UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CENTRO DE CIÊNCIAS INTEGRADAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAYANE SILVA DE SOUSA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO E AMPRENDIZAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Araguaína/TO

2022

MAYANE SILVA DE SOUSA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO E AMPRENDIZAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, Centro de Ciências Integradas, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio dos Santos Carneiro

Araguaína / TO

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S725h Sousa, Mayane Silva de.

História da Matemática como recurso metodológico no ensino e aprendizagem dos Números Complexos. / Mayane Silva de Sousa. – Araguaína, TO, 2022.

42 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.

Orientador: Rogerio dos Santos Carneiro

1. Números Complexos. 2. História da Matemática. 3. Proposta Didática . 4. Análise Textual Discursiva . I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MAYANE SILVA DE SOUSA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO METODOLÓGICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Norte do Tocantins - UFNT, Centro de Ciências Integradas – CCI/Cimba, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Aprovada em 13 de dezembro de 2022.

Banca examinadora

Prof. Dr. Rogerio dos Santos Carneiro
Orientador/UFNT

Prof.ª Dr.ª Renata Alves da Silva
Examinadora/UFNT

Prof. Me. Ricardo Sousa Santos
Examinador/UFNT

Araguaína / TO

2022

Dedico este trabalho a todos que sempre me apoiaram e acreditaram no meu sonho. Em especial, meu pai Domingos Fernandes de Sousa, minha mãe Cleudene Vieira da Silva, e meus irmãos, Mayara Silva de Sousa, Moisés Vieira de Sousa e Marta Vieira de Sousa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela minha vida e por todas as bênçãos que ele me concedeu até aqui, agradeço por nunca ter me deixado sozinha e sempre ter me dado forças para chegar aonde cheguei. Agradeço também a minha família, pois sem eles, esse sonho não seria possível. Agradeço a minha mãe, dona Cleudene, pelas inúmeras orações que ela fez em prol do meu sonho, agradeço pelas palavras de incentivo e por todo apoio que ela me deu em todos esses anos. Agradeço ao meu pai, seu Domingos, mais conhecido como Gaguim, por ser meu exemplo de pessoa e por ter estado ao meu lado, sem ressalvas e sempre pronto para me ajudar, agradeço também, meus irmãos, que juntos formamos o “Bonde dos 4 Ms", minhas irmãs Mayara e Marta e meu querido irmão Moisés, obrigado por tudo, minhas conquistas são de vocês também.

Agradeço minha amiga Jéssica Aline de Oliveira Santos, por todo apoio, incentivo e especialmente por ser meu ombro amigo nesse processo, por sempre ouvir minhas queixas, tristezas, desilusões, conquistas e sempre, sempre vibrar comigo em todos os momentos que passei até aqui, muito obrigado. Ainda, agradeço a minha amiga e colega de curso Soliane Alves da Silva, por ter sido uma surpresa para mim, pois nela encontrei o apoio que nunca pensei que encontraria, nela encontrei a solução para muitos problemas, serei sempre grata por toda sua ajuda e parceria. Agradeço, ao meu parceiro e amigo, Rodrigo da Silva Leite, pelo companheirismo, compreensão e por sempre, incondicionalmente, me apoiar em todos os meus projetos.

Agradeço, aos meus professores da Educação Básica, Luiz Moraes e Jerse Vidal por me apresentarem a Universidade Federal do Tocantins e terem contribuído para o início deste sonho, e em especial, minha querida e eterna professora Elaine Mattos, te agradeço Elaine, por ter me incentivado e por ter me mostrado o quão lindo e fascinante é o mundo da Matemática, por ter me inspirado e por ser meu exemplo de ser humano e de como ser uma professora de Matemática incrível, te agradeço imensamente.

Ademais, agradeço meus professores do Curso de Licenciatura em Matemática, em especial, meu orientador Rogerio dos Santos Carneiro, por ter me apresentado a História da Matemática e ter contribuído na escolha do tema e estrutura desse trabalho, obrigado por todo apoio e ajuda que sr. me deu até aqui. Agradeço minha maravilhosa professora Renata Alves da Silva, um exemplo de professora e de ser humano, você foi a solução de muitos problemas, sempre paciente, atenciosa e prestativa, sem você esse projeto não seria realizado, obrigado por todo incentivo, você é incrivelmente incrível. Ademais, não poderia deixar de agradecer a Universidade Federal do Norte do Tocantins, por ter propiciado uma das melhores fases da minha vida, obrigado.

RESUMO

A História da Matemática como um instrumento didático pode trazer contribuições importantes para o ensino da Matemática, à vista disso, esse trabalho tem como objetivo principal sobrepujar a importância do ensino e da aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica, culminando na formulação de uma proposta didática com o uso metodológico da História da Matemática. Ademais, atrelado a esse objetivo, esse trabalho busca responder algumas indagações, a saber: De que maneira a História da Matemática pode ser usada como um recurso auspicioso na concepção de uma proposta didática que promova à construção das noções matemáticas pelos estudantes durante a aprendizagem dos Números Complexos? E ainda, como se deu o surgimento dos Números Complexos? E de que forma os elementos históricos que compreendem esse fato aparecem nos livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio? Para isso, foi utilizado como metodologia as pesquisas qualitativa, descritiva e bibliográfica com apoio da Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi (2011). Dessa forma, ao fim da pesquisa pode-se destacar a importância da História da Matemática no ensino e aprendizagem dos Números Complexos, bem como o seu uso nos livros didáticos com o objetivo de contextualizar e atribuir significados em torno do conteúdo trabalhado.

Palavras-chaves: Números Complexos. História da Matemática. Proposta Didática.

ABSTRACT

The History of Mathematics as a teaching tool can bring important contributions to the teaching of Mathematics, in view of this, this work has as its main objective to overcome the importance of teaching and learning Complex Numbers in Basic Education, culminating in the formulation of a didactic proposal with the methodological use of the History of Mathematics. In addition, linked to this objective, this work seeks to answer some questions, namely: How the History of Mathematics can be used as an auspicious resource in the conception of a didactic proposal that promotes the construction of mathematical notions by students during the learning of the Complex numbers? And yet, how did the emergence of complex numbers? And how do the historical elements that comprise this fact appear in the textbooks of the 3rd year of high school? For this, qualitative, descriptive and bibliographical research was used as a methodology with the support of Textual Discursive Analysis by Moraes and Galiazzi (2011). Thus, at the end of the research, the importance of the History of Mathematics in the teaching and learning of Complex Numbers can be highlighted, as well as its use in textbooks with the objective of contextualizing and assigning meanings around the worked content.

Key-words: Complex Numbers. History of Mathematics. Didactic Proposal.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática sempre foi considerada uma disciplina complexa e difícil, ganhando assim, algumas críticas como afirmado por Motta e Ferreira (2007, p. 9): “historicamente, a Matemática vem sendo apresentada com um amontoado de fórmulas e teoremas que o aluno tem que decorar para a prova, não se conhecendo a história daquele conteúdo com o qual estamos tendo contato em sala de aula”. Dessa forma, o uso da História da Matemática como instrumento metodológico no ensino dessa disciplina, possibilita outra forma de ver e entender a matemática, contribuindo na compreensão da herança cultural, da evolução humana e aumentando assim, o interesse dos alunos.

Além disso, o conhecimento histórico de um determinado tema, não só é importante para o professor, como também para os alunos, pois ao utilizarem uma perspectiva histórica durante o ensino dessa disciplina, há a possibilidade de responder alguns “porquês" que surgem durante o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Além, de analisar e discutir as razões que levaram a aceitação de determinados fatos, raciocínios, procedimentos e ideias matemáticas (PARANÁ, 2008, p. 65). Ainda, o uso da História da Matemática como um recurso metodológico se faz importante, uma vez que ela tende a representar um contexto significativo para aprender e ensinar matemática (BRASIL, 2018, p. 298). Pois, além de trabalhar datas e fatos marcantes que contribuíram para o surgimento dos conceitos matemáticos, ela proporciona um desenvolvimento mais amplo acerca dos mesmos, como evidência Farago (2003, p. 17) ao afirmar que a História da Matemática "permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura”.

Consoante a isso, esta pesquisa tem como objetivo geral, sobrepujar a importância do ensino e da aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica, culminando na formulação de uma proposta didática com o uso metodológico da História da Matemática. Ainda, como objetivos específicos, esse trabalho busca compreender e apresentar o contexto histórico que envolve o surgimento e reconhecimento dos Números Complexos até a sua representação geométrica, além, de analisar como a história dos Números Complexos está presente nos livros Matemática Paiva (2009) do autor Manoel Paiva, Matemática: ciência e aplicações (2010) dos autores dos autores Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida, e o livro Matemática: contexto e aplicações (2016) do autor Luiz Roberto Dante, partindo do pressuposto que, “como alguém pode ensinar Números Complexos sem conhecer o seu desenvolvimento histórico?” (STAMATO, 2003, p. 12), da mesma forma, como alguém pode compreender os Números Complexos sem conhecer esse desenvolvimento?

Assim, a História da Matemática pode ser uma grande aliada no ensino e aprendizagem dos variados conteúdos que compreende a disciplina de matemática (MENDES, 2009, p.79). Logo, pensando no ensino dos Números Complexos nos anos finais da Educação Básica, essa ferramenta metodológica pode ser uma facilitadora no ensino deste conteúdo, contribuindo para o enriquecimento da aprendizagem dos alunos. Dessa maneira, este trabalho busca responder a seguinte questão: De que maneira a História da Matemática pode ser usada como um recurso auspicioso na concepção de uma proposta didática que promova à construção das noções matemáticas pelos estudantes durante a aprendizagem dos Números Complexos? Ademais, no desenvolvimento dessa pesquisa, esse problema se abre e surgem outras indagações, a saber: Como se deu o surgimento dos Números Complexos? E de que forma os elementos históricos que compreendem esse fato aparecem nos livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio?

Portanto, este trabalho se justifica na insigne importância do uso da História da Matemática como um instrumento metodológico no ensino e aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica. Uma vez que, este instrumento tende a promover o pensamento crítico e independente dos estudantes, contribuindo com a desmistificação da matemática, visto que a história revela a falsa ideia de que a matemática está pronta e acabada, promovendo assim, a formalização de conceitos matemáticos que envolvam os Números Complexos e também, serve como fonte de métodos pedagogicamente adequados, objetivos didáticos a serem atingidos pelos alunos e motivação no ensino e aprendizagem desses números (MIGUEL, 2009, p. 75-85).

Outrossim, este trabalho, quanto à sua abordagem se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, uma vez que não se está interessado em enumerar ou medir os dados e sim em descrevê-los para depois estabelecer as interpretações do fenômeno em estudo, como exposto por Gerhardt e Silveira (2009, p.33) ao afirmarem que a pesquisa qualitativa "não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização etc". Dessa forma, a pesquisa qualitativa possui aspectos essenciais que a difere da pesquisa quantitativa. Esses aspectos consistem "na escolha adequada de métodos e teorias convenientes; no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos" (FLICK, 2009, p. 23). Em consequência disso, esse tipo de pesquisa possibilita interpretações mais amplas acerca do tema em questão, o que promove uma análise mais detalhada dos dados.

Agora, do ponto de vista dos objetivos dessa pesquisa, a mesma se refere a pesquisa descritiva que "têm como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relações entre variáveis" (GIL, 2002, p. 42). Logo, para tal descrição esse tipo de pesquisa possui técnicas padronizadas e específicas de coleta de dados, como o uso de questionários, entrevistas, levantamento de dados, análise de documentos, observação sistemática entre outras. Assim, nessa pesquisa "o pesquisador precisa saber exatamente o que pretende com a pesquisa, ou seja, quem (ou o que) deseja medir, quando e onde o fará, como o fará e por que deverá fazê-lo" (MATTAR, 2001, p. 23). Uma vez que, essa clareza facilitará na escolha da(s) técnica(s) de coleta de dados que propiciará os resultados desejados quanto aos objetivos da pesquisa.

Por fim, do ponto de vista dos procedimentos técnicos que deram suporte para o desenvolvimento da pesquisa e do problema da mesma, foi utilizado a pesquisa bibliográfica, através da revisão bibliográfica de artigos, livros, dissertações e monografias que abordam a História da Matemática e os Números Complexos. Dessa forma, a pesquisa bibliográfica, de acordo com Gil (2002, p. 44), é construída principalmente sob a base de livros e artigos científicos, que fornecem "subsídios para o conhecimento sobre o que foi pesquisado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto apresentado na literatura científica" (BOCCATO, 2006, p. 266), ou seja, uma espécie de "varredura" da literatura existente que trata dos assuntos em questão.

À vista disso, segundo Andrade (2010, p. 25), esse é o primeiro passo e uma das etapas fundamentais para a concepção de uma pesquisa científica, onde envolve um conjunto de procedimentos metodológicos necessários para a realização adequada das etapas desse momento. Ademais, este primeiro passo influenciará todas as etapas da pesquisa, "na medida que der o embasamento teórico em si resultará o trabalho" (AMARAL, 2007, p.1). É por meio dela que, foi possível construir uma proposta didática sobre os Números Complexos com o uso metodológico da História da Matemática e juntamente com os pressupostos da Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi (2011) que se constituiu uma análise de três livros didáticos referentes ao 3º ano do Ensino Médio, que teve como intuito de destacar, descrever e comparar os elementos históricos presentes nesses livros sobre os Números Complexos. Portanto, estruturamos esta monografia em quatro capítulos dispostos como segue.

No capítulo 2, está descrito o contexto histórico que envolve o surgimento e reconhecimento dos Números Complexos até a sua representação geométrica, já no capítulo 3, além da apresentação da Análise Textual Discursiva (ATD) de Moraes e Galiazzzi (2011), se encontra uma análise de três livros didáticos que tem como finalidade, destacar, descrever e comparar os elementos históricos presentes nesses livros acerca dos Números Complexos. Assim, resultando do estudo teórico que desenrolou-se, no capítulo 4 se encontra um estudo acerca da História da Matemática no Ensino, além de uma proposta didática sobre os Números Complexos com o uso metodológico da História da Matemática, constituída por cinco atividades, divididas em dois momentos distintos, que tem como finalidade auxiliar o professor de matemática no ensino introdutório dos Números Complexos, trabalhando em suas atividades, as equações que deram subsídios para o descobrimento desses números e atividades práticas que possam contribuir na compreensão da unidade imaginária desse conjunto.

2 UMA ABORDAGEM HISTÓRICA ACERCA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A maioria dos matemáticos ao longo da história sempre tiveram uma grande paixão nas resoluções de equações polinomiais e esse fato contribuiu de forma primordial para o surgimento e aceitação dos Números Complexos. Especificamente, isso ocorreu devido as tentativas e falhas dos antigos matemáticos italianos no início do século XVI, nas resoluções algébricas de equações cúbicas (STRUIK, 1987, p. 144). Entretanto, não foram nessas tentativas e falhas que os Números Complexos se apresentaram pela primeira vez aos matemáticos, de acordo com Mendes e Chaquiam (2016, p. 47). O primeiro matemático que se deparou com uma raiz quadrada de um número negativo foi Heron de Alexandria (séc. I d. C.), que ao tentar calcular o volume de um tronco de uma pirâmide quadrada no Egito Antigo (3100 a.C. – 30 a.C.) teve como resultado a $\sqrt{-63}$, e este é o primeiro registro conhecido de uma raiz quadrada de um número negativo.

Dessa forma, mesmo com a existência e aparição desses números, os antigos matemáticos durante séculos consideravam trabalhar com tais resultados um absurdo, coibindo a aceitação desses números, e isso só mudou com uma das práticas mais antigas no campo da matemática, que são os duelos matemáticos, uma prática bem comum na Europa do século XVI (CENDRON, 2021, p. 14). Analogamente, esses duelos também ocorrem nos dias atuais, como por exemplo, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP), Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), Olimpíada Ibero-Americana de Matemática (OIM), Olimpíada de Matemática do Cone Sul, European Girl's Mathematical Olympiad (EGMO), Olimpíada de Matemática dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP), Canguru de Matemática Brasil entre outros.

Assim, centralizando nos duelos que ocorriam na Itália e focando ainda mais nos alunos da Universidade de Bolonha e nos matemáticos italianos do século XVI, pode-se ter uma visão ampla sobre a aceitação dos Números Complexos através de uma nova teoria matemática desenvolvida pelos matemáticos italianos que até então, não tinha sido explorada pelos antigos árabes e gregos, ou seja, a teoria que conduziu às soluções algébricas gerais de equações cúbicas (STRUIK, 1987, p. 144).

Deste modo, a história dos Números Complexos pode ser compreendida como um conjunto de contribuições de diferentes matemáticos ao longo da história, principalmente os matemáticos italianos, como Scipione del Ferro (1465 – 1526), Niccollo Fontana (1500 – 1557), Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526 – 1572). Além desses matemáticos italianos, outros nomes importantes da história da matemática também se destacaram nesse processo, são eles: John Wallis (1616 – 1703), Euler (1707 – 1783), Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean-Robert Argand (1768 – 1822), Gauss (1777 – 1855).

A Itália da renascença foi um lugar onde a política e a violência se destacaram fortemente, favorecendo o florescimento da arte, da ciência e com a invenção da imprensa a matemática também floresceu (STEWART, 2013, p. 63). Dessa forma, com a invenção da imprensa começaram a ser publicados livros sobre o ensino da matemática e suas aplicações comerciais, espalhando a arte por toda parte (STRUIK, 1987, p. 145). Nesse cenário, o primeiro grande livro de matemática publicado nessa época foi escrito por Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 – 1517), um frade franciscano e um renomado matemático italiano que ficou conhecido como o pai da contabilidade moderna. Este livro foi descoberto em 1494, sob o nome de *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalit*a, contendo 600 páginas (STRUIK, 1987, p. 145).

Nessas 600 páginas continha tudo o que era conhecido naquela altura sobre aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Assim, "Pacioli terminou o seu livro com a observação de que as soluções das equações que na nossa notação atual se escrevem $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ parecia tão impossível no estado da ciência de então quanto a quadratura do círculo" (STRUIK, 1987, p. 145), onde essas equações não necessariamente possuem coeficientes iguais, mas também podem ser escritas com outros coeficientes, como $x^3 + px = q$ e $x^3 + q' = p'x$. Assim, por meio dessa observação os matemáticos da Universidade de Bolonha na Itália iniciaram alguns trabalhos em busca da solução geral para esse tipo de equação, a equação cúbica. Assim, os gregos e os orientais já haviam resolvidos alguns casos numericamente, contudo, os matemáticos bolonheses se interessavam em uma solução geral para todos os tipos em que podiam ser reduzidas as equações cúbicas, que são: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ (STRUIK, 1987, p. 146).

Nesse contexto, o matemático Scipione del Ferro foi o grande responsável por conseguir resolver todos os tipos de equações cúbicas. No entanto, não foi publicado por ele, mas Scipione falou a poucos amigos sobre as soluções que encontrou (STRUIK, 1987, p. 146). Como resultado desse feito, em 1535 Antonio Fior discípulo de Scipione e Niccollo Fontana, conhecido principalmente como Tartaglia, iniciaram um duelo público que consistia na resolução de equações cúbicas, onde cada um apresentava uma equação para o outro resolver. Contudo, Fior só sabia resolver um tipo de equação, já Tartaglia conhecia outro diferente e antes da competição, ele descobriu como resolver todos os tipos de equações cúbicas, o que contribuiu para sua grande vitória (STEWART, 2013, p. 241).

Esse duelo foi tão significativo, que o ilustre médico, astrólogo, filósofo e matemático Girolamo Cardano percebeu que Fior e Tartaglia poderiam ser de grande importância para o seu novo livro, pois os dois sabiam resolver cúbicas. Assim, sabendo dos benefícios de obter esse método, Cardano pediu para que Tartaglia o revelasse, e assim ele fez. Contudo, ele pediu para que Cardano não publicasse tal método, o que não ocorreu, pois em 1545 o publicou em seu famoso livro Ar*s Magna* (DANTE,2016, p. 174), onde traduzido para a língua portuguesa, leva o título de "A grande arte", que se refere a união de todas as ideias algébricas mais avançadas daquele tempo (STEWART, 2013, p. 65). Em virtude disso, Tartaglia acusou Cardano de plágio, mas ele possuía uma boa desculpa, pois em 1543 ao viajar para Bolonha descobriu alguns papéis com as resoluções dos três tipos de equações cúbicas referente ao feito de Scipione, o que levou Cardano a alegar que estava publicando o método de Spicione e não de Tartaglia (STEWART, 2013, p. 241).

Dessa forma, Cardano em seu livro Ar*s Magna*, publicou a solução geral para esse tipo de equação, a qual ficou conhecida como a "Fórmula de Cardano", que para o caso de $x^3 + px = q$, toma a seguinte forma: $x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Assim sendo, ao longo de seu livro, Cardano se deparou com um obstáculo, pois apesar dessa fórmula funcionar brilhantemente, apareciam resultados perturbadores que não podiam ser ignorados, já que além de existir raízes quadradas de números negativos, Cardano também se deparou com raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas. Dessa forma, quando nas equações de grau 2 apareciam raízes quadradas de números negativos, era notável que esse fato indicava que não existiam soluções, contudo, o fato mais enigmático da fórmula de Cardano é que há equações cúbicas com soluções reais conhecidas, mas cuja solução passava por raízes quadradas de números negativos (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 4).

Para exemplificar esse fato, pega-se a equação $x^3 = 15x + 4$, no qual existe uma solução perfeita, $x = 4$ e aplicando a fórmula de Cardano chega-se ao seguinte resultado: $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. No entanto, -121 é um número negativo que não possui raiz quadrada. Assim, Cardano apesar de não conseguir resolver tal enigma, também considerou os números negativos, chamando-lhes de fictícios, esse caso no qual há três raízes reais que aparecem como somas ou diferenças daquilo que agora chama-se de Números Complexos, ficou conhecido com o "caso irredutível da equação cúbica" (STRUIK, 1987, p. 146). Todavia, apesar de Cardano não ter resolvido esse mistério, essa dificuldade foi resolvida pelo último e grande matemático bolonhês do século XVI Rafael Bombelli. Ele foi o primeiro matemático a aceitar a existência desses números fictícios, onde suas habilidades de trabalhar com esses números foi tão significativa que ele conseguiu resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ (JÚNIOR, 2009, p. 27).

Essa luz dada por Bombelli se deu através de sua grande obra *L'Algebra* (Álgebra), um livro que teve como principal objetivo clarificar o livro Ar*s Magna* de Cardano. Essa obra permitiu que os Números Complexos perdessem essa característica de sobrenatural e junto com este livro e um manuscrito sobre geometria, escrito por volta de 1550, Bombelli conseguiu introduzir uma teoria densa sobre os Números Complexos, embora a aceitação total desses números datar do século XIX (STRUIK, 1987, p. 147-148). Dessa maneira, quando Bombelli em seu livro se deparou com o enigma encontrado por Cardano, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, ele conseguiu enxergar o que tinha passado desapercebido por Cardano e por outros matemáticos.

Assim, Bombelli utilizando a fórmula de Cardano ao resolver esta equação, obteve $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, onde já sabia por tentativas e erros que essa soma deve ser igual a 4. Certamente, essa notação não era a usada por Bombelli, definindo ***R.q*** como a raiz quadrada e ***R.c*** como a raiz cúbica. Ele escrevia essa soma como *R.c. 2. p.dm.R.q.121 + R.c. 2. m.dm.R.q.121*, onde dm.R.q.121 se refere a$\sqrt{-121}$, o que mostra que a operação era realizada com esse número e não com o número extraído de uma raiz com uma quantidade negativa (ROQUE, 2012, p. 390). Ainda, ***p.dm*** e ***m.dm*** mostram respectivamente que estão somando e subtraindo $x = 4$, onde Bombelli concluiu que ao realizar operações com essas quantidades ele obtinha $x = 4$. Dessa forma, “para enunciar as operações com os números p.dm. e m.dm., Bombelli fornecia algoritmos que permitiam calcular suas multiplicações por qualquer outro número, afirmando inclusive que m.dm. × m.dm. dá m., o que é equivalente a dizer que $-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -1$" (ROQUE, 2012, p. 391).

Seguindo esse raciocínio, Bombelli concluiu que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ deveriam ser números do tipo $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$. Logo, para esse caso concluiu que $a = 2$ e $b = 1$ pois $x = \left(2 + \sqrt{-1}\right) + \left(2 - \sqrt{-1}\right) = 4$. Assim, Bombelli após realizar seus cálculos criou algumas regras para se operar com a $\sqrt{-1}$, são elas:

- $\left(\sqrt{-1}\right) \times \left(\sqrt{-1}\right) = -1$
- $\left(-\sqrt{-1}\right) \times \left(\sqrt{-1}\right) = 1$

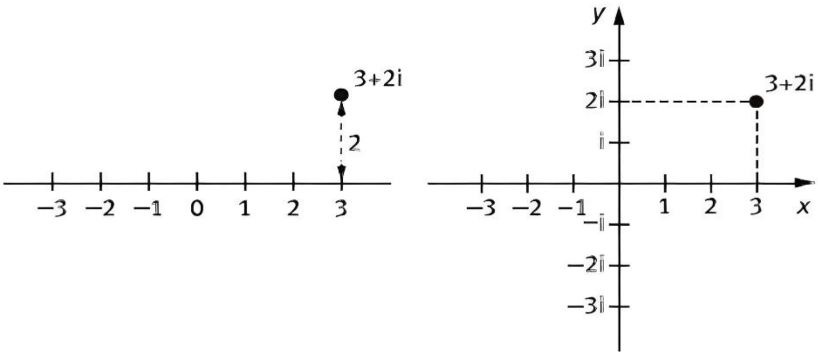
- $\left(-\sqrt{-1}\right) \times \left(-\sqrt{-1}\right) = -1$
- $-1 \times \left(-\sqrt{-1}\right) = +\sqrt{-1}$
- $\left(a + b\sqrt{-1}\right) + \left(c + d\sqrt{-1}\right) = (a + b) + (c + d)\sqrt{-1}$
- $\left(a + b\sqrt{-1}\right) \times \left(c + d\sqrt{-1}\right) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$

Embora a obra de Bombelli tenha marcado o início da aceitação dos Números Complexos, a mesma não teve muita repercussão, ao ponto de alguns matemáticos não admitirem que existam números negativos e imaginários como raízes de equações, fazendo com que o uso desses números inquietasse os matemáticos até o século XVII. Esse cenário só mudou quando nos estudos dos números de raízes de uma equação, Descarte (1596 – 1650) e Girard (1595 – 1632) admitiram soluções negativas e imaginárias (ROQUE, 2012, p. 392), e foi nesse contexto, por meio da seguinte frase de Descarte, "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias", que a $\sqrt{-1}$ assumiu o nome de "número imaginário" (TEIXEIRA, 2017, p. 29).

Outros matemáticos também fizeram feitos que contribuíram nesse processo histórico dos Números Complexos, dentre eles se encontra o matemático suíço Leonhard Euler, que em 1777 propôs a utilização do símbolo **i** para representar $\sqrt{-1}$. Além de ter dado grandes avanços nos estudos de Bombelli (GOMES, 2013, p. 6), no qual passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$ (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 6), onde essa igualdade $i^2 = -1$ foi explicada por William Rowan Hamilton (1805-1865) ao utilizar a seguinte definição para operar com os pares ordenados (a, b): $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$. Sendo assim, para ele um número real a pode ser escrito como (a,0), então em particular, $i^2 = (0, -1) \times (0, -1) = (-1{,}0) = -1$ (GOMES, 2013, p. 7).

Quanto a representação geométrica das quantidades negativas e imaginárias, um dos primeiros matemáticos que concebeu uma representação coerente foi Wallis, ele propôs que um número complexo da forma $x + iy$ poderia ser representado como um ponto num plano. Contudo, essa ideia foi completamente ignorada e criticada, uma vez que pensar que tais números formavam uma linha em ângulo reto com a linha dos reais não fazia sentido (STEWART, 2013, p. 68). Foi então que, a partir do final do século XVIII e início do século XIX que os matemáticos Gauss, Wessel e Argand, obtiveram a representação geométrica perfeita dos Números Complexos, como mostram as figuras abaixo, ao representarem o número $3 + 2i$:

Figura 1 - Esquerda (Plano de Wallis), direita (Wessel, Argand e Gauss)



Fonte: Stewart (2013, p. 68)

Dentre esses matemáticos, o que ganhou notoriedade nessa questão foi Gauss, pois ele apresentou um resumo dos trabalhos de Wessel e Argand e de outros matemáticos desconhecidos (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 249), o que "fez com que a representação do plano complexo ficasse conhecida tornando mais significativos seu estudo e favorecendo sua aplicabilidade" (DANTE, 2016, p. 175). Em consequência disso, o plano cartesiano no qual estão representados os Números Complexos é denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Além desse feito, em 1832 Gauss introduziu a expressão Número Complexo para representar esses números.

3 UMA ANÁLISE TEXTUAL DISCURSIVA DE TRÊS LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático possui um caráter pedagógico, uma vez que durante o processo de ensino e aprendizagem do conhecimento matemático na Educação Básica, ele é uma das principais ferramentas que auxilia no desenrolar-se desse processo. Contudo, “é preciso que os professores estejam atentos à qualidade, à coerência e as eventuais restrições que apresentem em relação aos objetivos educacionais propostos” (BRASIL, 2000, p. 67). Ademais, o livro didático não deve ser o único material a ser usado em sala de aula, mas ele deve compor um grupo dos variados recursos metodológicos utilizados pelo professor. Segundo Bittar (2017, p. 365-366), o livro didático é utilizado como a principal fonte de consulta dos alunos e professores, e que se nos interessa compreender algumas das razões das dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos, compreender como o livro didático é constituído e utilizado é o primeiro passo para tal compreensão.

Por conseguinte, para auxiliar na busca dessa compreensão, a Análise Textual Discursiva (ATD) de Moraes e Galiazzi (2011) fornece um conjunto variado de metodologias para a análise dos diversos livros didáticos presentes na Educação Básica. Desse modo, a ATD “corresponde a uma metodologia de análise de dados e informações de natureza qualitativa com a finalidade de produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos” (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 7), ou seja, ela promove a descrição e a interpretação de um texto em estudo, a fim de construir significados a respeito dele. Logo, essa análise é organizada em forma de argumentos, que compreendem quatro focos, divididos em dois ciclos, o primeiro é composto por três elementos principais: a desmontagem dos textos, o estabelecimento de relações e captando o novo emergente, já o segundo ciclo, é composto unicamente pelo processo auto-organizado (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 11-12).

O primeiro foco da ATD, chamada de “desmontagem dos textos” é caracterizada pela fragmentação do texto, a fim de facilitar e promover uma análise detalhada de cada unidade do fenômeno estudado. O segundo foco denominado de categorização, constrói relações entre as unidades constituídas na etapa anterior, reunindo e classificando elementos que apresentam particularidades em comum. Já o terceiro e último foco do primeiro ciclo, é caracterizado pela “intensa impregnação nos materiais da análise desencadeada nos dois focos anteriores possibilitando a emergência de uma compreensão renovada do todo” (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 12), esse foco representa o conhecimento constituído através da combinação dos passos anteriores. Por fim, o segundo ciclo, o ciclo da análise, compreende o processo autoorganizado, onde promovem novos entendimentos por meio da unitarização, categorização e do produto de uma nova combinação dos elementos anteriores (MORAES; GALIAZZI, 2011, p. 12).

Sendo assim, a análise que se segue, é fundamentada em alguns pressupostos da ATD, em outras palavras, não será realizado de maneira precisa todas as etapas da ATD, assim, como esta análise tem por objetivo analisar como a história dos Números Complexos está presente em três livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio, seguirá as fases do primeiro ciclo, que compreende três dos quatro focos da ATD. Portanto, os três focos aqui utilizados serão, a desmontagem dos textos, chamado também de unitarização, estabelecimento de relações/categorização e o captando o novo emergente.

Inicialmente, foram selecionados nove livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio para uma pré análise, em suma, dentre esses livros, apenas um não apresentou em seus capítulos os Números Complexos. Desse modo, os outros oito livros apresentam os Números Complexos e ainda, trazem um pouco da história desse conjunto, dessa forma, como critério de escolha, os oito livros foram divididos em três níveis. Logo, os níveis referem-se à quantidade de elementos históricos que compreendem a história desses números, assim, no nível 1, ficaram todos os livros que apresentaram poucos elementos, no nível 2, os que apresentaram um número médio de elementos históricos e no nível 3, os livros que apresentaram mais elementos.

Portanto, após essa análise foi escolhido um livro por nível, sendo assim, os livros escolhidos e analisados foram, Matemática Paiva (2009) do autor Manoel Paiva que representa o nível 1, Matemática: ciência e aplicações (2010) dos autores dos autores Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida que representa o nível 2 e o livro Matemática: contexto e aplicações (2016) do autor Luiz Roberto Dante que representa o nível 3. Assim, para facilitar a escrita chamaremos, respectivamente, de L1, L2 e L3 os livros escolhidos.

3.1 Foco 1: desmontagem dos textos

Nessa fase, ocorrerá a unitarização que é a fragmentação dos conteúdos presentes nos capítulos analisados, que estabelecerá as "unidades" que construirá o fenômeno estudado, sendo assim, será atribuído títulos a cada unidade produzida. Dessa forma, as unidades aqui definidas, levaram os nomes dos principais matemáticos que contribuíram para o surgimento e aceitação dos Números Complexos, consequentemente, essas unidades compuseram-se pelas contribuições desses matemáticos na construção da história dos Números Complexos.

3.1.1 Unidade 1- Scipione del Ferro (1465 – 1526)

Entre os livros L1, L2 e L3, o último é o único que menciona Scipione como um dos professores da Universidade de Bolonha, que quase nada se sabe, mas que certamente, Del Ferro foi o primeiro matemático a conseguir solucionar uma equação cúbica da forma $x^3 + px = q$, e que propiciou o início da história dos Números Complexos.

3.1.2 Unidade 2- Niccollo Fontana (1500 – 1557)

Dentre os livros analisados, somente o L1 e o L3 mencionam o Niccollo Fontana/ Tartaglia. Assim, o L1 apresenta inicialmente um problema matemático que mostra a insuficiência dos números reais diante de certas situações, onde a partir desse problema, o valor que se quer chegar é a raiz da equação $x^3 = 6x - 4$. Dessa forma, o autor afirma que esse problema pode ser resolvido pelo método proposto pelo matemático italiano Niccollo Fontana e resolve esse problema utilizando esse método.

Já o L3, traz Tartaglia como um engenheiro e professor em Veneza, que soube através de um discípulo de Del Ferro, que este conseguiu encontrar uma fórmula para determinar a solução de uma equação cúbica, o que o motivou a encontrá-la também, contudo, Tartaglia ingenuamente revelou seu método para Girolamo Cardano, que o publicou sem seu consentimento, gerando assim, muitos conflitos entre eles.

3.1.3 Unidade 3- Girolamo Cardano (1501-1576)

Em geral os livros L1, L2 e L3 apresentam Cardano como um médico e matemático italiano que após ter aprendido o método de Tartaglia para a resolução de uma equação cúbica, foi o primeiro a admitir a existência de números não reais, em especial, o L3 apresenta outras informações acerca de Cardano, descrevendo em detalhes o conflito entre ele e Tartaglia e citou também a sua famosa obra "*As Magna*", mostrando ainda uma gravura de Cardano, como pode-se observar na figura a seguir:

Figura 2 - Gravura de Cardano

Fonte: Dante (2016, p. 175)

Os livros L2 e L3 apresentaram duas equações diferentes para o que seria o primeiro avanço importante em relação aos Números Complexos, L2 trouxe a equação quadrática $x^2 - 10x + 40 = 0$ e o livro 3 trouxe a equação cúbica $x^3 - 15x = 4$, ambos, após mostrarem que Cardano obteve expressões com raízes quadradas de números negativos, destacaram que mesmo desconhecendo tais expressões, Cardano admitiu que os problemas davam certo e possuíam soluções.

3.1.4 Unidade 4- Rafael Bombelli (1526 – 1572)

Tanto os livros L1, L2 e L3 citam Bombelli como um matemático contemporâneo de Cardano, que após a aceitação da existência de números não reais advento dos trabalhos de Cardano, teve o que se considerou uma "ideia louca", pois ele começou a operar com esses números e percebeu que eles realmente funcionavam. Ainda, afirma que Bombelli admitiu que $2 + \sqrt{-1} + 3 - \sqrt{-1} = 5$, o que oportunizou o início da construção do conjunto dos Números Complexos.

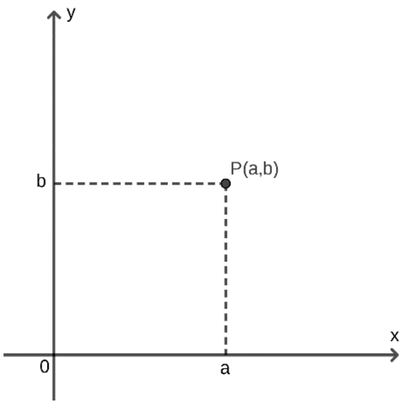
Além disso, o L3, apresenta algumas informações extras sobre Bombelli, como, o seu estudo árduo sobre os casos irredutíveis das equações cúbicas, que ele foi o primeiro matemático a definir as regras de adição e multiplicação para raízes de números negativos e que foi o primeiro a dar real importância a esses números.

3.1.5 Unidade 5- Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean-Robert Argand (1768 – 1822), Gauss (1777 – 1855)

O L1, menciona Gauss e Argand somente como os criadores da representação geométrica dos Números Complexos, já o L2, cita exclusivamente Gauss como o primeiro matemático a ter uma ideia clara sobre esses números e que percebeu as vantagens que os matemáticos do século XIX obteriam se conhecessem a representação geométrica desses números, além de afirmar que, o reconhecimento mundial desses números se deu com base nos trabalhos de Gauss.

Por fim, o L3 menciona Wessel e Argand como os primeiros matemáticos que escreveram sobre a representação geométrica dos complexos no plano, porém a pouca representatividade desses matemáticos, fizeram com que seus trabalhos não alcançassem a notoriedade. Em contrapartida, o livro afirma que Gauss foi o responsável pela notação $i^2 = -1$ se tornar padrão em 1801 e de ter inventado o termo “Números Complexos", além, de dar notoriedade a representação desses números do plano cartesiano. Ademais, o L3 traz a representação geométrica dos Números Complexos, intitulando esse plano de Argand-Gauss, como se ver na figura abaixo:

Figura 3 - Argand-Gauss



Fonte: Dante (2016, p. 181)

Além disso, ao lado do plano acima, se encontra uma breve história que levou a construção desse plano. Onde, Dante menciona que alguns pesquisadores defendem que Gauss e Argand, tiveram em épocas diferentes, a mesma ideia sobre a representação geométrica dos complexos, contudo, como Argand não era tão conhecido, foi Gauss que após 30 anos depois de Argand publicou esse feito, ou seja, o reconhecimento pelas contribuições de Argand foi póstuma.

3.2 Foco 2: estabelecimento de relações

Levando em consideração as unidades construídas no tópico anterior, nessa fase da análise ocorrerá a categorização dessas unidades, onde esse processo se baseia no estabelecimento de relações entre as unidades da análise, o que resultará na construção de categorias que salientam as principais características/ideias dos textos, levando em consideração o contexto e os objetivos da pesquisa. Assim, para isso será estabelecido três categorias que juntas formam a história dos Números Complexos até a sua representação geométrica. Desse modo, o quadro abaixo mostra quais elementos históricos compreendem cada categoria e quais unidades da fase da unitarização estão relacionadas a elas.

Quadro 1 - Categorização

Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3
Compreende os elementos históricos que mostram o surgimento sistemático das raízes quadradas de números negativos (Unidades 1, 2 e 3).	Compreende os elementos que apontam a aceitação da existência desses números e a definição das regras que possibilitam operar com eles (Unidade 4).	Compreende os elementos que trazem a representação geométrica dos complexos no plano (Unidade 5).

Fonte: Autoria própria (2022)

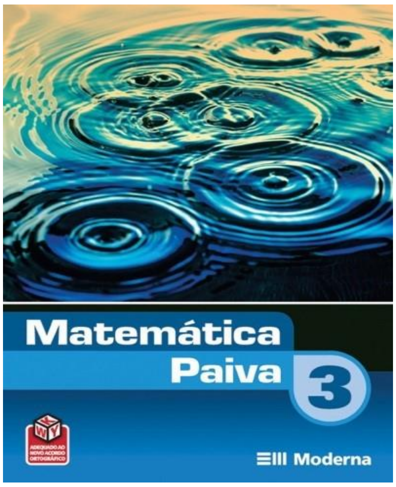
Portanto, pode-se perceber que os três livros apresentam os elementos históricos que mostram o surgimento sistemático das raízes quadradas de números negativos, que se deu através das contribuições de Tartaglia e Cardano na teoria que conduziu às soluções algébricas gerais de equações cúbicas, também, apresentam os elementos que apontam a aceitação da existência desses números e a definição das regras que possibilitam operar com eles, como os trabalhos de Bombelli que simboliza o maior passo para que fosse admitida a existência desses números e que seria possível operar com eles , e por fim, os três livros mencionam as contribuições de Gauss e Argand, dando notoriedade a Gauss pela representação geométrica dos complexos no plano. Assim, pode-se concluir que todos os livros ao apresentarem os Números Complexos se preocuparam em trazer um pouco da história que justifica a existência e a constituição desses números.

3.3 Foco 3: captando o novo emergente

Tendo em vista os argumentos apresentados, é notório que os autores dos livros L1, L2 e L3 utilizaram a História da Matemática como um recurso metodológico para o desenvolvimento da prática pedagógica no ensino e aprendizagem dos Números Complexos. Uma vez que, esses autores ao trazerem a história desses números, atribuem sentidos ao conteúdo, através da contextualização que permite mostrar que a matemática é uma construção humana e a sua importância nas resoluções de problemas do cotidiano.

Dessa forma, no livro Matemática Paiva, o autor afirma que, "este livro foi elaborado para oferecer, de forma clara e objetiva, conteúdos matemáticos fundamentais para o Ensino Médio" (PAIVA, 2009, p. 3), assim, no que se refere ao Números Complexos presente no capítulo 7 do livro, o autor justifica esse objetivo ao apresentar este tema de forma objetiva, trazendo um breve relato da história desses números, o que caracteriza, dentre os três livros analisados, o livro que menos apresentou elementos históricos sobre esse conteúdo.

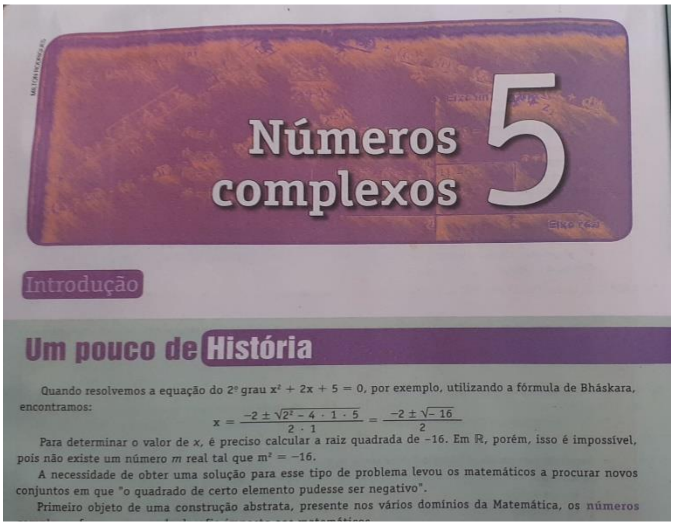
Figura 4 – Capa do Livro "Matemática Paiva"



Fonte: PAIVA (2009)

Ainda, os autores do L2, afirmam que, "ao tratar de alguns assuntos, logo na introdução, procuramos apresentar um breve relato histórico sobre o desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo" (IEZZI, et al., 2010, p.3). Assim sendo, o capítulo 5 deste livro, apresenta em suas páginas o Conjunto dos Números Complexos, onde o único tópico que fornece informações históricas sobre o conteúdo nas 30 páginas deste capítulo, é a introdução que corresponde aproximadamente uma página.

Figura 5 - Introdução



Números complexos 5

Introdução

Um pouco de História

Quando resolvemos a equação do 2º grau $x^2 + 2x + 5 = 0$, por exemplo, utilizando a fórmula de Bháskara, encontramos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Para determinar o valor de x, é preciso calcular a raiz quadrada de -16. Em $\mathbb{R}$, porém, isso é impossível, pois não existe um número m real tal que $m^2 = -16$.

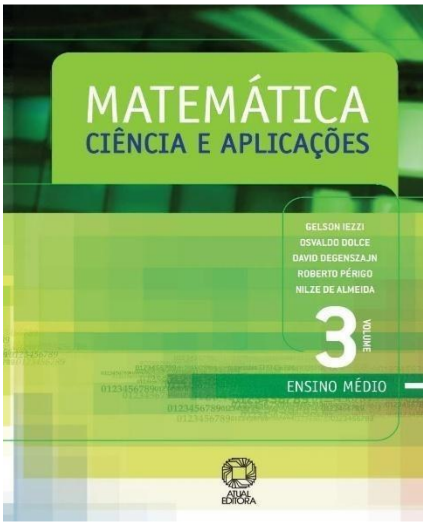
A necessidade de obter uma solução para esse tipo de problema levou os matemáticos a procurar novos conjuntos em que "o quadrado de certo elemento pudesse ser negativo".

Primeiro objeto de uma construção abstrata, presente nos vários domínios da Matemática, os números

Fonte: IEZZI, et al. (2010, p.122)

Por outro lado, além de apresentar as contribuições de Cardano, Bombelli e Gauss, os autores mencionaram o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), como o responsável por elaborar “uma teoria aritmética dos Números Complexos, a qual consistia em considerá-los como pares ordenados de números reais e em definir a soma e o produto de tais pares” (IEZZI, et al., 2010, p.123).

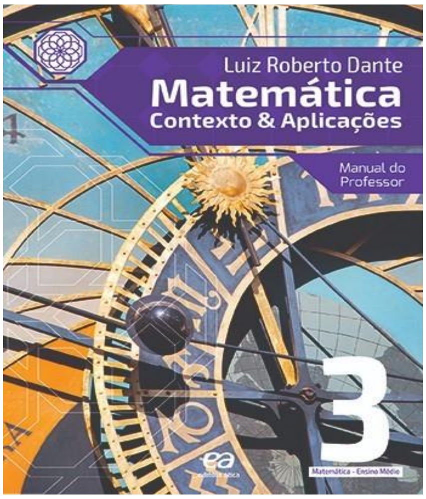
Figura 6 – Capa do Livro “Matemática: ciência e aplicações”



Fonte: IEZZI, et al. (2010)

Assim, para finalizar essa análise, o L3, dentre os demais, é o que mais apresenta elementos históricos sobre os Números Complexos, o que é evidenciado na apresentação do livro, onde o autor afirma que o mesmo tem como objetivo criar condições para que o aluno possa compreender as ideias básicas da matemática, atribuindo significados a elas e apresentando textos que abordam fatos históricos e/ou contextualizam a construção dos temas discutidos.

Figura 7 – Capa do Livro “Matemática: contexto e aplicações"



Fonte: Dante (2016)

Assim, além de trazer as informações que compõe as unidades da primeira fase dessa análise, o L3 traz elementos datados de antes do ano 1515, que foi quando Del Ferro conseguiu solucionar equações cúbicas, essas informações se referem as contribuições dos matemáticos Pacioli e Gutenberg a respeito das equações cúbicas. Ademais, segue abaixo um texto que fornece elementos históricos importantes sobre representação geométrica dos complexos, presente em uma das questões da seção "Vestibulares de Norte a Sul":

> Na virada do século XVIII para o século XIX um agrimensor norueguês Wessel (1798), e um desconhecido matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os números complexos não têm nada de “irreal”. São apenas os pontos (ou vetores) no plano que se somam através da composição de translações e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual). Mas essas iniciativas não tiveram repercussões enquanto não foram redescobertas e apadrinhadas, quase simultaneamente, por Gauss, grande autoridade daquele tempo que, já em vida, era conhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos (DANTE, 2016, p. 199).

Por fim, na página 196, o autor disponibiliza um tópico intitulado como "Um pouco mais de História" que traz um resumo sobre a história dos Números Complexos, apresentando informações detalhadas sobre esse processo.

4 UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM O USO METODOLÓGICO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

4.1 História da Matemática no Ensino

A matemática surgiu a partir da necessidade das pessoas em medir e contar objetos, o que evidencia que historicamente a matemática está presente desde os primórdios dos tempos. Assim, “é possível utilizarmos a matemática produzida por outros povos e em outras épocas para produzir novas matemáticas” (MENDES, 2009, p. 70) e ampliar os conhecimentos matemáticos existentes atualmente. Logo, pode-se concluir que, a matemática é uma ciência em construção, resultado das contribuições de diferentes culturas e povos ao longo da história.

A história por sua vez, tem um grande papel na construção da realidade matemática, uma vez que “à medida que passamos a conhecer e compreender o desenvolvimento da sociedade em sua trajetória de transformação, aprendemos novos meios de compreender e explicar um mesmo fenômeno” (MENDES, 2009, p. 71). Destarte, a História da Matemática pode ser usada como um valioso recurso metodológico em sala de aula, tendo em vista que, essa ferramenta pode servir de fonte de motivação, objetivos e métodos no ensino e aprendizagem da matemática (MIGUEL, 2009, p. 75-80) , além, de “contribuir para a ampliação da compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais da matemática, bem como das contribuições didáticas para o trabalho do professor e para fortalecer suas competências formativas para o exercício de ensino” (MENDES; CHAQUIAM,2016, p.18).

Consoante a isso, ao utilizar a História da Matemática no ensino dos variados conteúdos presentes na disciplina de matemática, o professor promove uma valorização do conhecimento matemático produzido pelos povos ao longo da história, onde, essa prática provoca uma maior criatividade por parte dos estudantes ao realizarem atividades em sala de aula (MENDES, 2009, p. 76). Deste modo, essa possível realidade advento do uso didático da História da Matemática em sala de aula, contribui também, na desmistificação da matemática, na formalização de conceitos matemáticos, na transformação de um ensino tradicional, onde o professor é o único detentor do conhecimento, para um ensino onde o estudante seja o protagonista desta realidade, se valendo do conhecimento histórico para promover um contado mais intrínseco entre a matemática e o aluno, promovendo o pensamento crítico e independendo dos mesmos (MIGUEL, 2009, p. 75-85).

Contudo, para garantir o sucesso dessa abordagem pedagógica o professor deve ter "um entendimento profundo da própria Matemática e do seu desenvolvimento histórico epistemológico" (MENDES, 2009, p. 78), esse entendimento é importante pois assim, os professores saberão qual matemática ensinar e como utilizar a história para estimular os alunos no processo de compreensão dos conceitos que estão sendo estudados. Ademais, vale destacar que "ensinar matemática com apoio na história do desenvolvimento das ideias matemáticas não significa ensinar História da Matemática" (MENDES; CHAQUIAM,2016, p.21). Sendo assim, a história não é entendida como um conteúdo a ser ensinado e sim, uma ferramenta didática usada na contextualização do conhecimento matemático para promover uma aprendizagem significativa por parte do aluno.

4.2 Sequência didática

Para Zabala (1998, p.18) sequência didática é um "conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores, como pelos alunos", a vista disso, a presente sequência didática tem como objetivo principal auxiliar o professor de matemática no ensino introdutório dos Números Complexos, trazendo em suas atividades uma perspectiva histórica acerca desse tema. Ainda, esta sequência didática foi pensada para ser trabalhada com alunos do 3º ano do Ensino Médio, tendo como tempo previsto, no 1º e 2º momento, de no mínimo 6 e 20 minutos por atividade, respectivamente.

1º momento: Este primeiro momento tem como objetivo trabalhar algumas equações/expressões que contribuíram para o surgimento dos Números Complexos.

Atividade 1 – Raiz quadrada de um número negativo

Objetivo: Promover uma reflexão acerca da existência da raiz quadrada de um número negativo.

Tarefa 1: Utilizando a fórmula de Bháskara $\left(\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$, determine a solução da equação $x^2 - 10x + 40 = 0$. Ainda, verifique se o valor $\sqrt{\Delta}$ pertence ao conjunto dos números reais, se não, como podemos encontrar esse valor.

Atividade 2 - Bombelli e a equação do 3º grau

Objetivo: Contextualizar o surgimento da unidade imaginaria i, através da resolução de Rafael Bombelli (1526-1572) de uma equação cúbica.

Tarefa 2: Considere a equação $x^3 = 15x + 4$ onde $x^3 = px + q$ e determine o valor de x utilizando a seguinte fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Atividade 3 - Aplicação da unidade imaginaria i

Objetivo: Aplicar os conhecimentos obtidos na “Atividade 2”, na resolução obtida na equação da “Atividade 1”.

Tarefa 3: Utilizando o desenvolvimento de Bombelli, considere a resolução obtida da equação $x^2 - 10x + 40 = 0$ e obtenha a $\sqrt{-60}$ dentro do conjunto dos Números Complexos.

2º momento: Este segundo momento, tem como objetivo, auxiliar os alunos na compreensão da unidade imaginaria i, desenvolvendo atividades que envolvam essa unidade e a resolução de raízes pertencentes aos Números Complexos.

Atividade 4 – Unidade imaginária **i**

Objetivos: Promover a compreensão acerca da unidade imaginária **i** através da prática.

Tarefa 1: Calcule o valor de:

a) i^{29}

b) i^{100}

c) $(-i)^{26}$

d) $i^1 + i^2 - i^3 + i^4$

e) $4i^{156} + 2i^{23}$

f) $(i^2)^0 \times (i^{221})^{12}$

Atividade 5 - Equações do 2º grau

Objetivos: Aplicar a expressão $\sqrt{-1}$ na resolução de equações do 2º grau.

Tarefa 2: Resolva as equações abaixo em $\mathbb{C}$ (Conjunto dos Números Complexos):

a) $x^2 + x + 5 = 0$

b) $x^2 + 14 = 0$

c) $x^2 - 4x + 8 = 0$

d) $6x^2 + 7x + 38 = 0$

e) $15x^2 + 89 = 0$

f) $9x^2 + 18x + 27 = 0$

g) $5x^2 - 5x + 5 = 0$

h) $2x^2 + 10x + 100 = 0$

Atividade 6 - Plano Argand-Gauss

Objetivos: Representar graficamente raízes complexas no plano Argand-Gauss.

Tarefa 3: Levando em consideração, os resultados da Atividade 6 represente graficamente as raízes complexas das 8 equações da atividade no plano Argand-Gauss.

4.3 Detalhamento e orientações pedagógicas para a aplicação da sequência didática

Caros leitores, a devida sequência didática tem como objetivo auxiliar o professor de matemática no ensino introdutório dos Números Complexos, preferencialmente no 3º ano do Ensino Médio, usando como instrumento pedagógico a História da Matemática, uma vez que ela serve como,

> apoio para se atingir, com os alunos, objetivos pedagógicos que os levem a perceber, por exemplo: (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a

> natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 53).

Assim, essa sequência didática foi pensada para ser aplicada durante o ensino inicial dos Números Complexos. Primeiramente, a “Atividade 1” deve ser aplicada no primeiro momento deste ensino, antes de qualquer explicação ou apresentação dos Números Complexos, uma vez, que não se pretende, com essa proposta, mudar a rotina do professor, mas auxiliá-lo de forma “sutil/discreta” nesse processo. Sendo assim, ao chegaram na expressão $\frac{10\pm\sqrt{-60}}{2}$, os alunos que não conhecem o universo dos complexos, possivelmente irão afirmar que não existe raiz quadrada de um número negativo, fornecendo assim, subsídios para que o professor possa apresentar a existência desse conjunto e afirmar que existe sim, essa possibilidade.

Em sequência o professor deve apresentar a “Atividade 2”, nesta tarefa está sendo utilizada a fórmula de Del Ferro para resolução da equação dada. Assim, os alunos chegarão num resultado semelhante da atividade anterior, contudo, neste momento o professor precisa apresentar a resolução de Bombelli (presente no capítulo 2 deste trabalho) para essa equação, ainda, o professor pode aproveitar essa ocasião para falar um pouco da história desses números, mostrando esse resultado como uma construção de vários matemáticos ao longo da história, o que fornecerá subsídios para que na “Atividade 3” os alunos possam resolver a equação da tarefa 1.

Por fim, o 2º momento está dividido em 3 atividades, que tem como propósito praticar e aprofundar os conhecimentos dos alunos acerca da unidade imaginária dos Números Complexos e a representação geométrica desses números. Assim, como o objetivo dessa sequência é auxiliar o professor nesse primeiro contato dos alunos com esse novo conjunto, é interessante que o professor aplique as atividades do 2º momento como um dever de casa, até mesmo, se preferir pode atribuir notas para as mesmas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de matemática ao longo da história representa para muitos alunos um dos componentes curriculares mais difíceis de se aprender, assim, dentre os conteúdos que compreendem essa disciplina, os Números Complexos em sua totalidade, justificam essa ideia, por ser um conteúdo do 3º ano do Ensino Médio, e devido a isso, exigir um nível de conhecimento relativamente alto. Dessa forma, como um instrumento metodológico, a História da Matemática pode ser usada como ponte para introdução de novos conteúdos, em especial os Números Complexos, propiciando mudanças significativas na percepção dos alunos em relação a matemática, além de contribuir para desmitificação e humanização da mesma.

Desse modo, esse trabalho buscou sobrepujar a importância do ensino e aprendizagem dos Números Complexos na Educação Básica, culminando na formulação de uma proposta didática com o uso metodológico da História da Matemática, além de apresentar o contexto histórico que favoreceu o surgimento e aceitação desse conjunto e ainda, analisar como três livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio apresentam esse contexto. Assim, se justificando com base na importância da História da Matemática como um instrumento metodológico, essa pesquisa procurou mostrar as possibilidades que essa metodologia pode fornecer na construção de uma proposta didática que auxilia o professor de matemática no ensino dos Números Complexos.

Portanto, com base nos dados obtidos, percebe-se a importância da História da Matemática como um instrumento metodológico no ensino e aprendizagem dos Números Complexos, posto que, a mesma pode servir como fonte de motivação e objetivos para aprendizagem e ensino desse conteúdo, constituindo-se em um instrumento de formalização de conceitos e de métodos que promovam o ensino da matemática através de problemas práticos, contextualizados e instigantes. Assim, foi levando em consideração tais possibilidades, que se tornou possível utilizar a História da Matemática na construção de uma proposta didática, que trouxe em suas atividades alguns elementos históricos que promoveram o surgimento e aceitação dos Números Complexos.

Quanto ao contexto histórico em que se desenvolveu esses números, é notório que esse desenvolvimento se deu através de diversas contribuições de alguns matemáticos ao longo da história, como Del Ferro e Tartaglia, ao descobrirem a solução geral de equações cúbicas, Cardano que publicou esse método e percebeu ao utilizá-lo, que há equações cúbicas com soluções reais conhecidas, cuja solução passava por raízes quadradas de números negativos e que embora isso fosse um enigma, considerou a existência desses números. Ademais, o matemático italiano Bombelli foi o primeiro aceitar a existência desses números e operar com eles, criando assim, as primeiras regras que possibilitaram operações com $\sqrt{-1}$, além desses quatro matemáticos italianos destacam-se as contribuições dos matemáticos Leonhard Euler, ao representar $\sqrt{-1}$ como i, William Rowan Hamilton, por definir que $i^2 = -1$ e Wallis, Gauss, Caspar Wessel e Argand pela representação geométrica perfeita dos Números Complexos.

Ademais, quanto a Análise Textual Discursiva que foi realizada nos livros Matemática Paiva, Matemática: ciência e aplicações e Matemática: contexto e aplicações, percebe-se que todos os autores ao iniciarem a apresentação dos Números Complexos, trouxeram um pouco da história que compreende o surgimento e aceitação desses números. Em destaque, o livro Matemática: contexto e aplicações do autor Roberto Dante traz o maior número possível de elementos históricos, seguido dos livros Matemática: ciência e aplicações e Matemática Paiva. Desta maneira, os três livros analisados se mostram úteis como um recurso metodológico para o ensino e aprendizagem dos Números Complexos, uma vez que ao utilizarem a História da Matemática, forneceram subsídios que contextualizaram esse novo conteúdo, atribuindo significados e motivando os alunos nos seus estudos.

Por fim, levando em consideração o tema e os resultados desse trabalho, o mesmo pode ser utilizado como um material didático no ensino e aprendizagem dos Números Complexos no Ensino Superior, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática. Ademais, em pesquisas futuras, pode-se investigar e apresentar a história dos Números Complexos até os dias atuais, além de evidenciar a importância e a presença desses números em várias áreas do conhecimento, como na Física, Biologia, Química, Astronomia, Engenharia Aeronáutica e Elétrica. Desse modo, pode-se ainda, explorar o fato de que os Números Complexos nunca (até hoje) compuseram a matriz de conteúdos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Ainda, há possibilidades de desenvolvimento de uma nova pesquisa com a aplicação da proposta didática que compõe esse trabalho, na Educação Básica e/ou no Ensino Superior.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. J. F. **Como fazer uma pesquisa bibliográfica**. Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará, 2007. Disponível em: < http://200.17.137.109:8081/xiscanoe/courses-1/mentoring/tutoring/Como%20fazer%20pesquisa%20bibliografica.pdf >. Acesso em: 27 mai. 2022.

ANDRADE, M. M. **Introdução à metodologia do trabalho científico:** elaboração de trabalhos na graduação. São Paulo, SP: Atlas, 2010.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké,** Campinas, São Paulo, v.25, n. 3, p.364-387, 2017. Disponível em: < file:///home/chronos/u-89f82252dcbbaf0c8ca546e1735af6b2e0e68180/MyFiles/Downloads/badassie,+01++8648640+-+COM+DOI.pdf >. Acesso em: 25 mai. 2022.

BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. **Rev. Odontol**. Univ. Cidade São Paulo, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006. Disponível em: < https://arquivos.cruzeirodosuleducacional.edu.br/principal/old/revista_odontologia/pdf/setembro_dezembro_2006/metodologia_pesquisa_bibliografica.pdf >. Acesso em: 27 mai. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v. 2, Brasília: SEF/MEC, 2008.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. **História dos Números Complexos**. Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP. São Paulo, 2001. Disponível em:< https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf >. Acesso em: 25 mai. 2022.

CENDRON, L. W. **Números complexos**: um estudo de suas aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2021.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2016.

FARAGO, J. L. **Do ensino da História da Matemática à sua contextualização para uma aprendizagem significativa**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FLICK, U**. Introdução à pesquisa qualitativa**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. 1 ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em:

<https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/52806/000728684.pdf?sequence=1&isAllowed= y >. Acesso em: 28 mai. 2022.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo, SP: Atlas, 2002.

GOMES, R. **Números complexos e polinômios**: estratégias de ensino para aplicação por meio do GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática:** ciência e aplicações. São Paulo: Saraiva, 2010.

JÚNIOR, U. P. **A história dos números complexos:** “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: < http://www.matematicauva.org/wp-content/uploads/2020/11/Dissertacao-historia-numeroscomplexos.pdf >. Acesso em: 25 mai. 2022.

MATTAR, F. N. **Pesquisa de marketing.** 3.ed. São Paulo: Atlas, 2001.

MENDES, I. A. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetike**, Campinas, São Paulo, v. 5, n. 2, p.73-89, 2009. Disponível em: < https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646848/13749 >. Acesso em: 27 jun. 2022.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2011.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora Inijuí, ed. 2, 2011.

MOTTA, C. D. V. B.; FERREIRA. V. L. **Uma perspectiva para a história da matemática na formação de professores das séries iniciais**. São Paulo: Unicentro Editora, 2007.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. São Paulo: Moderna, 2009.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio**. Curitiba: SEED, 2008.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT – Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro – Rio de Janeiro, ed. 1, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

STAMATO, J. M. A. **A Disciplina História da Matemática e a Formação do Professor de Matemática*:*** Dados e Circunstâncias de sua 56 Implantação na Universidade Estadual Paulista, campi de Rio Claro, São José do Rio Preto e Presidente Prudente. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003.

STEWART, I. **Dezessete equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.

ZABALA, A. **A Prática Educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.