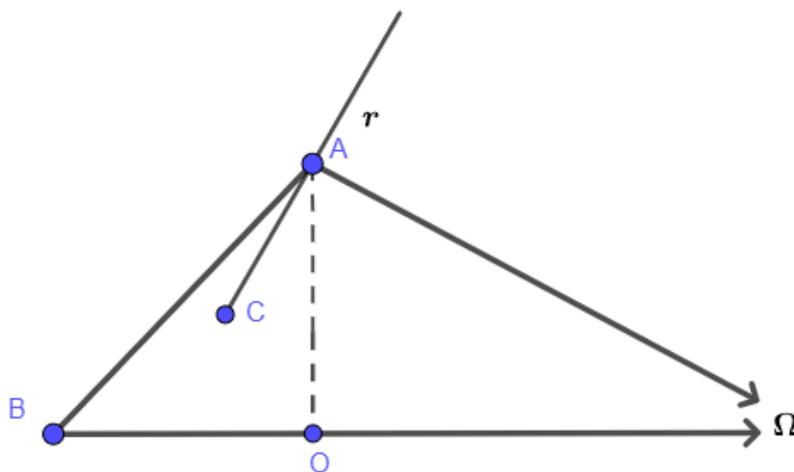
Figura 4.29: Representação da Parte A item ii) do Teorema 4.26



Fonte: Arquivo próprio.

- iii) A reta r entra em A , passa por C localizado no interior do triângulo ABO , sendo O o pé da perpendicular ao segmento $B\Omega$ e que passa por A . Daí, pelo Postulado 2.6, a reta r entrando por A no triângulo ABO , intercepta o segmento BO contido em $B\Omega$.

Figura 4.30: Representação da Parte A item iii) do Teorema 4.26



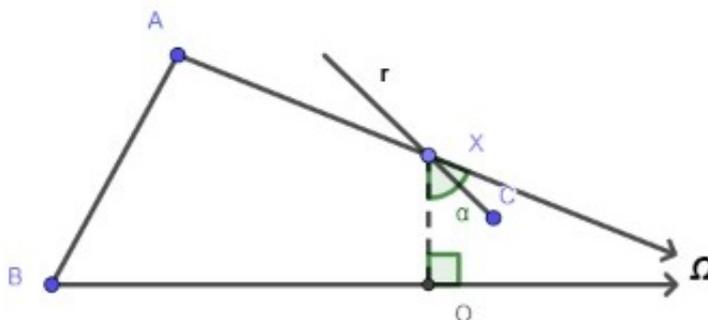
Fonte: Arquivo próprio.

- **Parte B:** Agora, vamos demonstrar para quando a reta entra no triângulo ômega por um de seus lados.

Seja $AB\Omega$ um triângulo ômega. Seja r uma reta que entra no triângulo $AB\Omega$ por um de seus lados, passando por C , um ponto no interior do referido triângulo. Daí temos três casos:

- r entra no triângulo $AB\Omega$ pelo lado $A\Omega$ passando por C . Ora, seja X o ponto onde r intersecta $A\Omega$, tracemos uma perpendicular ao segmento $B\Omega$ passando por X , nomeando o pé desta perpendicular como sendo O .
 - Caso C esteja situado no interior do triângulo $XO\Omega$, a reta r passando por C irá intersectar $O\Omega$ por conta do C está definido na região angular 4, de acordo com a Figura 4.1;

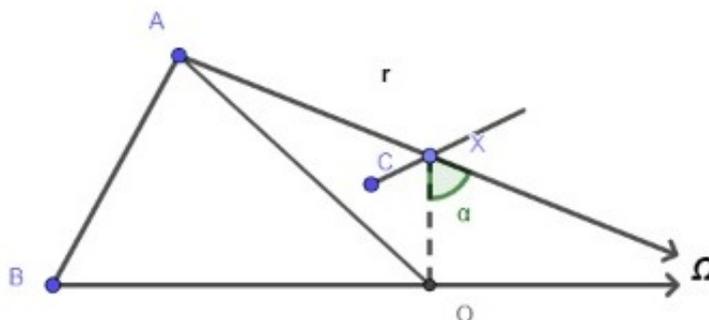
Figura 4.31: Representação da Parte B item i) subitem a) do Teorema 4.26.



Fonte: Arquivo próprio.

- b) No entanto, caso C esteja situado no quadrilátero $AXOB$, fazemos assim: tracemos o segmento AO , daí formamos o triângulo ABO . Ao prologarmos a reta r que passa por C , ela irá intersectar o triângulo ABO por um dos seus lados. Então, pelo Postulado 2.6, r intersecta algum dos lados do triângulo ABO , não podendo ser o lado por onde ela entrou.

Figura 4.32: Representação da Parte B item i) subitem b) do Teorema 4.26.

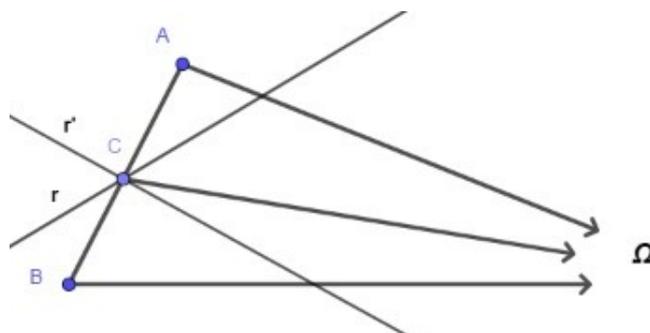


Fonte: Arquivo próprio.

- ii) Se r entra no triângulo $AB\Omega$ pelo lado $B\Omega$, então temos um processo análogo ao que foi demonstrado no item i).
- iii) Se a reta r entra no triângulo $AB\Omega$ pelo lado AB em um ponto C . Daí fazemos uma semirreta partindo de C indo em direção à Ω . Deste modo, a demonstração do teorema é decorrente dos itens i)-ii), considerando as retas r e r' , respectivamente, conforme a Figura 4.33.

□

Figura 4.33: Representação da Parte B item iii) do Teorema 4.26



Fonte: Arquivo próprio.

Observação 4.27. Após esse resultado uma pergunta que poderá surgir é a seguinte: e se a reta r for coincidente com o segmento $C\Omega$?

Bem, o segmento $C\Omega$ é paralelo aos segmentos $A\Omega$ e $B\Omega$, pois o ponto Ω é também o ponto comum entre as paralelas, assim, o segmento $C\Omega$ segue o que determina o Teorema 4.26, mesmo que de forma não intuitiva (ver na Subseção 4.4.1).

Congruência de Triângulos Ômegas

Segundo [4], há dois critérios que devem ser atendidos para que dois triângulos na Geometria Hiperbólica sejam congruentes entre si

- i) Dois triângulos ômegas $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são congruentes se os lados de extensão finita são congruentes e se o par de correspondentes ângulos \widehat{A} e \widehat{A}' ou \widehat{B} e \widehat{B}' são congruentes.
- ii) Dois triângulos ômegas $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são congruentes se os dois pares de ângulos \widehat{A} e \widehat{A}' ou \widehat{B} e \widehat{B}' são congruentes. ([4], 2001, p.50)

Teorema 4.28 (Caso de congruência “Lado - Ângulo” - LA para triângulos generalizados). *Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados. Se $AB \equiv A'B'$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.*

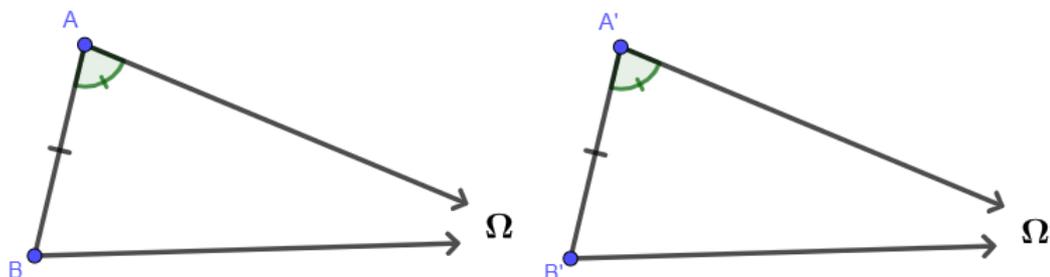
Demonstração:

Baseado nas informações da nossa hipótese, resta saber qual a relação entre os ângulos \widehat{B} e \widehat{B}' .

- Caso eles forem côngruos, afirmamos a congruência dos referidos triângulos (ver Figura 4.34).
- Caso \widehat{B} e \widehat{B}' não forem côngruos, não podemos sustentar a suposta congruência.

Neste caso, realizamos uma prova por absurdo, sem perda de generalidade, suponhamos que $\widehat{B}' > \widehat{B}$.

Figura 4.34: Caso de congruência lado-ângulo para triângulos generalizados



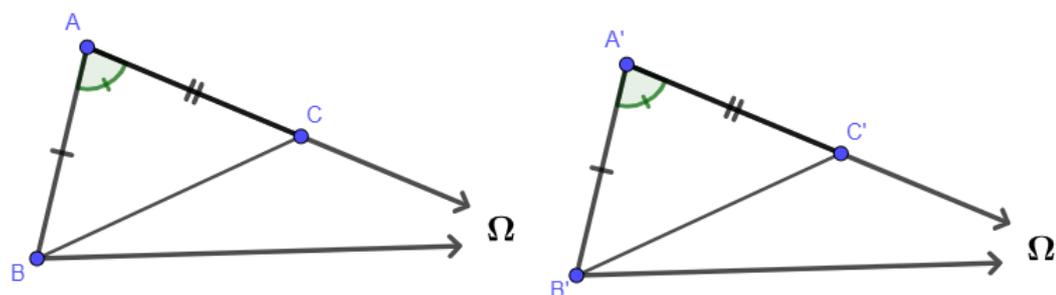
Fonte: Arquivo próprio.

Assim, \widehat{B}' pode ser escrito como $\widehat{B}' = \widehat{B} + \widehat{X}$.

Dessa forma, traçamos um segmento $B'C'$ de modo que $\widehat{AB'C'} = \widehat{B}$, sendo C' pertencente ao segmento $A'\Omega'$ (ver Figura 4.35).

No triângulo $AB\Omega$, no segmento $A\Omega$ marcamos um ponto C tal que $AC \equiv A'C'$. Nos triângulos ABC e $A'B'C'$, notemos que: segundo a hipótese, $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $AB \equiv A'B'$ e, pela construção, $AC \equiv A'C'$, portanto, esses triângulos são cômgruos pelo caso mencionado no Postulado 2.2, assim $\widehat{B'} \equiv \widehat{B}$.

Figura 4.35: Representação da demonstração do caso de congruência lado-ângulo para triângulos generalizados



Fonte: Arquivo próprio.

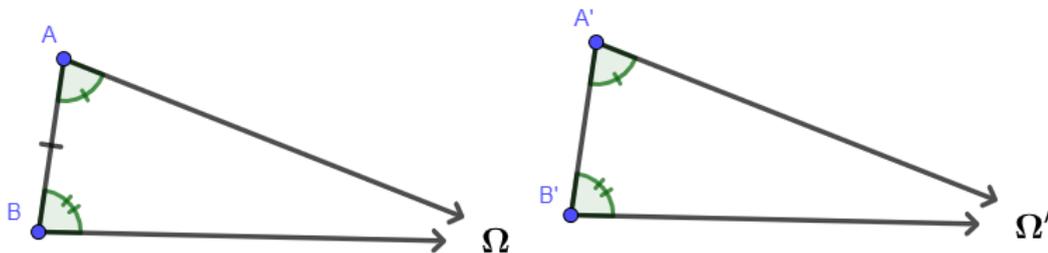
□

Teorema 4.29 (Caso de congruência “Ângulo-Ângulo” - AA - para triângulos generalizados).
 Sejam $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ triângulos generalizados. Se $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, então $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

Demonstração:

Resta provar que $AB \equiv A'B'$. Realizaremos uma demonstração por absurdo, supondo que $AB < A'B'$.

Figura 4.36: Caso de congruência ângulo-ângulo para triângulos generalizados.



Fonte: Arquivo próprio.

Começamos traçando um ponto de C em $A'B'$ de modo que $A'C \equiv AB$ (ver Figura ??). Pelo critério i) da congruência de triângulos ômegas, temos $AB\Omega \equiv A'C\Omega$. Daqui,

$$\widehat{C} = A'\widehat{C}\Omega \equiv A'\widehat{B}'\Omega = \widehat{B},$$

em que \widehat{C} é o ângulo externo (em C), obtido pelo prolongamento do segmento $B'C$ do triângulo $CB'\Omega$. Ou seja,

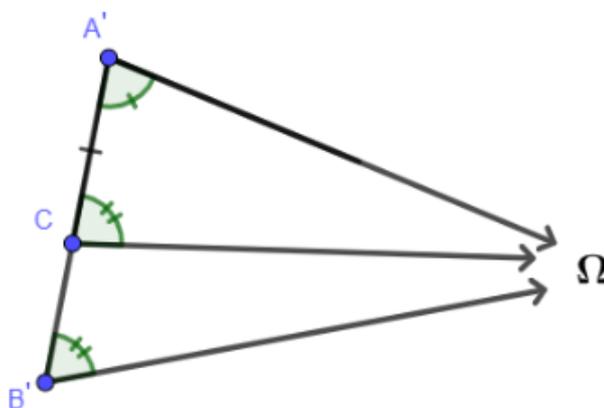
$$\widehat{C} \equiv \widehat{B},$$

que é uma contradição, pois segundo o Teorema 4.25, o ângulo externo \widehat{C} deve ser estritamente maior que o ângulo interno \widehat{B} . O caso em que $AB > A'B'$ é abordado de forma similar.

Portanto, $AB\Omega \equiv A'B'\Omega'$.

□

Figura 4.37: Representação da demonstração do caso de congruência ângulo-ângulo para triângulos generalizados.



Fonte: Arquivo próprio.

4.5 Algumas Diferenças Entre as duas Geometrias

Nessa breve seção trazemos um quadro no qual possui uma pequena síntese sobre as diferenças entre as Geometrias Euclidiana e Hiperbólica. Dito isso, construímos essa tabela trazendo um quadro a respeito de como determinado conceito ou elemento se comporta em uma Geometria e logo na frente o mesmo conceito ou elemento pela perspectiva da outra Geometria.

Quadro 1: Diferenças entre as Geometrias.

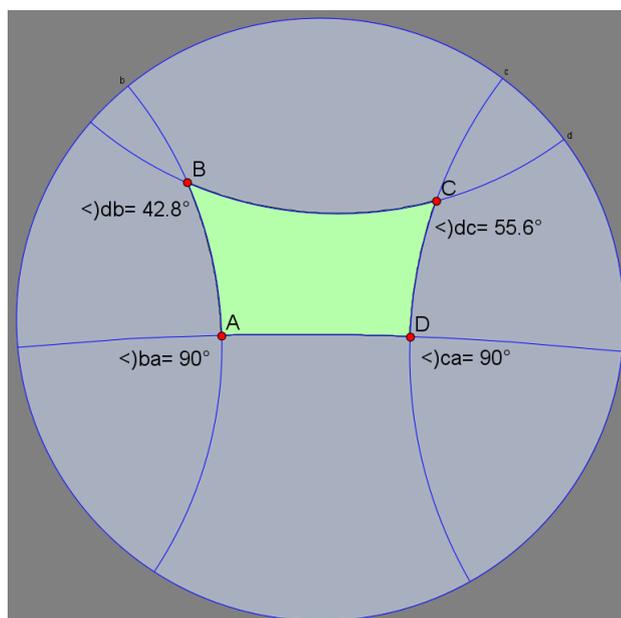
Geometrias	
Euclidiana	Hiperbólica
Há apenas uma reta paralela que passa por um ponto fora de uma reta dada.	Há duas retas paralelas que passam por um ponto fora de uma reta dada, e infinitas hiperparalelas entre as duas retas paralelas.
A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é exatamente igual à 180° .	A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é estritamente menor que 180° .
Existem retângulos.	Não existem retângulos, pois entre duas paralelas só pode haver uma perpendicular comum a ambas.
A soma dos ângulos internos de qualquer retângulo é exatamente igual à 360° .	A soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é estritamente menor que 360° .
O caminho de menor distância entre dois pontos é uma linha reta que liga ambas.	O caminho de menor distância entre dois pontos é uma curva chamada geodésica que passa por ambos.
A distância entre duas retas paralelas é contante	A distância entre duas paralelas vai diminuindo ao longo das referidas retas
É representado por um modelo de curvatura nula (plano)	É representado por um modelo de curvatura negativa (parabolóide hiperbólico)

Fonte: Arquivo próprio.

4.6 Representações de Alguns Elementos da Geometria Hiperbólica no Modelo de Poincaré

A seguir representações no disco de Poincaré de alguns dos elementos presentes na Geometria Hiperbólica, como os quadriláteros de Saccheri e Lambert, triângulos generalizados, entre outros. Vale destacar que elaboramos as figuras subsequentes no software de Geometria dinâmica, inclusive Geometria não Euclidiana, chamado *Cinderella*⁴

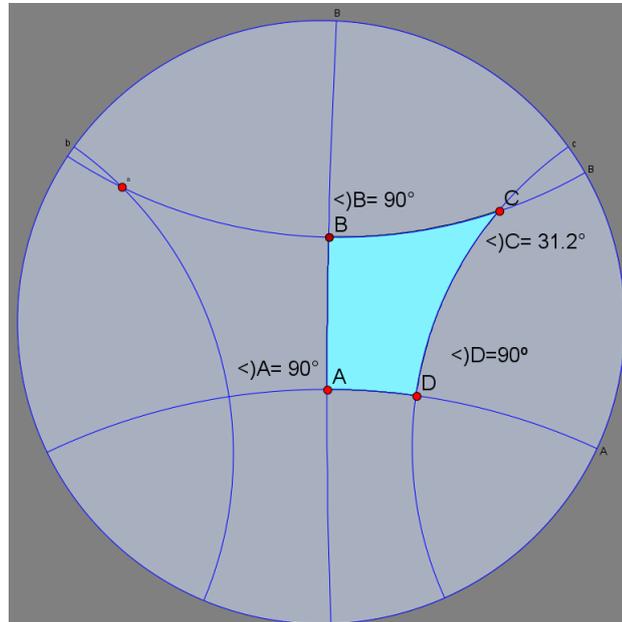
Figura 4.38: Quadrilátero de Saccheri no disco de Poincaré.



Fonte: Arquivo Próprio.

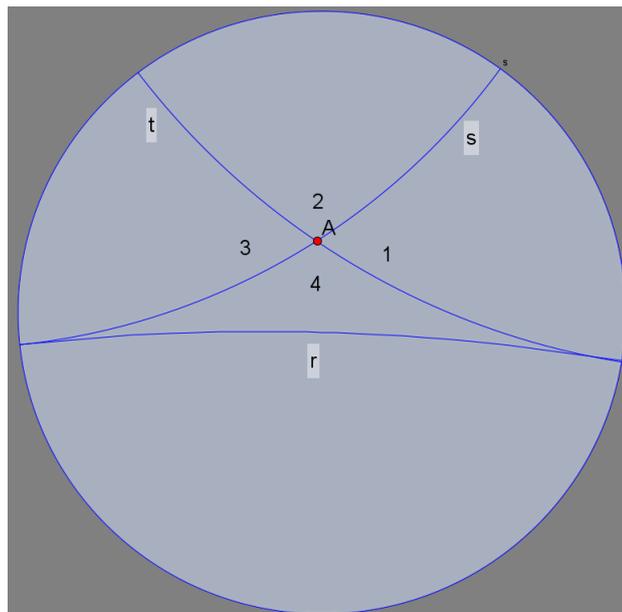
⁴ver mais em <https://www.cinderella.de/tiki-index.php>

Figura 4.39: Quadrilátero de Lambert no disco de Poincaré.



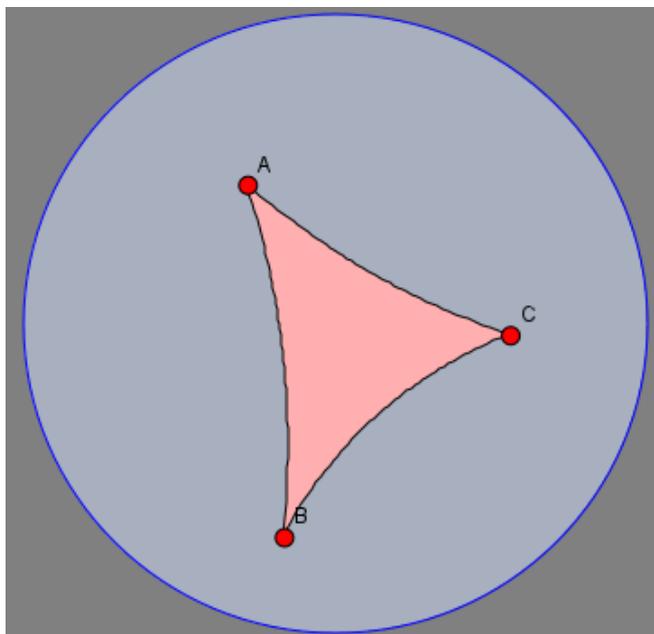
Fonte: Arquivo Próprio.

Figura 4.40: Retas paralelas a uma reta dada no disco de Poincaré.



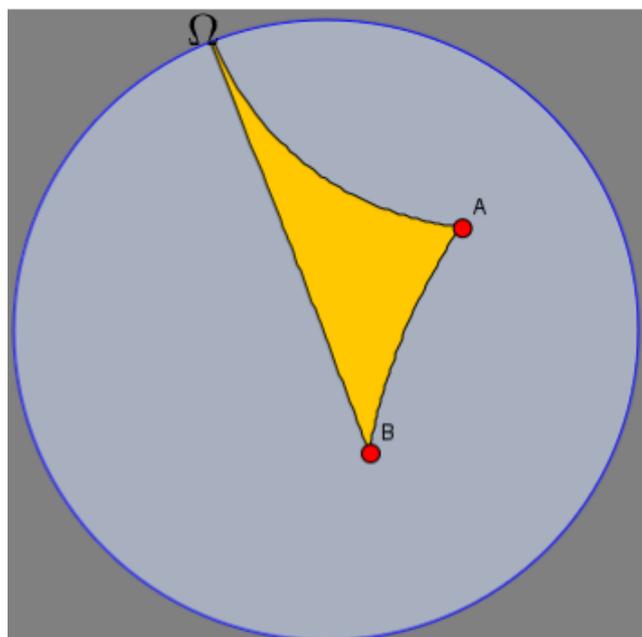
Fonte: Arquivo Próprio.

Figura 4.41: Triângulo hiperbólico no disco de Poincaré.



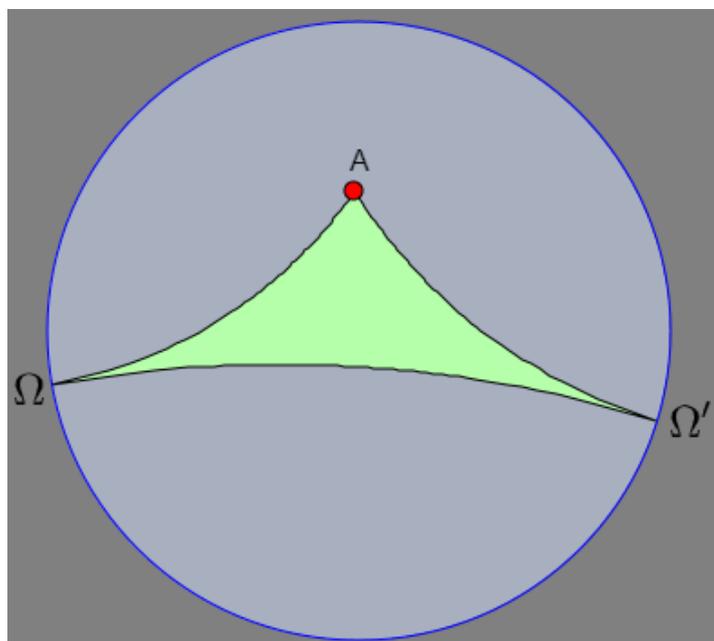
Fonte: Arquivo Próprio.

Figura 4.42: Triângulo hiperbólico com um vértice ideal no disco de Poincaré.



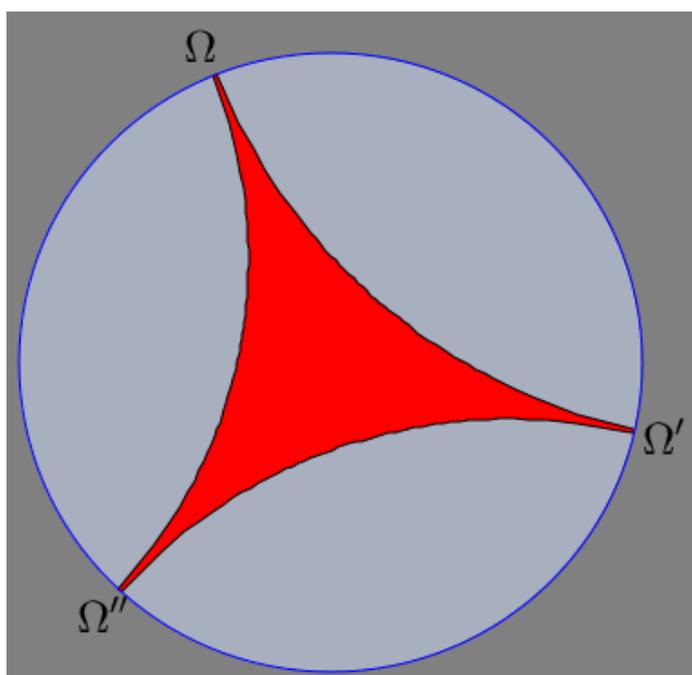
Fonte: Arquivo Próprio.

Figura 4.43: Triângulo hiperbólico com dois vértices ideais no disco de Poincaré.



Fonte: Arquivo Próprio.

Figura 4.44: Triângulo hiperbólico com três vértices ideais no disco de Poincaré.



Fonte: Arquivo Próprio.

Capítulo 5

Potencialidades e Algumas Aplicações

Quando estudamos Matemática, em especial os ramos mais teóricos dela, é normal virem em nossas mentes inquietações sobre onde esse conhecimento é aplicado, surgindo perguntas tais como: esse conhecimento matemático é aplicado? Se for aplicado, dito conhecimento é aplicado dentro da Matemática Teórica ou há aplicações mais práticas? Enfim, esse capítulo é composto por algumas aplicações da Geometria Hiperbólica. Para que fosse possível escrever essa parte da monografia as seguintes fontes foram necessárias: [6] (2004), [11] (2017), [1] (2021), [14] 2001.

5.1 Quadratura do Círculo na Geometria Hiperbólica

Como sabemos, na Matemática, um dos seus fatores importantes é a conjecturação de problemas, e os estudos sobre a afirmação ou negação dessas conjecturas propiciam avanços na ciência Matemática. Segundo [6] (2004, p.132-133), houve, na Grécia, três linhas de desenvolvimento da Matemática, sendo elas: a linha da Matemática organizada no compêndio de livros denominado *Os Elementos*; a linha que estudou questões matemáticas relacionadas as noções de infinitésimo e infinito; e a linha que estudava sobre a Geometria Superior¹. Foi durante as investigações a respeito dos três problemas clássicos de construção da Geometria que a Geometria Superior surgiu. Esses problemas foram os seguintes:

- **A duplicação do cubo:** problema de construir um cubo com o dobro do volume de um cubo qualquer;
- **A trisseção do ângulo:** problema de dividir em três partes côngruas um ângulo qualquer;
- **A quadratura do quadrado:** problema de construir um quadrado com a área côngrua de um círculo qualquer.

¹Geometria das curvas e das superfícies não planas e não esféricas.

Atualmente, sabemos que esses três problemas não possuem solução dentro da Geometria Euclidiana adotando as restrições de construir objetos, apenas usando régua sem escala e um compasso euclidiano. Porém, nada se sabia quanto a essa impossibilidade até que, com o desenvolvimento da Álgebra Moderna e da Geometria Analítica, as demonstrações matemáticas formais atestaram tal fato².

O modo de analisar o espaço na Geometria Hiperbólica é diferente da Geometria Euclidiana, dessa forma, vem a indagação sobre a possibilidade de finalizar o problema da quadratura do círculo na Geometria Hiperbólica, indagação esta que [11] (2017) responde em sua pesquisa. É válido ressaltar que não existe quadrado na Geometria Hiperbólica tal como na Geometria Euclidiana, dito isso, vamos tomar para essa aplicação um quadrilátero de lados côngruos e todos os seus ângulos internos agudos.

Para a construção [11] (2017) se valeu de 6 passos. Também serão registradas as propriedades dos teoremas elementares que a embasam. Mesmo tendo sido construída no plano euclidiano, a possibilidade de construção no plano hiperbólico está salva nos seguintes resultados. Vale destacar que as respectivas demonstrações poderão ser encontradas no referido trabalho nas páginas 104-105:

Teorema 5.1 (Teorema de Mordukhai-Boltovskoi). *Um segmento de medida t é construtível com régua e compasso no plano hiperbólico se, e somente se, $\sinh t$ pertence à E , $\cosh t$ pertence à E ou $\tanh t$ pertence à E , sendo estas condições equivalentes.*

Teorema 5.2 (Teorema da construtibilidade de ângulos em Geometria Hiperbólica). *Um ângulo α pode ser construído, com régua e compasso, no Disco de Poincaré se, e somente se, é construtível no plano euclidiano.*

Dada uma circunferência de centro O e raio unitário, e um ponto A tal que o segmento OA seja o raio desta circunferência, temos a seguinte distância hiperbólica:

$$d(O, A) = \left| \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right|.$$

Seja x a distância euclidiana de OA , no nosso caso, OA corresponde ao raio da nossa circunferência, daí

$$d(O, A) = \left| \ln \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \right) \right|,$$

realizando as devidas operações, obtemos

$$d(O, A) = \ln(3).$$

²No capítulo 2 de [11] encontram-se as demonstrações que dizem respeito à impossibilidade dessas construções na Geometria Euclidiana.

Deste modo, para o comprimento hiperbólico $\ln(3)$, temos que esse círculo possui a área igual a $\frac{4\pi}{3}$

Assim, sabemos que o quadrilátero hiperbólico referenciado no início da seção deverá ter uma área igual a $\frac{4\pi}{3}$, pois,

$$4\pi \left(\frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} \right)^2 = \frac{4\pi}{3},$$

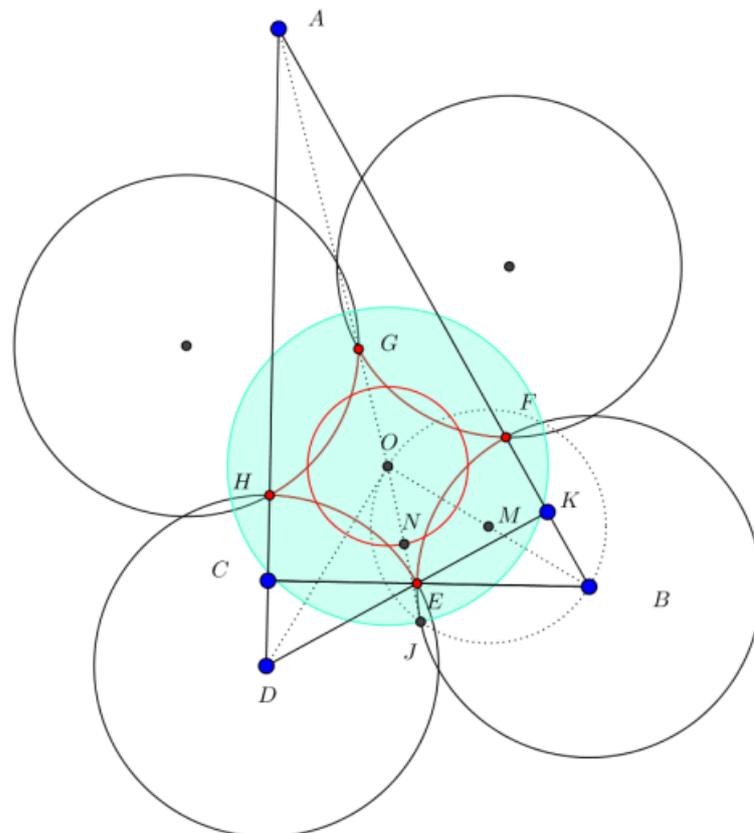
para tanto, a medida de seus ângulos internos deverá ser conforme segue:

$$2\pi - 4\alpha = \frac{4\pi}{3}.$$

Daí, efetuando as devidas operações, obtemos $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ou seja, nosso quadrilátero hiperbólico terá seus ângulos iguais a $\frac{\pi}{6}$.

A seguir a imagem que representa a construção da quadratura do círculo desenvolvida por [11] (2017).

Figura 5.1: Construção da quadratura do círculo na Geometria Hiperbólica.



Fonte: Lima, 2017, p. 110.

5.2 Tesselações na Geometria

Na Geometria Euclidiana podemos fazer o preenchimento de uma superfície, ou de uma área delimitada desta, com figuras geométricas, sendo elas regulares ou não, côngruas ou não, de tal modo a cumprir com dois itens:

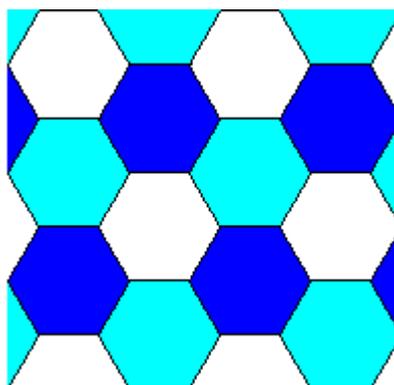
- não pode sobrepor uma figura sobre a outra;
- deve-se cobrir a área de forma a não deixar espaço sem nenhum objeto geométrico entre os já existentes.

Chamamos essa técnica de Tesselação³ e, segundo [1] (2021, p. 66), “consiste em recobrir uma superfície bidimensional, finita ou infinita, empregando como unidades básicas polígonos ou outras figuras, congruentes ou não [...]”. Assim sendo, encontramos na construção de mosaicos outra forma de aplicar a Geometria Hiperbólica, pois, assim como no plano euclidiano podemos preencher o plano hiperbólico, ou parte dele, com objetos oriundos desta Geometria.

A pavimentação no plano euclidiano pode ser classificada conforme o conjunto de polígonos ali utilizados, bem como a existência ou não de um padrão. A seguir, mostramos as classes dessa pavimentação e alguns exemplos:

- **Regulares:** pavimentação que se vale unicamente de um tipo de polígono regular para sua constituição. Podendo ser o polígono de três, quatro ou seis lados;

Figura 5.2: Tesselação regular de hexágonos.



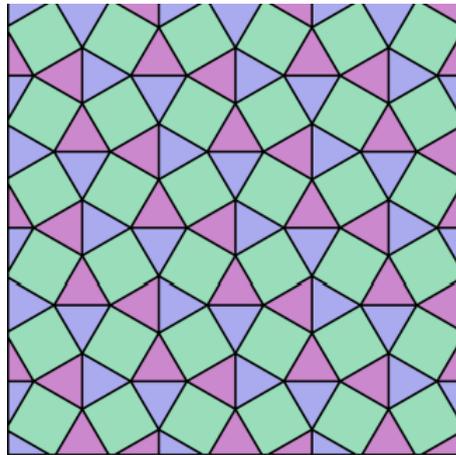
Fonte: <https://www.theedkins.co.uk/jo/tess/grids.htm>.

- **Semirregulares:** pavimentação que se vale de mais de um tipo de polígono regular, tal que a disposição deles, tomando de referência um vértice, deve ser congruente em todo o mosaico. São oitos as formas possíveis de recobrir o plano euclidiano desta maneira, sendo elas: 3.6.3.6 (mosaico tri-hexagonal), 3.3.3.3.6 (mosaico hexagonal cego),

³Também referida como construção de mosaico ou pavimentação ou ladrilhamento

3.3.3.4.4 (mosaico triangular alongado), 3.3.4.3.4 (mosaico quadrado sem corte), 3.4.6.4 (mosaico rombi-tri-hexagonal), 4.8.8 (mosaico quadrado truncado), 3.12.12 (mosaico hexagonal truncado) e 4.6.12 (mosaico tri-hexagonal truncado)⁴;

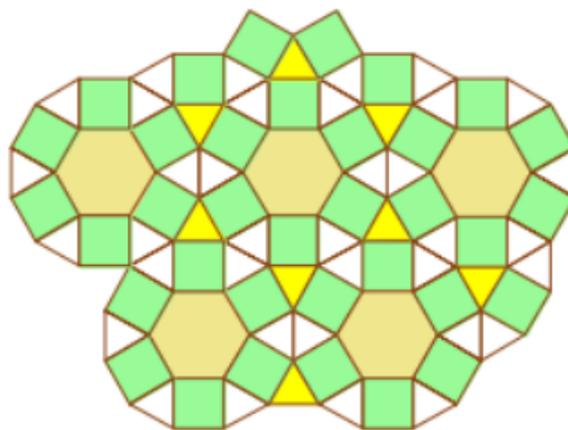
Figura 5.3: Mosaico semirregular quadrado sem corte.



Fonte: SMIGLY, 2017.

- **Demirregulares:** tal como descrito na classe de pavimentação semirregular, mas com a peculiaridade de não haver uma ordenação na disposição dos polígonos em cada vértice. São conhecidos somente catorze mosaicos demirregulares;

Figura 5.4: Tesselação demirregular.

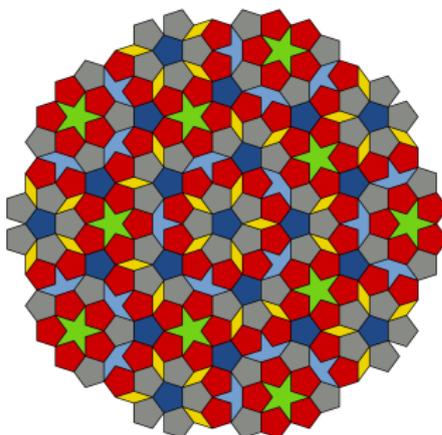


Fonte: SMIGLY, 2017.

- **Irregulares:** pavimentação formada pela junção de polígonos regulares e não regulares;
- **Periódicas:** pavimentações que apresentam um padrão na disposição das figuras. As que não possuem esta característica são denominadas de aperiódicas.

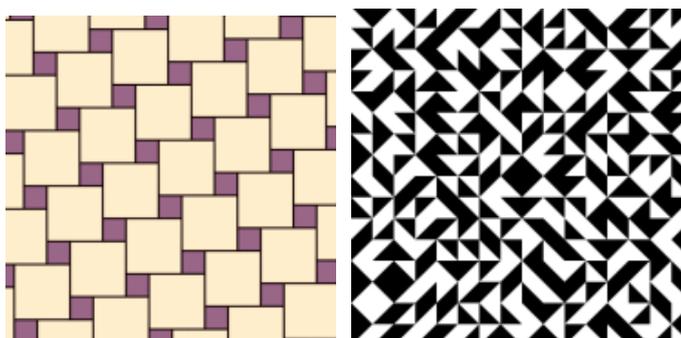
⁴Os números significam os lados das figuras que comungam de um vértice em comum

Figura 5.5: Mosaico irregular.



Fonte: SMIGLY, 2017.

Figura 5.6: A esquerda um mosaico periódico, e a direita um mosaico aperiódico .



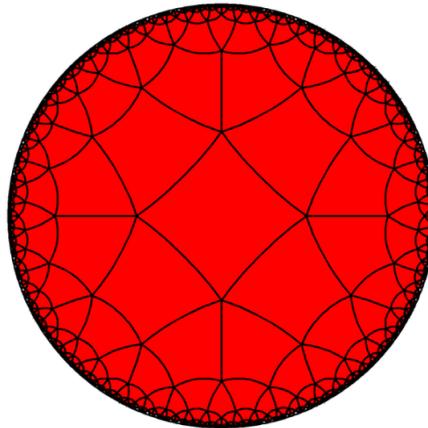
Fonte: SMIGLY, 2017.

Agora, uma vez conhecido o que é tesselação, seus critérios e classificação no plano euclidiano, então conhecer como ela ocorre no plano hiperbólico pode se tornar mais compreensível. Assim, na mesma linha de raciocínio de [1] (2021. p. 70) temos que “tesselação no plano hiperbólico é uma decomposição deste em polígonos hiperbólicos, de maneira que os polígonos cubram o plano hiperbólico e tenham em comum somente vértices e lados.”. Ainda de acordo com Albon [1], há três classes de tesselações hiperbólicas:

- **Regulares:** pavimentação que se vale unicamente um tipo de polígono hiperbólico regular para sua constituição;
- **Semirregulares:** pavimentação que se vale de mais de um tipo de polígono hiperbólico regular;
- **Irregulares:** pavimentação formada por polígonos hiperbólicos não regulares.

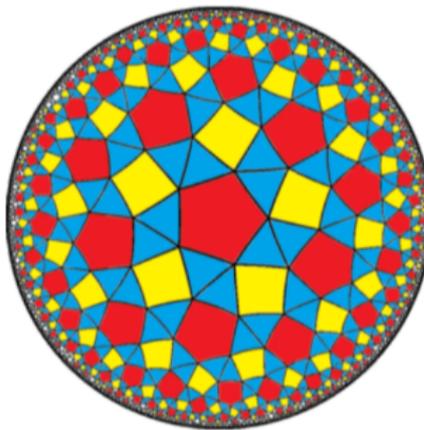
E ainda, a possibilidade de construir mosaicos no plano hiperbólico, em especial no disco de Poincaré, decorre da posse de determinados elementos, por exemplo: “como a inversão

Figura 5.7: Pavimentação regular no disco de Poincaré.



Fonte: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:DisquePoincare-quadrillage.png>

Figura 5.8: Tesselação irregular.



Fonte: Albon, 2021, p. 70.

de um ponto em relação a um círculo, e o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais a um círculo dado e que passam por um ponto deste círculo” ([1], 2021, p. 72).

Conhecendo, deste modo, de forma mais formalizada sobre os mosaicos, notamos que ele é um elemento que se faz bem presente em nosso cotidiano, por exemplo na arte em geral, desde manifestações mais subjetivas até nas de cunho arquitetônico.

5.3 Navegadores Hiperbólicos

A Geometria Hiperbólica, em especial a Trigonometria Hiperbólica, encontra aplicação em áreas da computação. Para ter utilidade em tal ramo, ela se faz presente no modelo tridimensional de Geometria Hiperbólica (ver Figura 5.7⁵), conhecida como bola de Poincaré.

⁵Esta figura é uma representação da projeção da Bola de Poincaré em um modelo hiperbólico em 2 dimensão

Figura 5.9: Disco de Poincaré sendo usado por Escher em uma de suas obras.



Fonte: <https://noosfera.com.br/como-uma-delicada-forma-de-artesanato-revolucionou-nossa-maneira-de-perceber-a-matematica/>

Deste modo, a Geometria Hiperbólica situa sua aplicação na construção dos então chamados Navegadores Hiperbólicos⁶. O interesse por tais navegadores se dá pelo fato que este propicia uma melhor organização de informações em sua interface de visualização.

Assim, a escolha pela teoria hiperbólica da Geometria no desenvolvimento de tal recurso se justifica por esta possuir um espaço “maior”, capaz de armazenar uma quantidade mais elevada de informações promovendo e conservando uma ordem e organização, isto em comparação com a Geometria Euclidiana. A título de curiosidade, a técnica que torna possível essa interface regida segundo a Geometria Hiperbólica foi inspirada por ilustrações do Escher, o qual apresentamos uma de suas obras (ver Figura 5.9).

Por fim, o referido artigo [14] tem como propósito apresentar analogias comuns tanto na trigonometria no espaço coordenado segundo as regras da Geometria elaborada por Euclides como na Geometria Hiperbólica, isto se valendo dos espaços giroscópios de Möbius que constitui o modelo tridimensional de Geometria Hiperbólica.

5.4 As Outras Geometrias

Lobachevski não ficou vivo a tempo de presenciar todo o prestígio que sua descoberta recebeu. O impacto que sua teoria causou, não apenas no ramo da Geometria, mas de toda a Matemática, o colocou com a alcunha de Copérnico da Matemática, isso em referência a quebra de paradigma ocasionado pelo russo ao mostrar que a Geometria Euclidiana não era absoluta. Pois, Lobachevsky provou ser possível o estudo de uma teoria matemática oriunda de

⁶É um navegador que se vale da técnica de visualização hiperbólica, assim mudando a disposição das informações, antes baseados no modelo euclidiano, agora seguindo um traçado esférico. ver em: <https://www.alice.cnptia.embrapa.br/alice/bitstream/doc/5650/1/SBIAgro2007p86.pdf>

sua inquietação referente a uma questão que por mais de 2.000 anos se mantinha absoluta.

A quebra desse paradigma foi forte na Matemática, em especial, na Geometria. Agora, o que importa para a formulação de novas teorias na Matemática é a consistência do conjunto de postulados. Dessa forma, a imaginação dos matemáticos ganharam asas, uma vez que os postulados passaram a ser encarados como hipóteses, sem necessitar de serem auto-evidentes ou verdadeiros, basta apenas que eles sejam consistentes entre si.

De certo modo essa ruptura contribuiu para a formalização de novas teorias geométricas, tais como a Geometria Esférica, Geometria Projetiva, Geometria Topológica e Geometria Diferencial, Geometria Riemanniana, entre outras. Claro que essas teorias geométricas encontraram aplicações no cotidiano, seja em áreas mais práticas, como o princípio de funcionamento do Sistema Global de Posicionamento (GPS)⁷; como em áreas menos intuitivas, por exemplo na formulação da teoria da relatividade geral, conhecida também como teoria geométrica da gravidade. Por fim dizemos, segundo Poincaré, “nenhuma Geometria é mais correta do que a outra - apenas mais conveniente”.

⁷do inglês *Global Positioning System*.

Capítulo 6

Considerações Finais

A presente monografia se propôs a ser fruto de um estudo acadêmico a respeito das Geometrias não Euclidianas, especificamente a Geometria Hiperbólica. Ainda, o seu objetivo foi de investigar sobre o assunto nas dimensões histórica, matemática (resultados formais) e utilitária (aplicabilidade), bem como realizar a divulgação do tema. E mais, essa pesquisa se justifica pelos argumentos apresentados no início do trabalho, sendo um deles a curiosidade que o referido assunto causou no autor. Recordado isto, essa pesquisa buscou discorrer nas dimensões supracitadas e agora iremos verificar se alcançamos a proposta.

Na dimensão histórica constituímos um capítulo no qual dissertamos sobre a história das Geometrias não Euclidianas. Para tanto, tivemos como ponto de partida os Postulados de Euclides, em especial o 5º Postulado, conhecendo o problema de sua formulação, perpassando pelos matemáticos que ousaram tentar demonstrar esse postulado, chegando finalmente aos fundadores da Geometria Hiperbólica

Por sua vez, na dimensão matemática foram desenvolvidos uma série de resultados, alguns únicos pertencentes à teoria hiperbólica e outros que são comuns a ambas Geometrias mencionadas ao longo do trabalho, Euclidiana e Hiperbólica. E ainda, elaboramos um quadro no qual destacamos as diferenças entre as duas Geometrias. Desta forma buscamos um aprofundamento sobre a Geometria Hiperbólica, bem como conhecimento a respeito de suas peculiaridades.

Por outro lado, na dimensão utilitária trouxemos algumas das possibilidades e aplicações da teoria geométrica hiperbólica. Assim, dentre as aplicações, há breves desenvolvimentos referentes à Tesselação e Navegadores Hiperbólicos. Agora dentre as possibilidades, é aqui apresentado sobre a Quadratura do Círculo (claro que com suas restrições, tal como o que será entendido como quadrado) e sua contribuição para a ascensão do pensamento geométrico, fato este que reverberou em outras ciências.

No referente a divulgação, conseguimos de certa maneira extrapolar com o proposto, pois, além de termos elaborado a presente monografia para fins de divulgação do assunto, houve

outros canais pelos quais intensificamos a difusão das Geometrias não Euclidianas, em especial a Geometria Hiperbólica, sendo eles uma comunicação científica (ver Apêndice B) e a pesquisa elaborada na disciplina de Estatística (ver Apêndice A).

Em suma, acreditamos que conseguimos alcançar os objetivos visados, conhecer e divulgar. Houve, de certo, algumas dificuldades no desenvolvimento de alguns dos resultados matemáticos e das aplicações, por conta de suas características, mas foram sim superados e bem registrados. Por fim, destacamos todos os elementos a respeito da própria Matemática como área do conhecimento e da sua história no geral que foram estudados e que surgiram ao longo do trabalho, com certeza foram e serão de grande estima para a formação acadêmica e profissional, por ter me colocado mais próximo dessa ciência.

Referências

- [1] ALBON, A. J. D. **A geometria do disco de Poincaré**. 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2021.
- [2] ARCARI, Inedio. **Um Texto de Geometria Hiperbólica**. Biblioteca Digital da Unicamp. Campinas. São Paulo. 2008.
- [3] BATISTA, Carolina Cordeiro; GRACIOLLI, Carolina Yumi Lemos Ferreira. **O que é isto? Geometrias que se constituem nas possibilidades da geometria euclidiana**. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 8, n. 24, p. 47-64, 2021.
- [4] COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. 2 a. ed. Rio de Janeiro: Editora Intercedência. 2001.
- [5] DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana**. 8. ed. São Paulo-SP: Atual, 2005.
- [6] EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 4º ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004. p. 844. Título original: Introduction to the History of Mathematics.
- [7] FREITAS, Tenivân Lins. **PROPOSTA DE INSERÇÃO DE UM MODELO DE GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. 2014. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Feira de Santana.
- [8] JÚNIOR, Clóvis Lisbôa dos Santos. **Geometrias não euclidianas na formação inicial do professor de Matemática: uma proposta à produção de significados no estudo de Geometria**. 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.
- [9] KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. **Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, v. 1, n. 44, p. 13 - 42, 2004. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011892.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

- [10] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise** - Vol 1. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1976.
- [11] LIMA, Jhonny Felipe Alves de. **O Problema da Quadratura no Plano Hiperbólico**. Rio de Janeiro, 2017. p. 147. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- [12] SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2014.
- [13] SMIGLY, D. de A. **Tesselações pentagonais e mosaicos de Penrose**. 2017. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/dsmi-gly/ensino/palestras/Tessela20pentagonais%20e%20mosaicos%20de%20Penrose.pdf>.
- [14] UNGAR, Abraham A. **Hyperbolic trigonometry and its application in the Poincaré ball model of hyperbolic geometry**. Computers & Mathematics with Applications, v. 41, n. 1-2, p. 135-147, 2001.
- [15] VIEIRA, Juliano Vergna. **OS QUADRILATEROS DE SACCHERI E O SURTI-MENTO DA GEOMETRIA HIPERBOLICA**. 2018. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas, Vitória, ES, 2018.

Apêndice A

Pesquisa Estatística: Geometrias

A seguir apresentamos a pesquisa Estatística realizada na disciplina de Estatística ministrada pela Profa. Dra. Fernanda Vital durante o período 2022.1. A pesquisa que segue foi o trabalho da disciplina. Ela foi proposta com o intuito de aprendermos na prática como é realizada uma pesquisa que se pauta na metodologia estatística, em especial se valendo do método de amostragem aleatória, bem como aprendermos termos e conceitos presentes na referida disciplina, como, por exemplo, amostra, frequência relativa e absoluta, confiabilidade, erro amostral, entre outros.

A pergunta motivadora do trabalho foi a seguinte: *qual a percepção dos alunos do curso de Matemática da UFNT a respeito de Geometrias?*. Ainda, foi colocado “Geometrias” no plural para buscarmos elementos que nos dessem pistas de qual a referência sobre Geometria, se era apenas com base na teoria euclidiana ou se havia outro referencial.

Deste modo, foi enviado - via e-mail - para os alunos do curso um questionário elaborado no Google Forms no qual suas perguntas buscava mostrar algumas limitações na teoria geométrica euclidiana, como *qual superfície que melhor representa o planeta Terra?*. Assim, uma vez respondendo que era uma superfície esférica, a Geometria Euclidiana já não poderia dar conta de todas as demandas por ser desenvolvida em superfície plana. Por fim, por essas e outras perguntas, obtivemos respostas que constataram que há uma certa ambiguidade nos referenciais teóricos ao se tratar de Geometria.



Docente: Fernanda Vital

Discentes: Daniel Moura Rodrigues dos Santos, Marcos Danilo Moura Barbosa Campos e Pedro Henrique Rodrigues de Matos

Disciplina: Estatística

2022.1 – 7º Período

Geometrias

Aspectos Iniciais

Em tempo de uma sociedade mais conectada em relação a web comunicação, se valem de recursos tecnológicos para alcançar determinados desafios no decorrer da vida universitária, nessa perspectiva, o presente trabalho visa por meio de uma pesquisa estatística elaborada durante as aulas da disciplina de Estatística pelos alunos Daniel Moura Rodrigues dos Santos, Marcos Danilo Moura B. Campos e Pedro Henrique Rodrigues de Matos investigaram discentes universitários com o objetivo de obter a percepção dos alunos do curso de matemática a respeito das geometrias.

A população de interesse do presente trabalho são os alunos do curso de licenciatura em Matemática, nos quais são compostos por 175 alunos, sendo o tipo de amostragem escolhida foi a aleatória, na qual foram sorteados 97 alunos.

Desta forma, as respostas foram coletadas via formulário, onde foi destacado o sigilo enquanto a identificação dos discentes.

Desenvolvimento

Considerando o método de amostragem aleatória, foi realizado um cálculo inicial seguido da seguinte fórmula;

Imagem 1: Fórmula para determinar o tamanho da amostra

$$n = \frac{z^2 \cdot \sigma^2 \cdot N}{d^2(N - 1) + z^2 \sigma^2}$$

Fonte: Arquivo do Autor

Para apresentar o cálculo que foi realizado em sala, determinamos o número de matriculados no Curso (97), em 2022.1, que seriam amostrados. Nesse sentido, o presente trabalho conta com o 90% de confiabilidade e com o erro amostral de 5% que compõem a fórmula acima, levando em consideração que o erro amostral e a confiabilidade referem-se apenas às variáveis qualitativas, logo nada dizem sobre as variáveis quantitativas. Ainda sobre a confiabilidade, temos que, uma vez que a confiabilidade da pesquisa é de 90% significa que se a mesma pesquisa for repetida inúmeras vezes com diferentes amostras, temos que em 90% das pesquisas os resultados estão contidos dentro da margem de erros de cada um dos itens, isto, lembrando sempre, referente às variáveis qualitativas. Segue a seguinte legenda:

σ = desvio padrão.

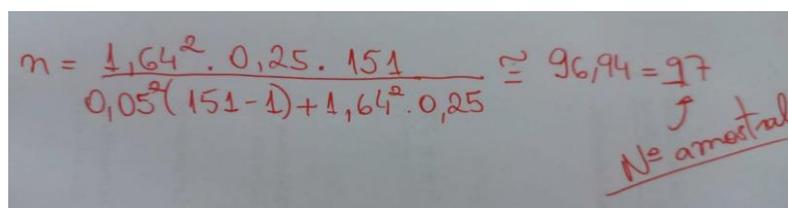
d = erro amostral.

z = abscissa da curva normal padrão, fixado um nível de confiabilidade.

n = tamanho da amostra.

Assim, partamos para os cálculos a fim de determinar o tamanho da amostra, no qual é determinado pela imagem abaixo:

Imagem 2: Cálculo do tamanho da amostra



The image shows a handwritten calculation of the sample size n. The formula is: $n = \frac{1,64^2 \cdot 0,25 \cdot 151}{0,05^2(151-1) + 1,64^2 \cdot 0,25}$. The result is approximately 96,94, which is rounded to 97. A handwritten note below the result says "Nº amostral" with an arrow pointing to the number 97.

Fonte: Arquivo do Autor

Para o sorteio dos 97 matriculados nos valemos da ferramenta “Gerador de números aleatórios”, onde poderá ser facilmente encontrada pelo link: https://www.4devs.com.br/gerador_de_numeros_aleatorios.

Assim, realizamos o sorteio, no qual posteriormente foi realizado um print conforme ilustrado na imagem abaixo:

Imagem 3: Sorteio

1 Quantidade de números: 137

2 Números inteiros entre 1 e 175

3 Resultado em: 15 Colunas

4 Números únicos:

5 Ordem da lista: Aleatória

6 Ordem dos números: Coluna

GERAR NÚMEROS

Resultado:

123	112	149	71	60	145	119	80	150	120	49	5	32	26	102
174	27	30	7	90	31	121	42	79	98	165	156	118	115	117
33	162	164	63	126	99	40	166	159	170	24	152	13	107	78
14	58	68	104	87	2	21	4	167	45	70	62	41	148	130
88	29	142	20	76	158	77	43	147	141	171	28	136	55	131
18	108	44	151	9	66	155	113	110	61	84	144	139	160	153
3	19	25	122	116	129	154	161	101	124	146	34	89	1	50
39	100	59	23	133	105	36	109	135	52	96	95	22	73	137
114	163	65	15	134	69	83	132	140	127	54	82	143	53	169
67	12													

Copiar

Fonte: Arquivo do Autor

No item 1 do site foi pedido para determinar aleatoriamente 137 elementos, destes 97 titulares e 40 suplentes. No item 2 foi delimitado o intervalo numérico no qual os números sorteados fazem parte, desta forma, foi escolhido números inteiros de 1 a 175. O número 175 é a quantidade total de alunos matriculados no curso, ou seja, a população. Em seguida, no item 3 do site oferece ao usuário uma opção de organizar os números sorteados em colunas, isto é uma questão mais estética e de organização. O mesmo ocorre no item seguinte, no qual oferece a opção de deixar os números sorteados em ordem crescente ou decrescente ou de forma aleatória, este último foi escolhido para a presente pesquisa. Por fim, sorteamos os números segundo as nossas preferências. A imagem da interface do site é a imagem dos números sorteados e das preferências utilizadas para a pesquisa.

Agora sobre o sorteio. Inicialmente foi estabelecido uma amostra de 107 alunos, porém, como uma parcela dos grupos não conseguiram contactar todos os elementos, foi realizado um novo cálculo amostral conservando o mesmo erro percentual e confiabilidade, no entanto deixando a amostra igual à 97 alunos do curso. Para a identificação, nos valem da lista de matriculados do curso. Esta lista era composta de outras duas listas, uma com os alunos matriculados do período matutino e a outra com os alunos matriculados no período noturno. A organização da ordem os alunos da primeira lista enumeraram os acadêmicos com números de 1 à 106; a organização da segunda trazia os mesmos numerados com números de 1 à 69. Daí somamos os números total de alunos das duas listas, o que resultou em 175 elementos. Agora

para a identificação. Quando o número sorteado era referente à primeira lista, o respectivo acadêmico era identificado de acordo com seu número na lista. Quando o número sorteado era maior que 106, por exemplo, 107, pegávamos esse número dele e subtraído 106 e o resultado era um correspondente da segunda lista, neste caso, o primeiro da lista dos alunos noturnos.

O questionário é composto por 8 perguntas, sendo uma delas constituída por uma variável quantitativa contínua e as demais questões formadas por variáveis qualitativas nominais. A seguir será apresentado as perguntas que compuseram o questionário elaborado para a pesquisa, na qual será mostrado entre parênteses o tipo de variável em cada questão.

Segue abaixo as perguntas da Pesquisa:

QUESTÃO 1: De 0% a 100%, assinale a alternativa que expressa o quanto você considera que conheceu sobre geometrias durante sua vida escolar/universitária (Marcando a primeira opção, por exemplo, entende-se que o conhecimento sobre geometrias é menor que 25%): (Variável Quantitativa contínua)

- a) 0% a 25%
- b) 25% a 50%
- c) 50% a 75%
- d) 75% a 100%

QUESTÃO 2: Existe a possibilidade da soma dos ângulos interno de um triângulo ser diferente de 180°? (Variável Qualitativa nominal)

- a) Sim
- b) Não
- c) Não sei responder

QUESTÃO 3: As formas geométricas (triângulos, círculos, quadriláteros) sofrem algum tipo de influência da superfície na qual estão representados? (Variável Qualitativa nominal)

- a) Sim
- b) Não
- c) Não sei responder

QUESTÃO 4: Há a possibilidade de retas ditas paralelas se cruzarem em alguma ocasião?(Variável Qualitativa nominal)

- a) Sim
- b) Não
- c) Não sei responder

QUESTÃO 5: Qual a superfície que melhor representaria o planeta Terra? (Variável Qualitativa nominal)

- a) Plano
- b) Esférica
- c) Outra

QUESTÃO 6: Caso tenha escolhido a alternativa (c) diga, qual seria esta superfície?

QUESTÃO 7: Você conhece o matemático grego chamado Euclides? (Variável Qualitativa nominal)

- a) Sim
- b) Não
- c) Não sei responder

QUESTÃO 8: Marque todas as geometrias que você conhece: (Variável Qualitativa nominal)

- Geometria Esférica
- Geometria Euclidiana Plana
- Geometria Analítica
- Geometria Euclidiana Espacial
- Geometria Urbana ou do Táxi
- Geometria Projetiva
- Geometria Hiperbólica

- () Geometria dos Fractais
- () Geometria Topológica
- () Geometria Descritiva

Após discriminar as amostras da referida pesquisa, partimos em busca dos e-mails dos sorteados. Para tanto, encontramos uma lista com os e-mails da maioria dos acadêmicos localizada na lista de e-mails encaminhados pelo perfil da orientação do curso. Em seguida, a lista com os nomes dos elementos da amostra, citada anteriormente, foi incrementada com seus respectivos e-mails. Por fim, enviamos o questionário elaborado na plataforma Google Forms no e-mail de cada um dos indivíduos. Vale dizer que não encontramos o e-mail de alguns indivíduos, daí buscamos contato via WhatsApp, tanto por uma lista de chamada contento todos os sorteados nos grupos das disciplinas quanto o contato privado de cada um deles. Além de buscar por aqueles que não tínhamos contato, usamos este recurso com o objetivo também de comunicar todos sobre a pesquisa solicitando a colaboração dos acadêmicos. É bom deixar claro que conseguimos que alguns respondessem o questionário através de conversas informais que ocorreram dentro dos perímetros do Campus, algo do tipo “ei, estamos fazendo um trabalho de Estatística. Nos dê uma ajuda e responda as questões. Procure por elas no seu e-mail, ok? Obrigado!”. Vale ressaltar que nem todos que receberam o questionário responderam os e-mails e/ou as mensagens no WhatsApp. Tivemos um total de 97 correspondentes, destes 17 são suplentes. A título de esclarecimento, o mesmo processo de abordagem para contactar os elementos titulares foi também utilizado para contactar os suplentes. Além da falta de resposta de alguns elementos, encontramos outros empecilhos, tais como: a demora nas respostas e os não retorno dos questionários respondidos. Alguns colegas e a professora da disciplina prestaram bastante auxílio quando compartilharam alguns contatos de pessoas que a comunicação estava sendo difícil. Por último, houve também que dois acadêmicos não conseguiram acessar o questionário online, daí eles receberam o questionário pelo WhatsApp e mandaram as respostas pelo mesmo, em seguida, tabulamos suas respectivas respostas no rol.

Em relação a tabulação dos dados foi realizado de acordo com as normas do IBGE, nas quais foram estudadas durante as aulas de Estatística, segue abaixo a tabulação dos mesmos de cada questão, sendo apresentado também os gráficos, nos quais inicialmente foram identificados alguns problemas relacionados aos comandos para inserir os gráficos no Excel, porém através das orientações seguidas nas aulas de Estatística, bem como também nos PDFs disponibilizados na plataforma AVA pela professora da disciplina, tudo foi esclarecido posteriormente realizado a construção dos presentes gráficos referentes aos dados coletados.

Tabela 1: Questão 1.

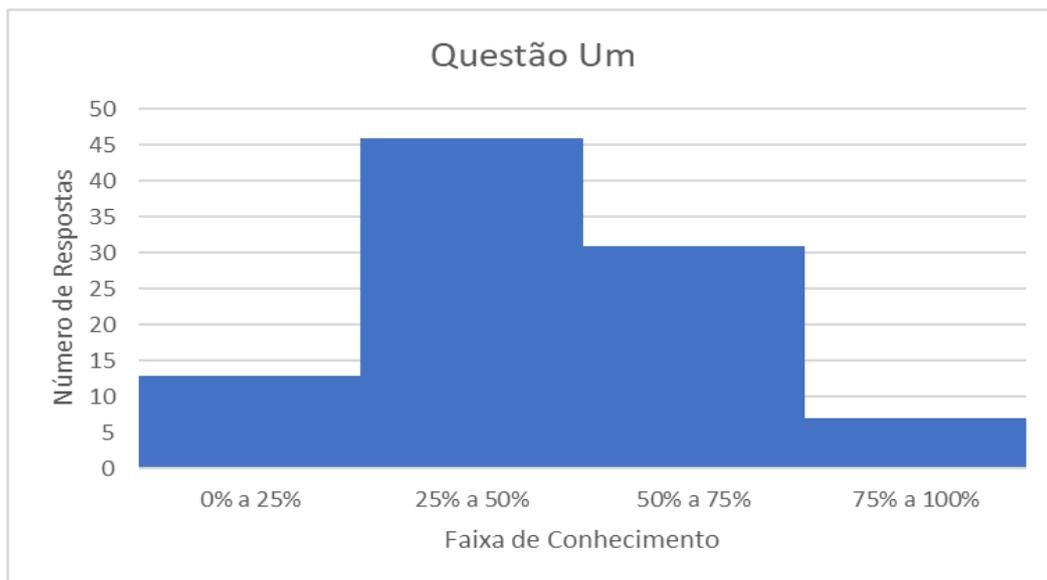
Questão 1		
Porcentagens	Frequência absoluta	Frequência Relativa
0% a 25%	13	13,40%
25% a 50%	46	47,42%
50% a 75%	31	31,96%
75% a 100%	7	7,22%
Total	97	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

Como a primeira questão é representada por uma variável quantitativa decidimos optar pela ilustração de um gráfico denominado Histograma, no qual descreve a melhor descrição do comportamento das variáveis quantitativas.

Outro fator de importância para escolha desse gráfico está relacionado a sua característica de indicação de dispersão dos processos, e como queríamos apresentar e tirarmos conclusões acerca dos intervalos de porcentagem sobre a percepção dos alunos a respeito do quanto os mesmos consideram que conhecem sobre geometrias durante a vida escolar/universitária comparamos os resultados e comunicamos as informações graficamente optamos pelo Histograma como mostrado abaixo:

Gráfico 1: Questão 1



Fonte: Arquivo do Autor.

A primeira questão tentou conhecer o quanto os alunos do curso acreditam que já viram a respeito de geometrias em geral. Formulando a questão dessa forma, não ficamos restritos a

apenas a geometria de Euclides. Daí temos que, aproximadamente, 47% (46 respostas) responderam que conhecem sobre geometria entre 25% e 50%. E, aproximadamente, 31% (31 alunos) da amostra alega ter conhecido entre 50% e 75% sobre geometrias em sua jornada educacional. Esta questão serviu mesmo para a pessoa julgar o tanto que conhece sobre geometrias e logo em seguida se deparar com um conteúdo sobre tal que normalmente não é citado nas escolas, por exemplo.

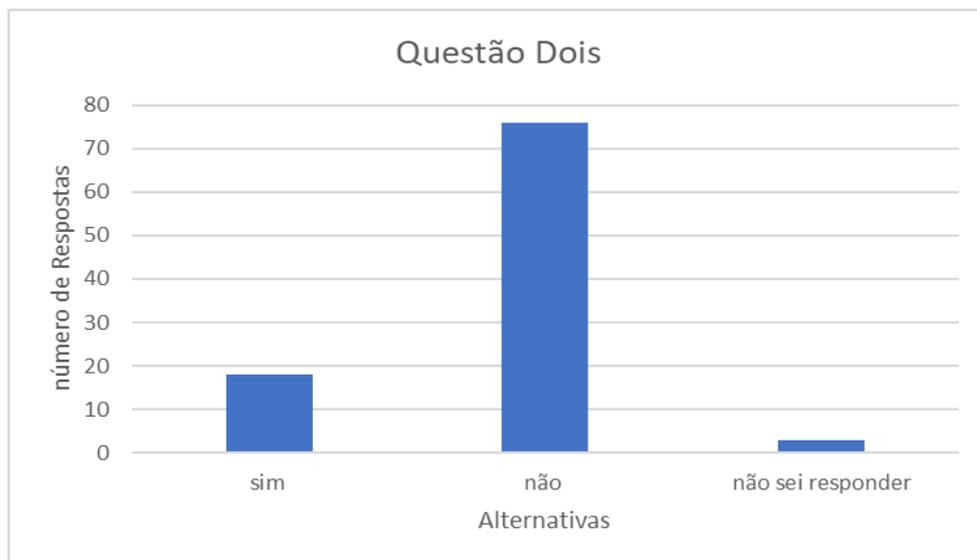
Tabela 2: Questão 2

Questão 2		
Alternativas	Frequência	Frequência
	absoluta	Relativa
sim	18	18,56%
não	76	78,35%
não sei responder	3	3,09%
Total	97	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

Para esta questão o gráfico de Barras representa de forma organizada a ordenação da variável qualitativa nominal na presente questão embarcada pelo entendimento dos alunos sobre a possibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de 180° :

Gráfico 2: Questão 2



Fonte: Arquivo do Autor.

Note que as barras retangulares foram representadas verticalmente para estabelecer uma visualização facilitada sobre a representação das três categorias de respostas. Assim, a questão

buscou elucidar pistas verificando se os alunos conhecem outras geometrias a partir da ambiguidade quanto à soma dos ângulos internos de um triângulo nas diversas geometrias. Por exemplo, ao responder que existe sim a possibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de 180° temos indícios que estes respondentes conhecem acerca de outras geometrias, uma vez que, por exemplo, na geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é um valor entre 180° e 540° . Deste modo, recebemos 76 respostas, aproximadamente 78% dos alunos pesquisados, que atestaram a impossibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de 180° , levando-nos a concluir que grande maioria possui como referencial teórico, ao se tratar de geometria, a Geometria Euclidiana. Como o erro amostral é de 5%, devemos entender que, em relação a população, os que confirmam a impossibilidade da soma dos ângulos internos de um triângulo ser diferente de 180° , está situada entre 73% a 83%.

Tabela 3: Questão 3.

Questão 3		
Alternativas	Frequência absoluta	Frequência Relativa
sim	29	29,90%
não	40	41,24%
não sei responder	28	28,87%
Total	97	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

A representação para esses tipos de dados poderá facilmente ser representado por um gráfico de barras retangulares em formato 3D, pois assim constituirá em uma visualização das categorias sobre o conhecimento dos alunos a respeito das formas geométricas (triângulos, círculos, quadriláteros) sofrerem algum tipo de influência da superfície na qual estão representados.

Nesse sentido, a escolha por esse gráfico remete a uma compreensão facilitada mostrada visualmente das categorias de resposta dos alunos.

Gráfico 3: Questão 3.



Fonte: Arquivo do Autor.

A terceira questão busca conhecer se os alunos entendem sobre a influência da superfície na forma geométrica representada nela. Por exemplo, o triângulo, figura de três lados e três vértices, quando representado na esfera, o modelo da geometria esférica, a soma de seus ângulos internos varia entre 180° a 540° , devido a superfície, mais especificamente, a curvatura presente nesta superfície; por outro lado, na geometria de Euclides, a soma dos ângulos internos da mesma forma geométrica é, exatamente, 180° , a superfície plana é determinante para a perpetuação e unicidade deste resultado. Logo vemos que as formas geométricas sofrem influência das superfícies. Na presente pesquisa 40 discentes, isto é, aproximadamente 41% dos alunos, responderam que não há influência da superfície na representação das figuras geométricas, o que sustenta ainda mais a hipótese de que os acadêmicos, a sua maioria, encaram a Geometria Euclidiana como única geometria possível. Como o erro amostral é de 5%, devemos entender que a população que diz não haver influência da superfície para as formas geométricas nela representada é uma proporção entre 36% a 46%. Em contrapartida, temos um percentual de aproximadamente 30% de respondentes que escolheram a resposta “sim”, a saber, esse percentual representa 30 respostas.. Do mesmo modo, como o erro amostral é de 5%, temos que interpretar que a quantidade, em relação à população, é um percentual entre 25% e 35%. Já o percentual de, aproximadamente, 29% é a proporção dos que escolheram a

alternativa “não sei responder”, foram 28 respostas para este item. Da mesma forma, uma vez que o erro amostral é de 5%, temos que o percentual que representa a resposta da população da pesquisa é um valor entre 24% a 34%. Comentando acerca das respostas “sim”, é curioso notar que foi um percentual maior do que aqueles que disseram haver a possibilidade de triângulos cuja soma dos ângulos internos serem diferentes centenas, o que nos leva a pensar que apesar deles possuírem um pensamento geométrico que pode entrar em confronto com as regras euclidianas, apenas vêm como válido na geometria o que pertence a geometria de Euclides. Para os que optaram pela alternativa “não sei responder” temos duas hipóteses. Primeira: foi a primeira vez que se depararam com a relação superfície e figura geométrica. Segunda: não tinha um conhecimento sólido de uma das características determinante das geometrias, a saber, cada geometria possui uma superfície que melhor representa seus resultados. Enfim, para ambas hipóteses, os indícios são cada vez maiores de que o entendimento por parte dos alunos a respeito de geometria é predominantemente a Geometria Euclidiana.

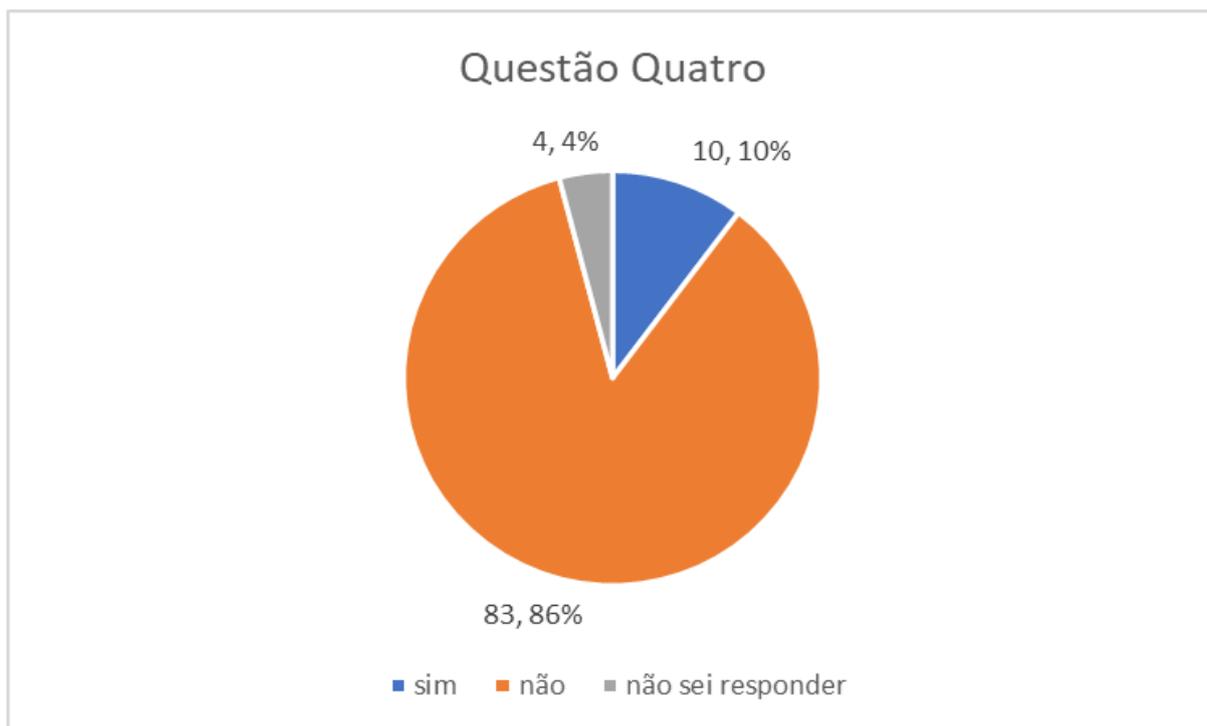
Tabela 4: Questão 4.

Questão 4		
Alternativas	Frequência absoluta	Frequência Relativa
sim	10	10,31%
não	83	85,57%
não sei responder	4	4,12%
Total	97	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

Nesses dados representaremos através de um gráfico de setores, no qual representará relativamente às opiniões dos alunos sobre a possibilidade de retas ditas paralelas se cruzarem em alguma ocasião.

Gráfico 4: Questão 4.



Fonte: Arquivo do Autor.

Perceba que esta variável nominal no gráfico de setores não representa a ordenação das categorias, mas nosso objetivo na presente questão é mostrar graficamente a porcentagem das categorias neste diagrama circular mostrando que cada ângulo do setor circular corresponde a uma porcentagem dos dados, sendo sua totalidade representada igual a 100%.

Nesse sentido, a questão nos retorna a absolutividade do Axioma das Paralelas, axioma polêmico e fundamental para grande parte da teoria de Euclides. O questionamento em cima do referido axioma foi o ponto de ignição para a expansão da compreensão dos indivíduos a respeito do pensamento geométrico como um todo. A partir da contestação do Axioma das Paralelas de Euclides foi possível a formulação da Geometria Hiperbólica. Dentre os axiomas que alicerçam tal teoria encontra-se aquele que é equivalente à negação do Axioma das Paralelas de Euclides, "dado uma reta em um ponto fora desta, existe pelo menos duas retas que passam por aquele ponto e são paralelas à reta dada". Deste modo, temos que aproximadamente 85% dos alunos ainda estão em sintonia unicamente com a teoria euclidiana, afirmando que as retas paralelas não podem se intersectar, assim, alegamos que a maioria dos discentes tem a Geometria Euclidiana Plana como incontestável referência quando se trata de geometria. Lembrando que, como o erro amostral é de 5%, devemos entender que a população que considera tal certeza está entre 80% a 90%.

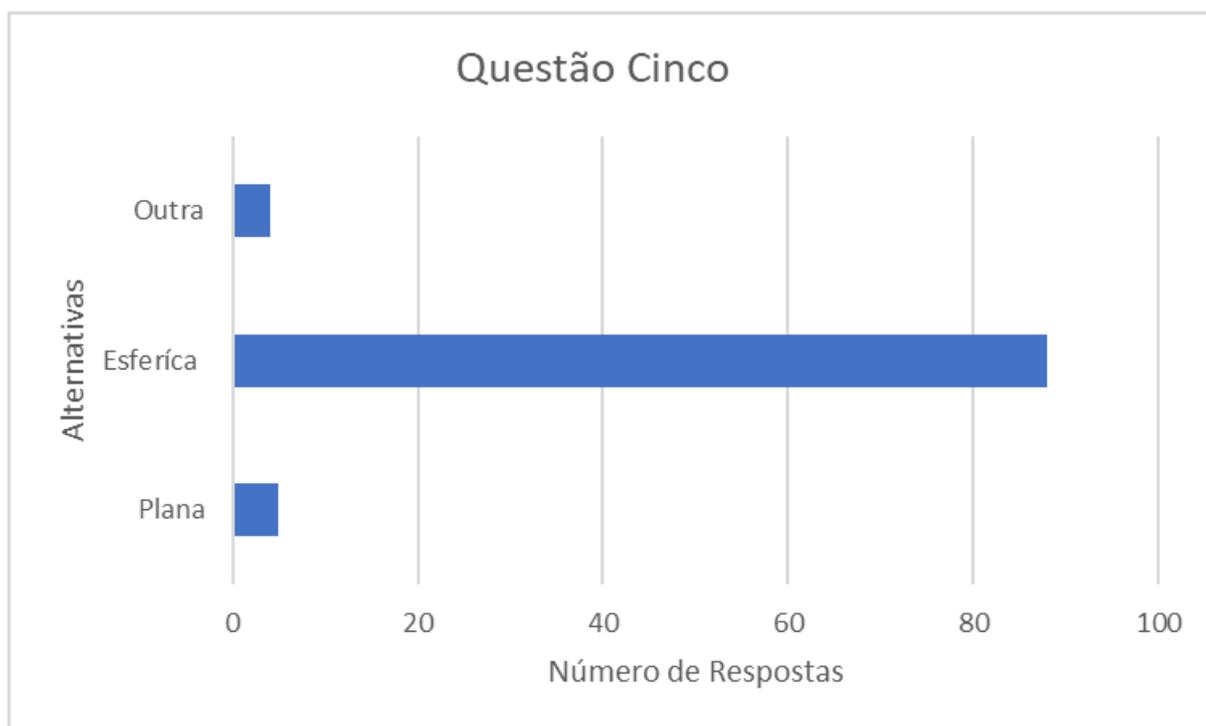
Tabela 5: Questão 5

Questão 5		
Superfícies	Frequência	
	Absoluta	Frequência Relativa
Plana	5	5,15%
Esférica	88	90,72%
Outra	4	4,12%
Total	97	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

A opção pelas barras horizontais surge facilmente com a finalidade de visualização e conclusões acerca do conhecimento dos alunos da superfície que melhor representaria o planeta Terra.

Gráfico 5: Questão 5.



Fonte: Arquivo do Autor.

Nessa perspectiva, a presente variável qualitativa nominal é representada pelo gráfico de barras, no qual descreve a descrição do comportamento da mesma. Outro ponto relevante nesse gráfico é que podemos concluir que o mesmo pode ser chamado de gráfico de colunas, pois as barras estão organizadas horizontalmente.

A quinta questão foi elaborada de modo a possuir um caráter mais provocativo. Cerca de 90% dos alunos, ou seja, 88 alunos, afirmam que a superfície que melhor representa o nosso planeta é a esfera. Daí, como o erro amostral é de 5%, devemos entender que o percentual da população que considera esta resposta está entre 85% e 95%. Em seguida, aproximadamente 4% da amostra, isto é, 4 discentes, escolheram a opção “outra”, e discriminaram qual seria esta outra superfície. Expandido esse resultado para a população, temos que o percentual desta que considera esta resposta está entre 0% e 9%. Algumas das formas citadas foram geóide, elipsóide, elipse. Bem, daí concluímos que 95%, aproximadamente, conhecem ou tem uma ideia da verdadeira forma do nosso habitat celeste; o que chama atenção são os 5,15%, a saber, 5 acadêmicos, que escolheram a opção “Plana”. Do mesmo modo, como o erro amostral é de 5%, temos que interpretar que a quantidade, em porcentagem, que considera tal alternativa está situada entre 0,15% e 10,15%. Por fim, como dito anteriormente, essa questão tem teor provocativo, uma vez que põe em prova o conhecimento geométrico dos humanos em relação com a realidade e nos provoca uma série de indagações. Como uma geometria possível exclusivamente numa superfície plana é válida no mundo, o qual é melhor representado por uma superfície esférica? Os alunos respondentes conseguem expandir seus conhecimentos geométricos para além da sala de aula? O saber geométrico adquirido nas instituições de ensino está em descompasso com a nossa realidade? Enfim, ficam os questionamentos.

Tabela 6: Questão 7.

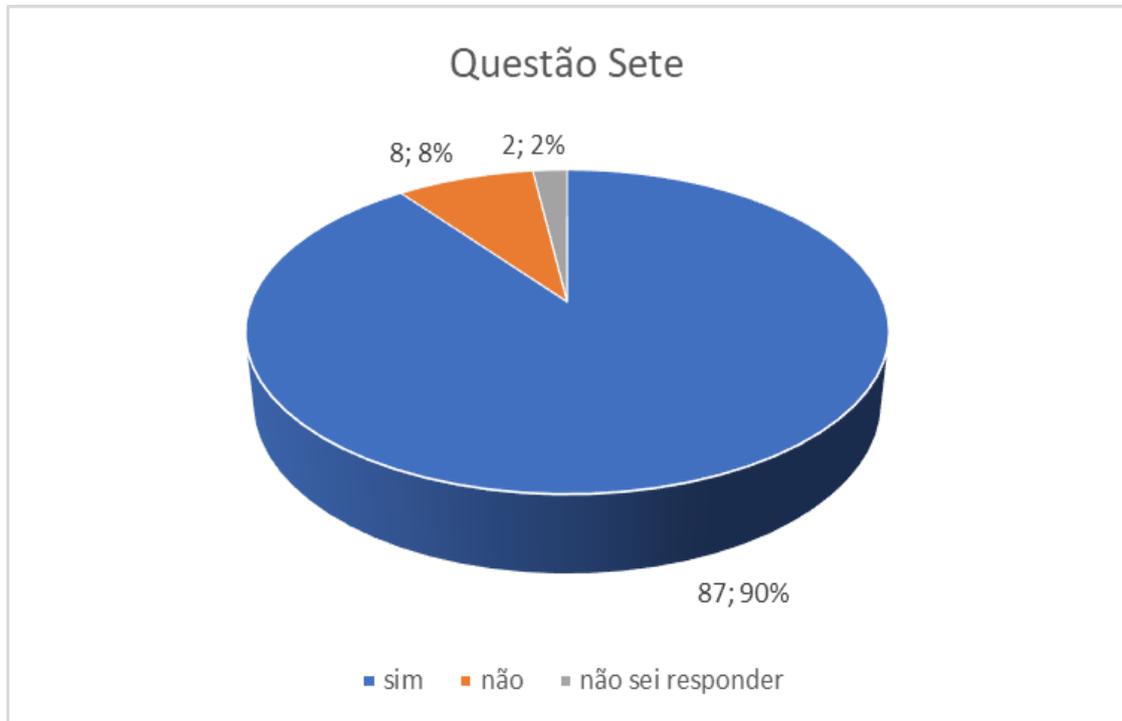
Questão 7		
Alternativas	Frequência absoluta	Frequência Relativa
sim	87	89,69%
não	8	8,25%
não sei responder	2	2,06%
Total	97	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

Mais uma vez escolhemos o gráfico de setores para determinar uma variável qualitativa nominal, pois a preocupação nessa questão está relacionada à compreensão em descobrir o quanto equivale relativamente em formato circular os alunos que conhecem o matemático grego chamado Euclides. Este é o autor do livro "Os Elementos", material no qual ele

fundamenta a teoria da Geometria Euclidiana partindo de axiomas e postulados. Sua notável contribuição para a Matemática foi a utilização do modelo dedutivo-axiomático de construção das teorias da Matemática, método presente no nosso cotidiano.

Gráfico 6: Questão 7



Fonte: Arquivo do Autor.

Bem, uma vez que Euclides é um personagem comum no curso de Licenciatura em Matemática, cerca de 87% dos alunos confirmaram isso, a grandes chances de associarem seu nome com o nome das disciplinas de Geometria Euclidiana da referida universidade, as mesmas são nomeadas como Geometria Euclidiana Plana e Geometria Euclidiana Espacial. Uma vez feita esta ligação já é uma boa pista do porquê da disciplina receber o nome de euclidiana podendo fazer os questionadores chegarem na indagação: existem geometrias além da geometria de Euclides? Vale ressaltar que, como o erro amostral é de 5%, devemos entender que a população, em porcentagem, que conhece Euclides é um valor entre 82% e 92%.

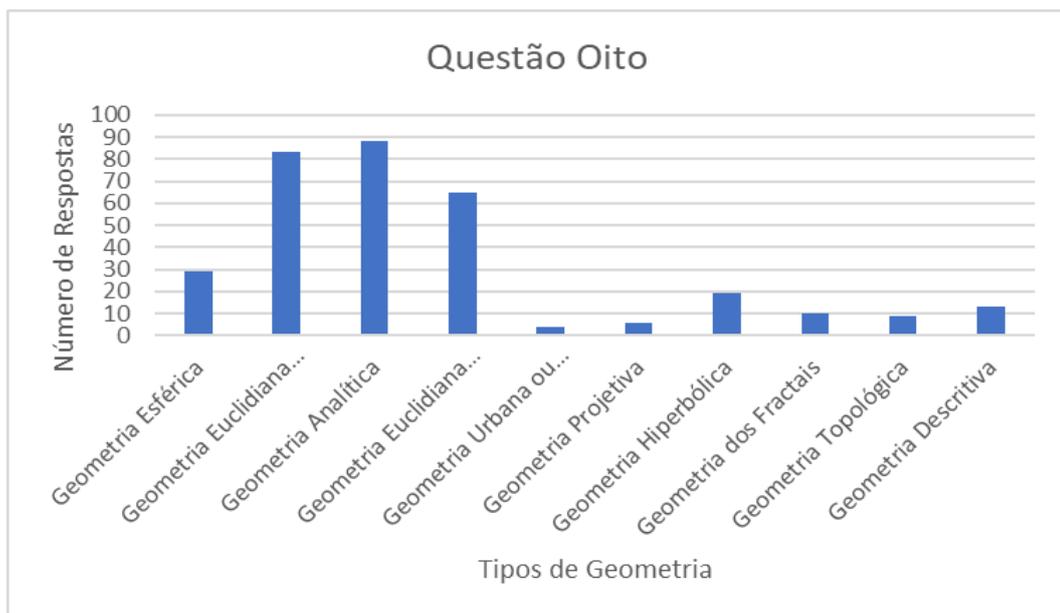
Tabela 7: Questão 8.

Questão 8		
Geometrias	Frequência	
	Absoluta	Frequência Relativa
Geometria Esférica	29	8,90%
Geometria Euclidiana Plana	83	25,46%
Geometria Analítica	88	26,99%
Geometria Euclidiana Espacial	65	19,94%
Geometria Urbana ou do Táxi	4	1,23%
Geometria Projetiva	6	1,84%
Geometria Hiperbólica	19	5,83%
Geometria dos Fractais	10	3,07%
Geometria Topológica	9	2,76%
Geometria Descritiva	13	3,99%
Total	326	100,00%

Fonte: Arquivo do Autor.

O gráfico para determinar os dados será o de barras verticais, no qual representa os dados em relação às geometrias que os alunos conhecem, assim, comparando os tipos de geometrias conhecidas pelos alunos, remetendo em uma visualização facilitada da Variável Qualitativa nominal:

Gráfico 7: Questão 8



Fonte: Arquivo do Autor.

Nisso, o gráfico representa organizadamente a proporcionalidade que acontece entre as barras, sendo as mesmas de acordo com a percepção dos alunos. Como esperado, as três mais escolhidas são as três estudadas durante o ensino fundamental/médio/ superior, que são a Geometrias Euclidianas Plana e Espacial e a Geometria Analítica. Um detalhe que chama a atenção é que a Geometria Analítica foi a mais votada levando o pesquisador a entender que esta amostra poderia entender ou reduzir as Geometrias Euclidianas Planas e Espacial a apenas geometria, assim, não levando em consideração que ela é apenas um dos ramos da área da geometria, evidenciando ainda mais que para os respondentes a Geometria Euclidiana é absoluta. Em seguida, sem nenhuma surpresa, as mais conhecidas pelos alunos são a Geometrias Esféricas e a Geometria Hiperbólica, as teorias mais populares sobre Geometrias Não Euclidianas. Por fim, vêm as últimas 6 alternativas, as quais são outras geometrias mais específicas que a Euclidiana.

Conclusão acerca do desenvolvimento da pesquisa

Segundo os dados obtidos e as conclusões individuais feitas em cada um dos itens do questionário conclui-se que o entendimento de geometria dos discentes do curso de Licenciatura em Matemática da UFNT é predominantemente Geometria Euclidiana, apesar que as conclusões tiradas dos itens 2 e 3 apontam para um conflito de referenciais, uma vez que se esperava a mesma quantidade que respondessem “sim” no item 2 respondessem “sim” no item seguinte. Ainda no item 3, a grande quantidade de respostas “não sei responder” pode nos dar rastros de que eles não conseguem delimitar bem as atividades realizadas nas disciplinas de Geometria Euclidiana, a saber, entender seus conceitos primitivos, sua base axiomática, seus resultados e teoremas possíveis e seu modelo de representação, bem como suas características, deste modo, expandindo seu conhecimento acerca do pensamento geométrico e do fazer matemática como um todo.

Agora existem alguns pontos positivos e negativos quanto ao desenvolvimento deste trabalho. Primeiramente destaca-se que o resultado da presente pesquisa muito provavelmente servirá como um dos argumentos para justificar a escolha do tema de pesquisa da Monografia de um dos autores do mesmo, bem como possivelmente divulgamos acerca da pluralidade do pensamento geométrico para uma parcela considerável dos estudantes do curso. Ainda como ponto positivo, agora no tocante ao desenvolvimento profissional dos pesquisadores, esta atividade veio muito agregar na formação inicial dos mesmos, uma vez que participamos efetivamente na construção desta pesquisa, desde conhecer conceitos fundamentais da pesquisa

estatística como também efetuar cálculo seguro que torna a pesquisa estatística uma ferramenta útil e indispensável para o desenvolvimento de uma sociedade e assim conhecendo e entendendo como que ela e a sua matemática se faz presente em nosso cotidiano. Quanto às dificuldades, acreditamos que foram todas citadas ao longo deste trabalho, a título de recordação, tivemos adversidades no momento de receber os questionários escondidos, tanto é que conseguimos apenas 93 e 107 questionários escondidos, e isso recorrendo ainda há um dado número de suplentes.

Apêndice B

Comunicação Científica

O seguinte trabalho é uma Comunicação Científica submetida, aprovada e apresentada na XIX Semana Acadêmica de Matemática da UFNT. O referido trabalho foi um pequeno vislumbre da presente monografia, mostrando o que foi feito até o momento, a saber 20 de outubro de 2022.

Assim, a Comunicação Científica apresenta um breve contexto histórico sobre o problema da formulação do 5º Postulado; em seguida, a descoberta das Geometrias não Euclidianas, com ênfase na Geometria Hiperbólica; após, dois resultados presentes nessa Geometria, a saber, a congruência dos ângulos do topo do quadrilátero de Saccheri e a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico ser restritamente menor que 180° ; por fim, algumas considerações finais destacando algumas diferenças entre as duas Geometria mencionadas, bem como o quão rico em conteúdos matemáticos é a história e desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas.



Modalidade: Comunicação Científica

Outro tipo de Geometria

Autor: Marcos Danilo Moura Barbosa Campos
Universidade Federal do Norte do Tocantins
danilo.moura@mail.uft.edu.br

Coautor: Alvaro Julio Yucra Hancoo
Universidade Federal do Norte do Tocantins
alvaroyucra@mail.uft.edu.br

Resumo

É comum que ao falarmos de Geometria temos a ideia de círculos, triângulos, quadriláteros, entre outras e seus respectivos estudos. Este trabalho é um recorte oriundo do desenvolvimento de uma monografia produzida durante a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática da UFNT, que possui o propósito de conhecer mais sobre o pensamento geométrico, bem como se há outras geometrias além da euclidiana. Segue um desenvolvimento histórico sobre a primeira Geometria não Euclidiana, bem como teoremas e suas respectivas demonstrações que ilustram a peculiaridade desta geometria, a saber, a Geometria Hiperbólica, em comparação com a Geometria Clássica.

Palavras-chave: Geometria. Geometria não Euclidiana. Geometria Hiperbólica.

1 Introdução

Geralmente ao falarmos de Geometria já nos vem em mente o estudo de objetos matemáticos, tais como círculos, triângulos, entre outros elementos desta natureza. No entanto, há um vasto terreno fértil para aprender e investigar a Matemática que está inserido no campo da Geometria, ou melhor, geometrias, clamando por curiosos.

Começaremos falando sobre o problema a partir do momento em que o matemático conhecido como Euclides de Alexandria ter formulado sua grande obra, *Os Elementos*. No entanto, cerca de dois mil anos depois da teoria de Euclides, alguns estudiosos começaram investigar a respeito da teoria de Euclides sobre a Geometria, mais especificamente, sobre o Postulado das Paralelas, e o que foi descoberto intrigou vários matemáticos propiciando vários debates acerca da natureza da referida disciplina.

Segue um recorte oriundo do desenvolvimento de um Trabalho de Conclusão de Curso, trabalho este que ainda está em andamento, que vem a debater sobre o conhecimento geométrico em geral, norteado pela pergunta: há outra geometria que não seja a Geometria Euclidiana e suas derivadas?

O presente trabalho é composto pelos seguintes tópicos: **Evolução do Problema**, no qual será discorrido sobre o surgimento do referido problema e como ele foi tratado ao



decorrer do tempo até chegar nos dias atuais; **Descoberta das Geometrias não Euclidianas**, subtítulo no qual será falado sobre os fundadores deste novo objeto dentro da Geometria; logo em seguida, trazemos alguns **teoremas** provenientes especificamente desta teoria; e, por fim, **Considerações Finais**, no qual apresentamos algumas considerações importantes a respeito do exposto.

2 Evolução do Problema

Na grande obra de Euclides, *Os Elementos*, encontramos 10 afirmações, sendo divididas em 5 axiomas, que dizem respeito às ciências em geral, e 5 postulados, estes voltados para a Geometria. Com exceção do 5º Postulado, os outros quatro possuem a característica de compreensão simples que são dados como auto-evidentes. Neste atributo estava, pensava Euclides, o triunfo da axiomática da sua obra. Transcrevemos aqui o 5º Postulado a fim de mostrar ao leitor o porquê dele ser a exceção entre os outros postulados existentes:

P5 se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontraram no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos. EVES (2004, p.180).

Como visto, este postulado não cumpre com a característica de auto-evidência e necessita de um certo entendimento geométrico para que o leitor o aceite como uma verdade. Por conta dessa e outras peculiaridades, pessoas de todas as eras se lançaram a investigar o porquê dessas intrigantes questões que orbitam o Postulado das Paralelas.

Assim sendo, os matemáticos Claudius Ptolomeu e Proclus Diadochus possuíam uma opinião controversa para tal postulado e propuseram algumas provas para o mesmo a partir dos quatro outros postulados. O resultado de suas demonstrações consistiu em usar uma proposição equivalente ao Postulado das Paralelas para provar o próprio postulado, o que não é aceitável.

Por sua vez, a investigação sobre o 5º Postulado, que desencadearia a descoberta das Geometrias não Euclidianas, ganhou um importante avanço com a contribuição do matemático árabe Nasir Eddin. Dentre suas contribuições, destacamos a Hipótese do Ângulo Agudo, Hipótese do Ângulo Reto e Hipótese do Ângulo Obtuso.

Já na faixa de tempo conhecida como Idade Média surge um professor universitário, que passou pela Ordem Jesuíta, conhecido como Girolamo Saccheri, na sua publicação,



Euclides Livre de Toda Imperfeição, Saccheri se vale da redução ao absurdo na tentativa de demonstrar o intrigante postulado. Segundo Arcari (2008), Saccheri foi o primeiro a usar este meio para demonstrar o referido postulado. Para sua demonstração, ele concebe um quadrilátero birretângulo¹, Segundo Eves (2004 p. 540), a intenção de Saccheri era mostrar que a hipótese do ângulo agudo e a hipótese do ângulo obtuso levam a contradições, deste modo, de acordo com o método de redução ao absurdo, seria válido a hipótese do ângulo reto, hipótese a qual resultaria na prova do Postulado das Paralelas.

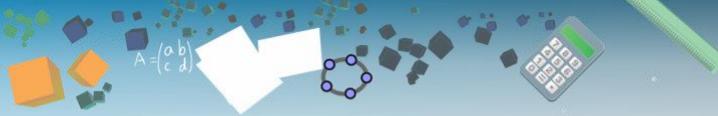
Como veremos posteriormente, esta contradição não existe, porém, uma vez que Saccheri estava tão obstinado em provar o Postulado de Euclides, ele realizou conclusões equivocadas na argumentação da suposta contradição presente na hipótese do ângulo agudo. No entanto, esse equívoco na contradição da hipótese do ângulo agudo persistiu nos sucessores de Saccheri. Dentre eles está o matemático Suíço Johann Heinrich Lambert. Ele investigou o problema através de um quadrilátero trirretângulo, o qual era a metade de um Quadrilátero de Saccheri, e aplicou as mesmas três hipóteses para o quarto ângulo. Outro sucessor foi o matemático francês Adrien-Marie Legendre, sua maior contribuição está em ter popularizado o problema do Postulado das Paralelas nas várias edições do seu livro *Eléments de Géométrie*.

Por fim, temos que registrar a contribuição do matemático e físico John Playfair, sua contribuição foi uma reformulação equivalente ao Postulado das Paralelas que diz: “por um ponto fora da reta pode se traçar uma única reta paralela a reta dada”. O Postulado de Playfair se relaciona bem com as hipóteses do ângulo agudo, ângulo reto e ângulo obtuso; adaptando a expressão de Playfair com as três hipóteses obtemos a seguinte conjectura: *por um ponto fora de uma reta pode se traçar mais do que uma, apenas uma ou nenhuma reta paralela a reta dada*.

3 Descoberta da Geometria não Euclidiana

Foram três grandes matemáticos que descobriram de forma independente a Geometria que há nos desdobramentos da hipótese do ângulo agudo, são eles: Gauss, Janos Bolyai e Nicolai Lobachevsky. Por conta de Gauss não ter nada oficialmente publicado sobre essa temática, iremos focar nos outros dois. Eles investigaram o problema do Postulado de Euclides a partir do Postulado de Playfair adaptado, como comentado anteriormente.

¹ Um quadrilátero $ABCD$ onde os ângulos da base são retos (nos vértices A, D), os ângulos superiores são congruos (no vértices B, C) e os segmentos AB e CD possuem a mesma medida.



Janos Bolyai, após estudar e compreender a questão das paralelas, tão logo percebeu a impossibilidade de provar como teorema o referido postulado, partiu para explorar os inusitados resultados da Geometria que emergia da hipótese do ângulo agudo. Bolyai divulga oficialmente seu trabalho sobre a nova Geometria na forma de apêndice no livro do seu pai sobre Matemática Elementar.

Os artigos sobre a Geometria não Euclidiana escritos por Lobachevsky foram oficialmente publicados alguns anos antes do trabalho de Bolyai, no entanto, por conta da língua utilizada na escrita do seu trabalho, aliada à dificuldade de trânsito de informações, bem como o caráter estranho dos resultados, os artigos do russo foram completamente ignorados pela comunidade acadêmica local e global. Porém, ele não se deu por vencido e persistiu em suas descobertas para que estas ganhassem o merecido reconhecimento. Finalmente em 1855, um ano antes de sua morte, Lobachevsky publicou na língua francesa, Pangeometria, sua obra mais completa sobre o assunto. Essa obra foi ditada por Lobachevsky, pois ele já se encontrava cego e debilitado.

4 Alguns Resultados desta Nova Geometria

Seguem dois teoremas e suas respectivas demonstrações que ilustram a peculiaridade desta Geometria, a saber, a Geometria Hiperbólica, em comparação com a Geometria Clássica. Vale lembrar que os axiomas desta geometria são os mesmos da Geometria Euclidiana, diferindo apenas quanto ao Postulado das Paralelas, em que dito postulado, é negado, a saber: *por um ponto fora de uma reta pode se traçar mais do que uma reta paralela a reta dada.*

O primeiro se refere à possibilidade de existência da figura que foi possível derivar resultados desta geometria diferente, por sua vez, o segundo é um resultado que ocorre dentro de um dos elementos desta teoria. Os seguintes resultados podem ser encontrados na referência Viera (2018).

Teorema 1 Os ângulos do topo de um Quadrilátero de Saccheri são congruentes.

Demonstração: Seja $ABCD$ um Quadrilátero de Saccheri, primeiramente, trace uma diagonal a outra BD . Deste modo, temos AD pertencente ao triângulo BAD e AD pertencente ao triângulo CAD . Pela hipótese, sabemos que os ângulos BAD e CDA são côngruos. Uma vez que AD pertence ao triângulo BAD e AD pertence ao triângulo CAD e, pela hipótese, $BA \equiv CD$, então temos um caso de semelhança de triângulos do tipo *lado-ângulo-lado*.



Logo, $AC \equiv BD$. Vejamos agora os triângulos DBC e ABC . Temos BD pertencente a DBC e BD pertencente a ABC . Também temos BD congruo AC . Deste modo, temos $AC \equiv BD$ pertencente a DBC e $BD \equiv AC$ pertencente a ABC . Por fim, temos BC pertencente a DBC e BC pertencente a ABC . Pelo caso de semelhança de triângulos *lado-lado-lado*, concluímos que ABC é semelhante ao DBC e, portanto, $DCB \equiv ABC$.

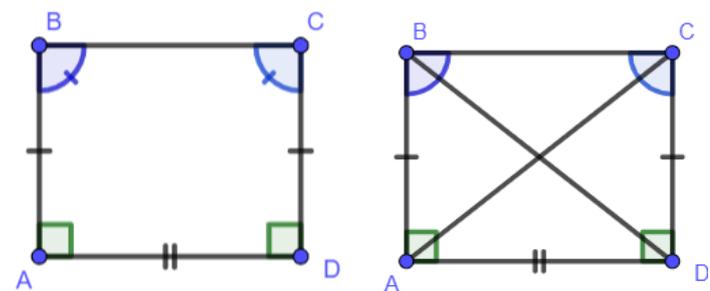


Figura 1 – Congruência dos ângulos superiores de um Quadrilátero de Saccheri.

Teorema 2 Todo triângulo em Geometria Hiperbólica tem a soma dos ângulos internos menor que 180°

Demonstração: Dado um triângulo ABC , aplicamos o Teorema de Saccheri-Legendre², temos que $a + b + c \leq 180^\circ$. A afirmação $a + b + c = 180^\circ$ é possível somente com o Postulado das Paralelas. No entanto, afirmar isto é afirmar o Postulado das Paralelas de Playfair. Não podemos manter resultados contraditórios como verdadeiros, então concluímos que para a Geometria Hiperbólica essa afirmativa é falsa. Daí está a afirmativa verdadeira, $a + b + c < 180^\circ$. Portanto, os triângulos na Geometria Hiperbólica só podem ter a soma dos seus ângulos internos menores que 180° .

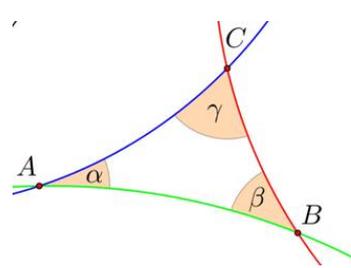


Figura 2 – Triângulo na Geometria Hiperbólica.

5 Considerações Finais

²O teorema diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo é no máximo 180° .



Diante do exposto, notamos que a Geometria Hiperbólica é diferente da Geometria Euclidiana. Entre suas diferenças temos a soma dos ângulos internos da Geometria Hiperbólica ser estritamente menor que 180° , temos também a impossibilidade de haver quadrados nesta geometria e a existência de várias paralelas num ponto fora de uma reta dada são fatos que merecem destaque.

Na Geometria Euclidiana, por sua vez, a soma dos ângulos internos dos triângulos é exatamente igual à 180° , existem quadrados e por um ponto fora de uma reta há apenas uma paralela à referida reta que passa por este ponto.

Estudar sobre as Geometrias não Euclidianas pode propiciar um contato com diversas faces do que se refere à Matemática. Foi visto sobre o funcionamento da axiomática, sobre História da Matemática, sobre as linhas filosóficas da Matemática, em especial o logicismo matemático, entre outros assuntos tangentes.

Por fim, vale destacar que as Geometrias não Euclidianas não possuem a intenção de negar a existência e validade da Geometria Euclidiana, mas sim de ampliar a compreensão e entendimento a respeito do que entendemos por Geometria, ou seja, venho para complementar o pensamento geométrico.

Referências

ARCARI, Inedio. **Um Texto de Geometria Hiperbólica**. Biblioteca Digital da Unicamp.Campinas. São Paulo. 2008.

COUTINHO, L. **Convite às Geometrias Não-Euclidianas**. 2 a. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência. 2001.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 4º ed. Campinas, SP: Unicamp, 2004. p. 844. Título original: Introduction to the History of Mathematics.

VIEIRA, Juliano Vergna. **OS QUADRILÁTEROS DE SACCHERI E O SURGIMENTO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA**. 2018. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências.