UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS SANTOS LOPES

TRIÂNGULO DE PASCAL: História, algumas de suas aplicações e uma proposta didática para o ensino

Araguaína / TO

2018

MATHEUS SANTOS LOPES

TRIÂNGULO DE PASCAL: História, algumas de suas aplicações e uma proposta didática para o ensino

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, Campus de Araguaína, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Rogerio dos Santos Carneiro

Araguaína / TO

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L864t Lopes, Matheus Santos.

TRIÂNGULO DE PASCAL: História, algumas de suas aplicações e uma proposta didática para o ensino . / Matheus Santos Lopes. – Araguaína, TO, 2018.

44 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2018.

Orientador: Rogerio dos Santos Carneiro

1. Triângulo de Pascal. 2. Proposta didática. 3. Ensino de Matemática. 4. História da Matemática. I. Título

CDD 510

MATHEUS SANTOS LOPES

TRIÂNGULO DE PASCAL: Algumas de suas aplicações e uma proposta didática para o ensino

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Federal do Tocantins - UFT, Câmpus de Araguaína, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovada em ____ de dezembro de 2018.

Banca examinadora

____

Prof. Me. Rogerio dos Santos Carneiro
Orientador/UFT

____

Prof. Dr. Sinval de Oliveira
Examinador/UFT

____

Prof.ª Dr.ª Fernanda Vital de Paula
Examinadora/UFT

Araguaína / TO

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que sempre esteve do meu lado e por essa oportunidade de realizar esse sonho de apresenta este trabalho. Aos meus pais que estiveram do meu lado me ajudando.

Ao meu orientador que sempre me ajudou no decorrer do desenvolvimento do presente trabalho, o qual tive muitas dificuldades no início dos estudos, mas com orientações adquiri mais conhecimento para desenvolver o trabalho.

A todos meus colegas da turma 2013.2 em especial ao Rafael Dias, Luan Alves, João Marcos e Daniel Alves.

Agradeço também professora Meire do Ensino Médio no qual trabalhei com ela no PIBID.

Aos meus colegas Pibidianos Fabricio Mota, Edna Alencar, Priscila Alves, Talia Jane, Joyce carvalho e ao Tony Anderson.

A todos os professores em especial ao professor Rogério que ajudou bastante no desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho objetivou a realização de um estudo multidimensional sobre o triângulo de pascal, a nível da Educação Básica e, a formulação de uma proposta didática advinda das orientações metodológicas da Educação Matemática, fundamentadas nos dados obtidos através da pesquisa teórica que foi desenvolvida no decorrer desta produção acadêmica. Parte desta exploração dedicou-se a pesquisa bibliográfica onde constituímos, por meio de fontes da História da Matemática, uma apresentação da história do triângulo de pascal. Além de realizarmos uma perscrutação epistemológica, empreendemos em uma análise das propriedades e de algumas aplicações conceituais, com intuito de trazermos uma correlação do triângulo de pascal com outros conteúdos da Matemática. A propositura resultante desta pesquisa, intenciona despertar o interesse nos alunos pelo que está sendo trabalhado. Os resultados foram expressos em termos de vislumbrar possibilidades de organização de métodos de ensino baseados nas produções do campo da Educação Matemática a fim de produzir uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal. Proposta didática. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The present work aimed at the realization of a multidimensional study on the Pascal triangle at the level of Basic Education and the formulation of a didactic proposal derived from the methodological orientations of Mathematics Education, based on the data obtained through the theoretical research that was developed during the course of this academic production. Part of this exploration was devoted to bibliographical research where we have constituted, through sources of the History of Mathematics, a presentation of the history of the triangle of paschal. In addition to performing an epistemological examination, we undertake an analysis of the properties and some conceptual applications, in order to bring a correlation of the triangle of pascal with other contents of mathematics. The proposal resulting from this research intends to arouse interest in the students for what is being worked on. The results were expressed in terms of glimpsing possibilities of organization of teaching methods based on the productions of the field of Mathematics Education in order to produce meaningful learning.

Keywords: Pascal's Triangle. Didactic proposal. Mathematics Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das ferramentas de estudo da matemática que está sendo usada no presente trabalho, é o triangulo de pascal. Uma das dificuldades pode ser encontrada na prática do professor em sala de aula é trabalhar o conteúdo com uma didática diferente a das aulas ditas "tradicionais". Portanto a gênese desse trabalho se fundamenta na forma didática de explorar o conteúdo. Desse modo, procuro neste trabalho a possibilidade de elaboração de uma proposta didática para o ensino de matemática, com uma metodologia que possa comtemplar diversos aspectos do conteúdo.

Objetivamos, neste trabalho, estudar e apresentar um pouco da abordagem histórica, as propriedades e a relação do triângulo de pascal com outros conteúdos da matemática, dando ênfase em uma proposta didática que possa ser desenvolvida com alunos da Educação Básica. Dessa forma podemos contribuir para o professor no ponto de vista didático e ao aluno, proporcionar uma aprendizagem mais significativa. Ou seja, temos a pretensão de adequar a forma didática, com o intuito de melhorar o ensino do conteúdo e a forma de compreensão do mesmo.

Tendo em vista que, o triângulo de pascal é formado por números binominais, possui muitas características especiais nas propriedades. Na antiguidade, os matemáticos o usavam para calcular raízes e combinações, já na atualidade, é utilizado como uma nova maneira de resolver problemas de probabilidade.

Neste trabalho iremos também aborda algumas das aplicações do triângulo pascal, com objetivo de mostrar que este conceito pode ser uma ferramenta de estudo para resolver questões relacionada a outros conteúdos, dessa forma analisamos que a matemática está interligada a vários conteúdos.

Sendo assim, o segundo capítulo deste trabalho é construção histórica e epistemológica do triângulo de pascal, no qual vamos fazer uma abordagem com intuito conhecermos mais sobre esse conteúdo que muito contribuiu no passado, para os matemáticos resolverem problemas que envolviam outros conteúdos e que hoje ainda usamos interligando-o a outras áreas da matemática. No capítulo seguinte, trazemos um estudo das propriedades do triângulo de pascal, onde vamos fazer uma construção e logo após avançaremos para as suas propriedades, de forma simples e utilizando a fórmula de cada uma.

Já no quarto capítulo, estudamos algumas aplicações utilizando o triângulo de pascal. O proposito dessa perscrutação foi mostrar que podemos utilizar este conteúdo para resolver outros problemas matemáticos.

E por último, apresentamos uma proposta didática para o ensino do triângulo de pascal no Ensino Médio. Com o intuito de possibilitar uma aplicação prática de tudo o que foi estudado estudo para o desenvolvimento teórico deste trabalho, o qual tem a pretensão de influenciar positivamente no ensino e, consequentemente, no aprendizado dos discentes da Educação Básica.

2 TRIÂNGULO DE PASCAL: CONSTRUÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA

O triângulo de pascal, conhecido também como triângulo aritmético, foi chamado de vários outros nomes tais como: Triangulo Aritmético, Triângulo de Yang Hui, Triângulo Combinatório, Triângulo de Tartaglia e Triângulo de Pascal devido ser estudado por diversos matemáticos. Essas alterações constantes aconteceram já que o estudo foi sendo lapidado. Conforme Silva (2015), os primeiros registros de estudo são do indiano Pingala que viveu por volta de 200 a.C., ou seja, o triângulo de Pascal já existia muito antes de Pascal, os matemáticos não deixaram de investigar as propriedades do triângulo de Pascal percebe-se aqui que eles queriam saber mais sobre o mesmo e quais seriam as aplicações na matemática.

Como já citado o triângulo aritmético teve seus primeiros registros na índia, pelo indiano Pingala, que tinha vários estudos na área da matemática. Pingala utilizou o triângulo aritmético, em um de seus estudos de análise combinatória. Segundo Rosadas (2016, p. 15), “o erudito[1] Pingala (200 a.C.), em sua obra "Chandra Sutra" que surge, pela primeira vez, o Triângulo Aritmético” através das combinações de sílabas, que pode ser visto na figura abaixo.

Figura 1 - Primeiro Registro do Triângulo Aritmético

Fonte: AFFONSO (2014, p.14)

[1] **Erudito** está relacionado à música, que relacionava com a combinação métricas de sílabas.

O triângulo aritmético, utilizando com a análise combinatória por Pingala, ficou conhecido como triângulo combinatório, onde estudava combinações métricas das sílabas, Conforme Silvera (2001), a regra que Pingala criou para construção do triângulo aritmético dada da maneira:

> Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que se juntem no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba; a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante (SILVERA, 2001, on-line).

Como podemos observar a forma da construção, com uso das sílabas em quadradinhos, como resultado tem-se um triângulo através da soma dos extremos com os elementos da linha, obtendo uma combinação na próxima linha. a regra de Pingala resulta em um Meruprastara, que também pode ser chamada como triângulo combinatório.

A seguir, temos uma tabela dos matemáticos indianos que dedicaram estudos e escreveram livros relacionados ao triângulo aritmético:

Quadro 1 - Matemáticos indianos associados ao triângulo

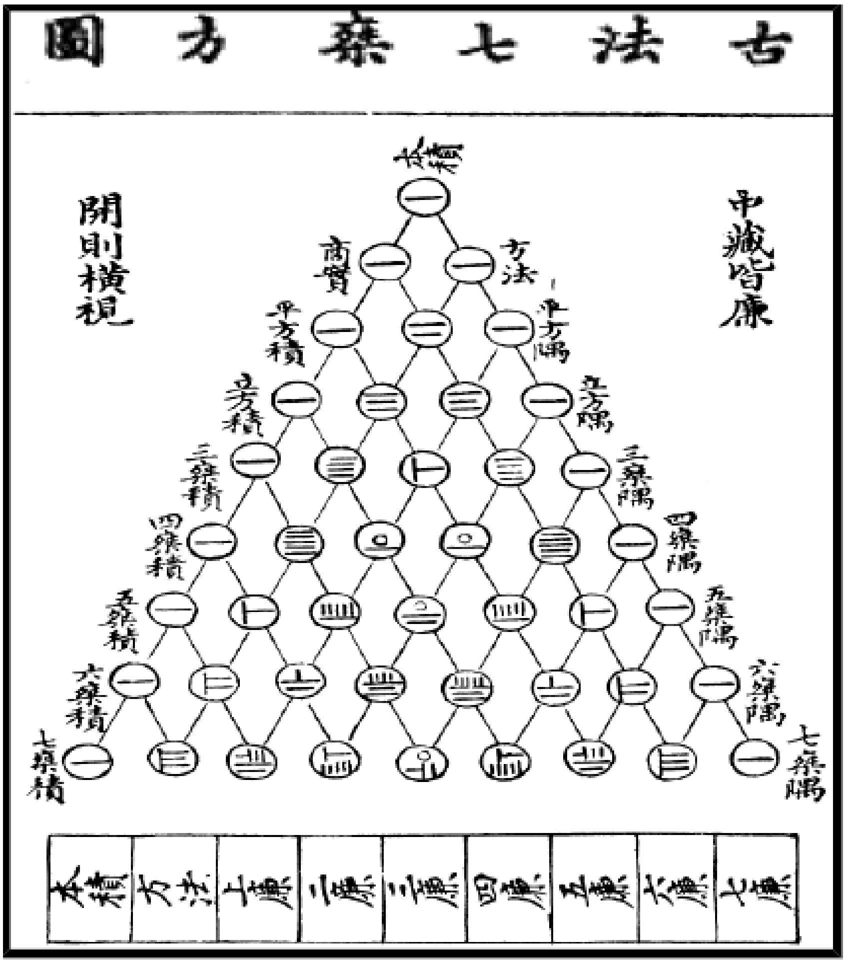
Matemático	Época	Livros associados ao triângulo
?	300 AC	*Bhagabati Sutra*
?	200 AC	*Sthananga Sutra*
Pingala	200 AC	*Chanda Sutra*
Mahavira	850 dC	*Ganita Sara Samgraha*
Halayudha	950 dC	*Mritasanjivani*

Fonte: Silveira (2001, on-line)

Continuando com a contextualização histórica, de acordo com Santiago (2016), o aparecimento do Triângulo de Pascal na China, se deu através do estudo das aproximações das raízes quadradas, cúbicas e as demais, e foi denominado sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais. Esse estudo foi feito pelo famoso chinês Yang Hui (1238-1298), que escreveu dois livros abordando o estudo do triângulo aritmético e suas aplicações, a saber: *Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos* e *Uma análise detalhada dos métodos do livro "Nove Capítulos"*.

Dessa forma, o triângulo aritmético ficou conhecido também como, triângulo de Yang Hui por meio de cálculo dos coeficientes binominais, como podemos verificar na figura 2.

Figura 2 - Configuração do Triângulo Aritmético, no século XIII



Fonte: AFFONSO (2014, p.16)

Outros chineses também contribuíram no estudo do triângulo de pascal foi o chinês JiuzhangSuanshu por exemplo, escreveu o livro “Nove capítulos da Arte Matemática”, um dos livros mais antigos dos chineses que utilizavam o triângulo aritmético para extração de raízes quadrada e cúbicas. Já Zhu Shijie escreveu o livro “Precioso espelho dos quatro elementos”, escrito 300 d.C. Conforme Silvera (2001), o livro escrito pelo chinês Zhu Shijie traz figuras de triângulos com até nove linhas e seu autor os denomina de diagramas do método antigo para calcular grandes e pequenas potências. No quadro 2, a informações sobre todos. os matemáticos chineses que escreveram livros envolvendo o triângulo de aritmético.

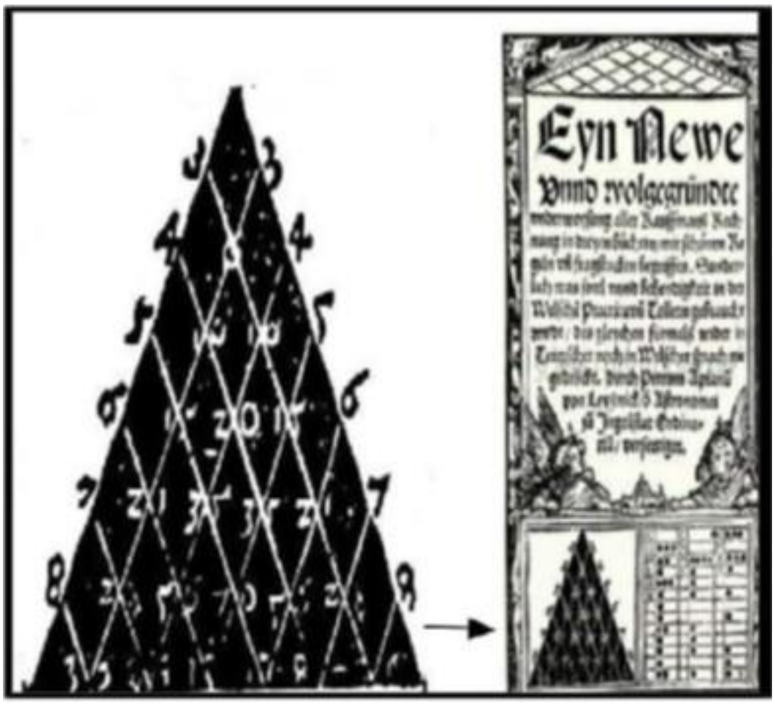
Quadro 2 - Matemáticos chineses associados ao triângulo

Matemáticos	Época	Livros associados ao triângulo
Liu Hui	250 dC	Jiuzhangsuanshuzhu. (Comentários sobre os "Nove Capítulos da Arte Matemática").
Jia Xian	1 050 dC	Jia Xian suanjing. (Manual de Matemática de Jia Xian).
Yang Hui	1 250 dC	Xiangjiejiuzhangsuanfa. (Uma análise detalhada dos métodos do livro "Nove Capítulos"); Fasuanquyongbenmo. (Alfa e ômega de uma seleção de aplicações de métodos aritméticos).
Zhu Shijie	1 300 dC	Siyuanyujian. (Precioso espelho dos quatro elementos)

Fonte: Silveira (2001, on-line)

Agora na região da Europa, segundo Rosadas (2016, p.18), “a era mais próximo de Pascal, o matemático alemão Apianus (1495-1551) redigiu em 1527 o livro denominado "KauffmannsRechnung", que tratava de uma obra específica em aritmética comercial, nele o Triângulo aritmético aparece no canto inferior esquerdo de uma das páginas”. A Figura 3 mostrar como o triângulo aritmético estava inserido nesse livro que foi a primeira impressão, tratando do mesmo, na Europa.

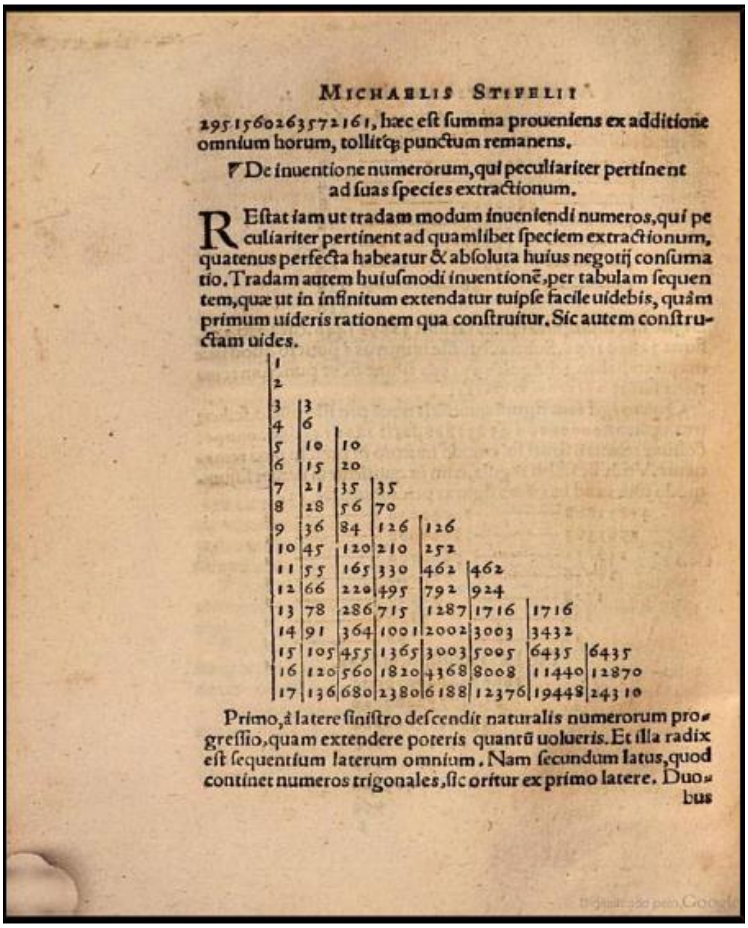
Figura 3 - O Triângulo Aritmético em sua primeira tiragem na Europa, 1527.



Fonte: AFFONSO (2014, p.18)

Porém, o matemático que anunciou o triângulo aritmético na Europa, foi Michel Stifel[2]. e estudou suas propriedades e criou a obra “Arithmetica Integra” em 1544, como na figura 4.

Figura 4 - "Arithmetica Integra", de Michel Stifel



MICHAELIS STIFELII

295156026357216 1, hæc eſt ſumma prouenienſ ex additione omnium horum, tollitq́ꝫ punctum remanens.

De inuentione numerorum, qui peculiariter pertinent ad ſuas ſpecies extractionum.

REſtat iam ut tradam modum inueniendi numeros, qui peculiariter pertinent ad quamlibet ſpeciem extractionum, quatenus perfecta habeatur & abſoluta huius negotij conſumatio. Tradam autem huiuſmodi inuentionē, per tabulam ſequentem, quæ ut in infinitum extendatur tuipſe facile uidebis, quàm primum uideris rationem qua conſtruitur. Sic autem conſtructam uides.

1							
2							
3	3						
4	6						
5	10	10					
6	15	20					
7	21	35	35				
8	28	56	70				
9	36	84	126	126			
10	45	120	210	252			
11	55	165	330	462	462		
12	66	220	495	792	924		
13	78	286	715	1287	1716	1716	
14	91	364	1001	2002	3003	3432	
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310

Primo, à latere ſiniſtro deſcendit naturalis numerorum progreſſio, quam extendere poteris quantū uolueris. Et illa radix eſt ſequentium laterum omnium. Nam ſecundum latus, quod continet numeros trigonales, ſic oritur ex primo latere. Duobus

Fonte: AFFONSO (2014, p.19)

Na Itália, temos o matemático Nicola Fontana, mais conhecido como Tartaglia. Seu nome tem relação com o triângulo de Tartaglia devido seus estudos nas equações do terceiro grau.

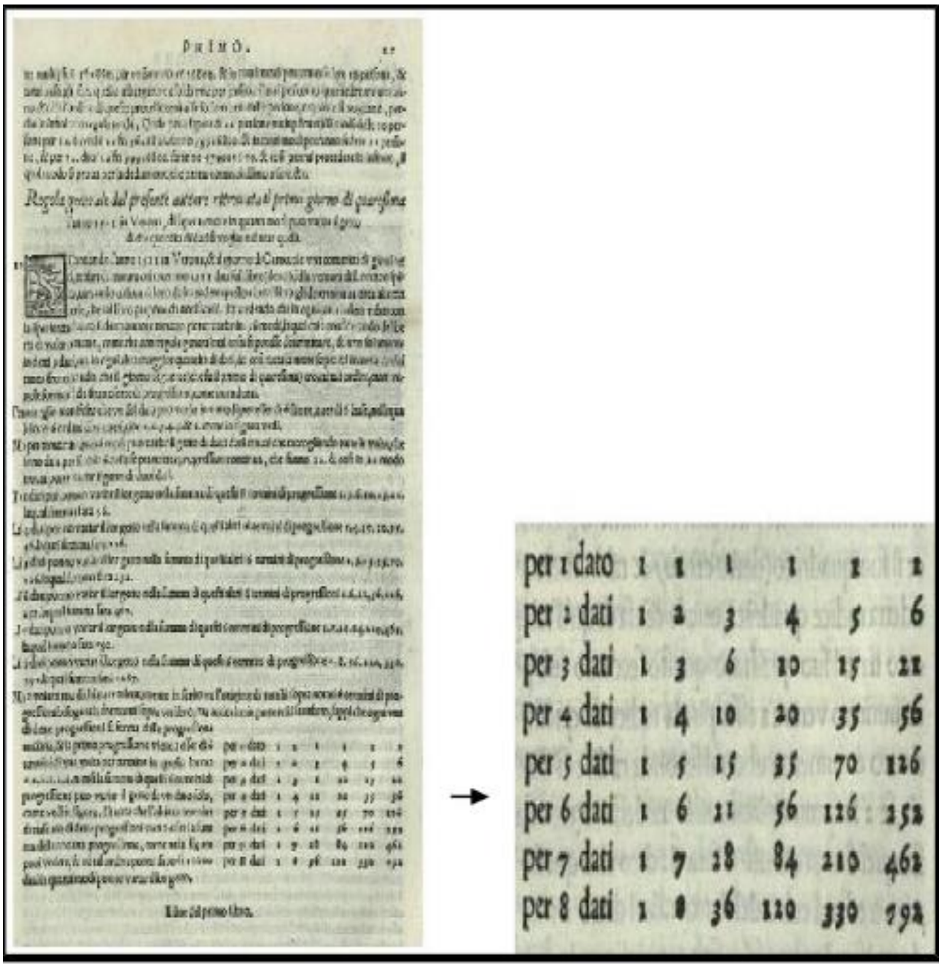
> Um dos primeiros matemáticos ocidentais a confeccionar uma tabela contendo o número de combinações possíveis num lançamento de um dado foi o matemático italiano Nicola Fontana Tartaglia (1499-1559), sendo assim, Tartaglia reivindicou a criação do Triângulo Aritmético para ele, o que explica, o fato de que alguns países, até os dias de hoje, o Triângulo Aritmético é conhecido como Triangulo de Tartaglia (SILVA, 2013, p. 04,).

---

[2] Michel Stifel (1486-1567) é um matemático alemão que era considerado com o maior algebrista do século XVI, além disso foi um dos responsáveis a revelar os símbolos + e −.

Através dos seus estudos Tartaglia escreveu um livro chamado de "General Trattatodinumeri et misure", em 1556. Conforme a figura 5, onde abordava diversos problemas e regras para cálculos combinatórios, além disso ele abordava regras de aritmética, álgebra, geometria e física.

Figura 5 – Página do livro “General Trattatodinumeri et misure” de Tartaglia



per 1 dato	1	1	1	1	1	1
per 2 dati	1	2	3	4	5	6
per 3 dati	1	3	6	10	15	21
per 4 dati	1	4	10	20	35	56
per 5 dati	1	5	15	35	70	126
per 6 dati	1	6	21	56	126	252
per 7 dati	1	7	28	84	210	462
per 8 dati	1	8	36	120	330	792

Fonte: AFFONSO (2014, p.20)

Como podemos ver Tartaglia foi um dos primeiros a fazer a tabela contendo números e combinações, mas Blaise Pascal dedicou muito de seus estudos ao triângulo aritmético que é chamado nos dias de hoje de triângulo de Pascal.

A figura 5 mostra uma página antiga do livro de Tartaglia que trata de vários problemas e regra para cálculos combinatórios. A parte destacada é o triângulo aritmético que passou a ser chamado de triângulo de Tartaglia na Itália devido os estudos de tartaglia sobre o triângulo.

No quadro 3 temos os matemáticos europeus que contribuíram para os estudos do triangulo aritmético através dos livros que eles escreveram:

Quadro 3 - Matemáticos europeus associados ao triângulo

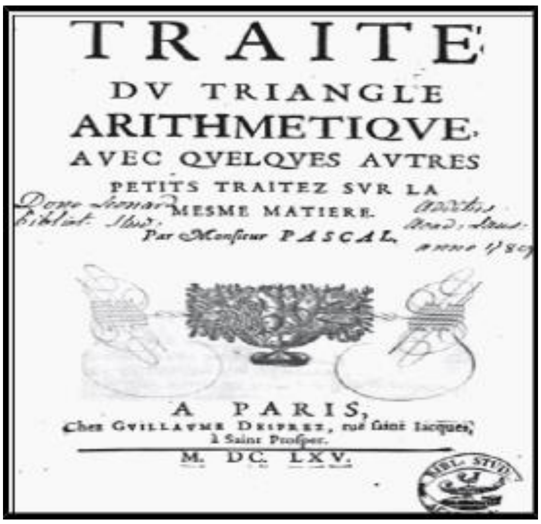
Matemático	Época	Livros associados ao triângulo
Apianus	1527	*Rechnung.* (Cálculo)
Stifel	1544	*Arithmetica Integra*
Tartaglia	1556	*General Tratatodinumeri et misure*
Peletier	1549	*Arithmétique*

Fonte: Silveira (2001, on-line)

Como podemos observar o triângulo de Pascal recebeu vários nomes em diversos continentes e devido aos grandes matemáticos que estudaram suas propriedades e aplicações. Os primeiros estudos foram realizados na Índia pelo matemático Pingala, quando o triângulo aritmético conhecido como triângulo combinatório, já na China foi estudado pelo matemático Yang Hui, onde foi chamado de triângulo de Yang Hui e por fim, na França, foi chamado de triângulo de Pascal, devido ao matemático Blaise Pascal que nasceu na França e sempre dedicou seus estudos a matemática. Como aprofundou seu estudo no triângulo aritmético, até hoje o triângulo aritmético é triângulo de pascal, em homenagem a este matemático.

> O triângulo aritmético ficou conhecido como “Triângulo de Pascal” devido à monografia de cerca de sessenta páginas sobre este triângulo escrita por Blaise Pascal: “Trait´edutrianglearithmétique”, a qual foi publicada só postumamente, em 1665. Nesta monografia, Pascal introduziu o triângulo de um modo bem complicado e usando uma notação estritamente geométrica (SILVA, 2010, p. 10).

Figura 6 - TraitédiTriangleArithmétique, obra de Pascal.


TRAITE
DV TRIANGLE
ARITHMETIQVE.
AVEC QVELQVES AVTRES
PETITS TRAITEZ SVR LA
MESME MATIERE.
Par Monsieur PASCAL.
A PARIS,
Chez GVILLAVME DESPREZ, rue saint Iacques,
à Saint Prosper.
M. DC. LXV.

Fonte: AFFONSO (2014, p.21)

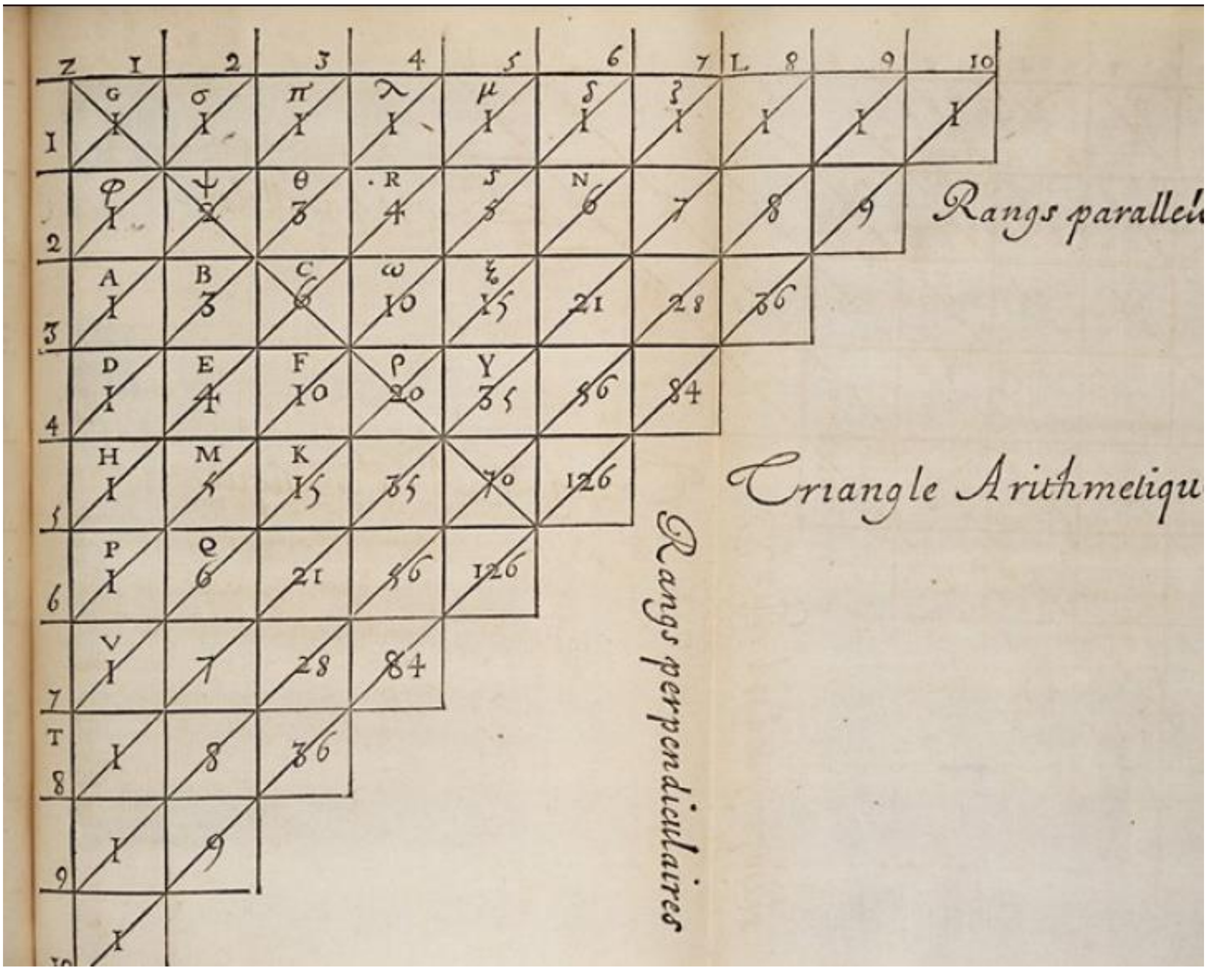
Segundo Rosadas (2016), Pascal ficou conhecido não apenas pelas análises do Triângulo Aritmético, mas por distintas contribuições na própria Matemática, como estudos sobre as cônicas, o cicloide e por ser desbravador nos estudos de probabilidade.

Desse modo, o matemático Blaise Pascal analisou suas propriedades do triângulo aritmético fazendo sua construção da seguinte maneira:

> Chamo Triangulo Aritmético uma figura que se constrói da seguinte maneira. De um ponto G, qualquer, desenho duas retas GV e Gζ, uma perpendiculara outra, e, sobre cada uma dessas, tomo tantas partes próximas iguais que se quiser, começando em G, nomeando-as 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente; esses números são os expoentes das divisões da reta." (PULSKAMP, 2009, p. 01, tradução nossa).

Observe na figura 7 o triângulo aritmético que Pascal desenvolveu. Ao analisamos percebemos que o triângulo é formado por retas perpendicular e as linhas diagonais, onde cada quadrado tem sua ordem numérica de acordo com o resultado das combinações.

Figura 7 - Construção do Triângulo, segundo Pascal

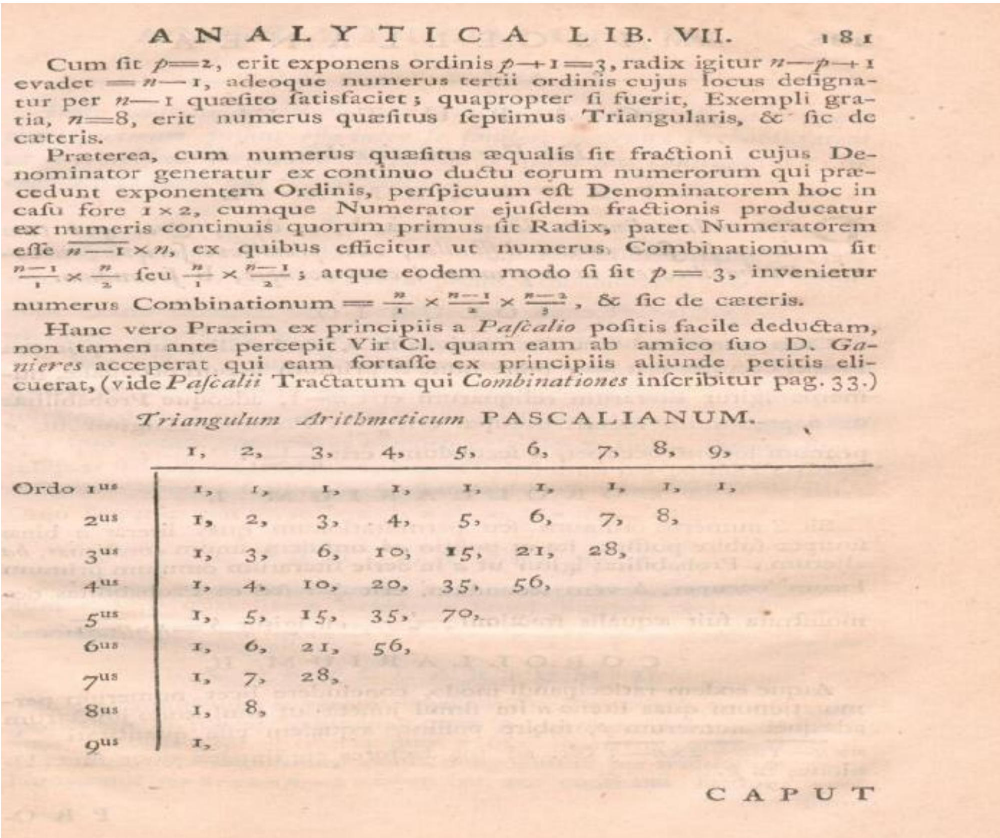


Fonte: AFFONSO (2014, p.22)

Como podemos ver a construção é feita de maneira simples: são duas retas perpendicular onde temos as células que correspondem aos quadradinhos onde serão dispostos os números. Assim cumprindo a regra geral em todos os quadradinhos da primeira linha e coluna vamos colocar o número 1, que é o gerador de todo o triângulo aritmético e o extremo do triângulo aritmético. Segundo Pulskamp (2009, p. 03), “o número de cada célula e igual ao número da célula que a precede na sua posição perpendicular, mais o número da célula que a precede na sua posição paralela. Portanto, a célula F e obtido pela soma da célula C mais a célula E, e assim sucessivamente”.

Em outras palavras, o número de cada célula é dado pela soma de dois números consecutivos da mesma diagonal que resultará em um número da mesma linha primeiro número que foi somado como podemos ver na figura 7. A partir disso, Pascal cria as propriedades para o triângulo aritmético e logo depois resolve aplicar em outros conteúdos da matemática, como a ordem numérica e as combinações, Seus estudos e aplicações foi reconhecido como *"TriangulumArithmeticum PASCALIANUM"* conforme podemos verificar na figura abaixo.

Figura 8 - O Triângulo de Pascal



ANALYTICA LIB. VII. 181

Cum ſit $p=2$, erit exponens ordinis $p+1=3$, radix igitur $n-p+1$ evadet $=n-1$, adeoque numerus tertii ordinis cujus locus deſignatur per $n-1$ quæſito ſatisfaciet; quapropter ſi fuerit, Exempli gratia, $n=8$, erit numerus quæſitus ſeptimus Triangularis, & ſic de cæteris.

Præterea, cum numerus quæſitus æqualis ſit fractioni cujus Denominator generatur ex continuo ductu eorum numerorum qui præcedunt exponentem Ordinis, perſpicuum eſt Denominatorem hoc in caſu fore 1×2, cumque Numerator ejuſdem fractionis producatur ex numeris continuis quorum primus ſit Radix, patet Numeratorem eſſe $\overline{n-1} \times n$, ex quibus efficitur ut numerus Combinationum ſit $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ ſeu $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$; atque eodem modo ſi ſit $p=3$, invenietur numerus Combinationum $= \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, & ſic de cæteris.

Hanc vero Praxim ex principiis a *Paſcalio* poſitis facile deductam, non tamen ante percepit Vir Cl. quam eam ab amico ſuo D. *Ganieres* acceperat qui eam fortaſſe ex principiis aliunde petitis elicuerat, (vide *Paſcalii* Tractatum qui *Combinationes* inſcribitur pag. 33.)

Triangulum Arithmeticum PASCALIANUM.

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Ordo 1us	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2us	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
3us	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,		
4us	1,	4,	10,	20,	35,	56,			
5us	1,	5,	15,	35,	70,				
6us	1,	6,	21,	56,					
7us	1,	7,	28,						
8us	1,	8,							
9us	1,								

CAPUT

Fonte: AFFONSO (2014, p. 23)

Conforme rosadas (2016), a validação só veio a partir da titulação "Triângulo de Pascal" realizada em 1730, ano em que Abrahan de Moivre (1667-1754) em sua marcante e influente obra "Miscellaneaanalytica de seriebus et quadraturis (1730)" usou a titulação "TriangulumArithmeticum PASCALIANUM" para dar referência ao Triângulo Aritmético. A partir dessa data o Triângulo Aritmético fica famoso com a denominação "Triângulo de Pascal”.

Hoje em dia o triângulo de Pascal que já foi chamado de vários nomes está presente nos livros didáticos. Tal fato mostra que sua contribuição foi altamente relevante para matemática em vários conteúdos como probabilidade, binômio de newton, aplicações em aritmética, na álgebra, geometria e outros.

3 ESTUDOS DAS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL

Como já vimos anteriormente a abordagem histórica do triângulo de Pascal, agora vamos tratar de suas propriedades. Suas propriedades possuem muitas características especiais que devem apresentadas.

O triângulo de Pascal é formado por coeficientes binominais ou números binominais. Tais coeficientes são apresentado por dois números naturais n e p, tais que n ≥ p, e são representados por $\binom{n}{p}$ em termos de notações temos *n* o numerador, que representa a linha e *p*, o denominador que representam a coluna, respectivamente, a linha em que o coeficiente binomial se encontra deste modo temos:

$$\binom{linha}{coluna} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

O fatorial é representado por:

n! = n. (n – 1). (n – 2). (n – 3) .... 1!, em n ∈ ℕ.

Para a construção do triângulo os números ficam dispostos da seguinte forma:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna n
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...	$\binom{n}{n}$

Para calcular os três elementos das primeira e segunda linhas, basta realizar os cálculos conforme a fórmula (1) assim, temos binominais na fórmula $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ assim temos:

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\binom{1}{0} \ \binom{1}{0} \ = \ \frac{1!}{0!(1-0)!} \ \frac{1!}{0!(1-0)!} \ = \ 1 \quad 1$$

$$\binom{2}{0} \ \binom{2}{1} \ \binom{2}{2} \ = \ \frac{2!}{0!(2-0)!} \ \frac{2!}{1!(2-1)!} \ \frac{2!}{2!(2-2)!} \ = \ 1 \ \ 2 \ \ 1$$

O triângulo de Pascal possui alguns casos especiais que valem $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, sendo eles:

I) $\binom{n}{0} = 1$

II) $\binom{n}{1} = n$

III) $\binom{n}{n-1} = n$

IV) $\binom{n}{n} = 1$

Depois de calculamos o valor de cada coeficiente, teremos uma nova forma de representar o triângulo de Pascal:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Depois da construção do triangulo de Pascal temos as seguintes propriedades:

(1) Teorema dos elementos simétricos:

Esse teorema afirma que numa linha do triângulo, há uma simetria em relação à altura isto é.

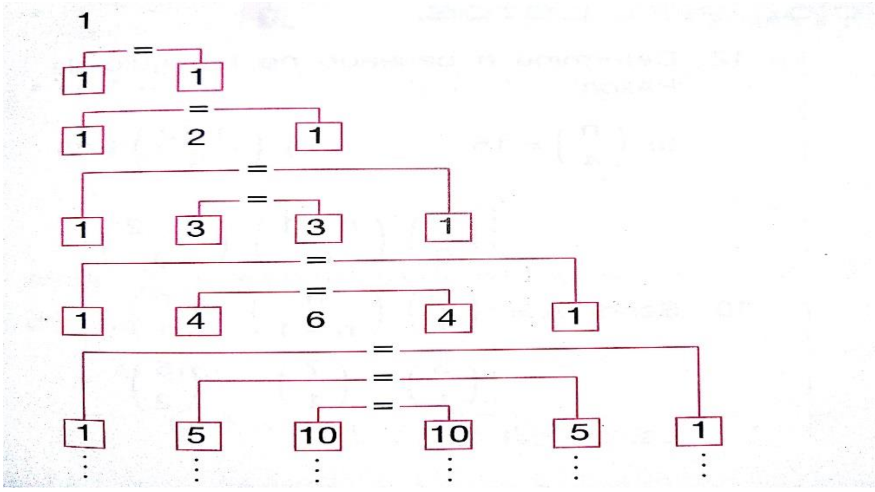
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

(Exemplos): Na linha 5 temos, n = 5 se consideremos a coluna 1, p = 1 e na mesma linha coluna 4, p= 4 substituindo tais valores na fórmula temos o seguinte:

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{5-4} = \binom{5}{1}$$

A figura 9 mostra os elementos simétricos, como podemos ver os elementos que destacados corresponde a simetria dos que estão ligados.

Figura 9 - Teorema dos elementos simétricos



Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 367)

(2) Relação de Stifel:

A Relação de Stifel diz que a soma de um elemento com outro elemento da mesma linha do triângulo resulta no elemento abaixo do segundo elemento que foi somado com o primeiro elemento. Essa relação se encontra na análise combinatória é dada por:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Exemplo: o número 10 está na linha n = 5, coluna p = 2, assim substituindo na relação Stifel os valores de n e p obtemos

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

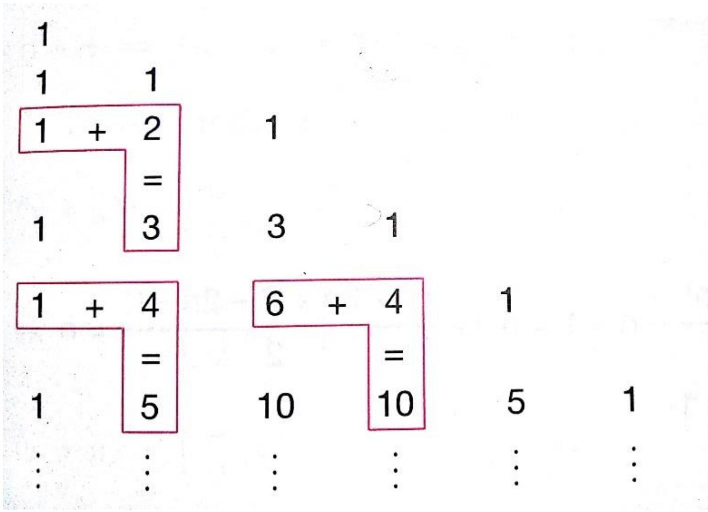
$$\binom{5-1}{2-1}+\binom{5-1}{2} = \binom{5}{2}$$

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

$$\frac{4!}{1!(4-1)!} + \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

$$6 + 4 = 10$$

Figura 10 - Teorema das colunas



Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 367)

A figura 10 mostra a relação de Stifel que, como podemos observar nos números que estão destacados afirmar que a soma de números consecutivos resulta no número abaixo do segundo número que foi somado.

(3) Teorema das colunas

Esse teorema diz que a soma de todos elementos de uma coluna até uma determinada linha, resulta no número da próxima linha e próxima coluna.

Exemplo: se somamos os 3 primeiros números da 4º coluna resulta no quinto elemento da 5º coluna:

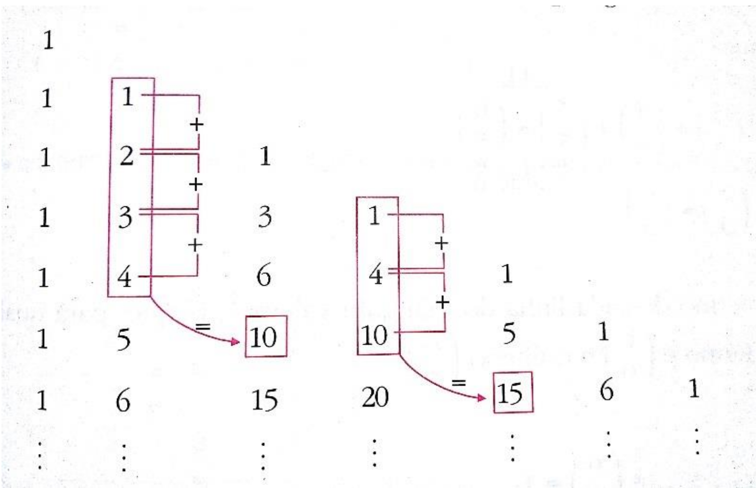
$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56$$

E que 56 é o valor da linha n = 8, coluna p = 3 que é exatamente o valor do número binominal da 3º coluna, substituindo n = 8 e p = 3 na formula. Temos o seguinte:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

Figura 11 - Teorema das colunas



Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 105)

A figura 11 mostra como o teorema é calculado, observando os números que estão destacados a soma da dos elementos da coluna até uma determinada linha que resulta no elemento da próxima linha e coluna.

(4) Teorema das linhas

Esse teorema diz que a soma dos elementos de cada linha n sempre resulta em uma potência de 2^n, com n igual ao número de linha correspondente, De modo geral, tem-se a seguinte forma:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{p} + \binom{n}{p} + \binom{n}{p} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{p} = 2^n$$

Exemplos:

Linha 0: $1 = 2^0$

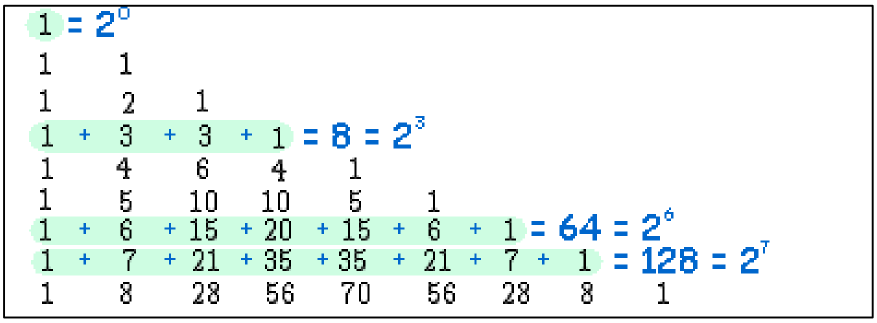
Linha 3: $8 = 2^3$

Linha 6: $64 = 2^6$

Linha 7: $128 = 2^7$

Como podemos ver na figura 12 a soma das linhas resultam em potências de 2^n.

Figura 12 - Teorema das linhas



Fonte: Matemática Didática[3]

(5) Teorema das Diagonal

A soma de todos elementos da diagonal até a uma determinada linha, obteremos o elemento da próxima linha da última coluna a ser somada.

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

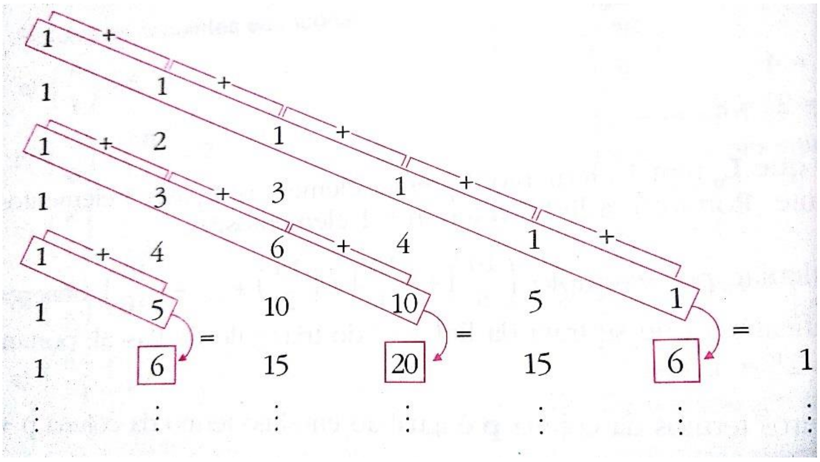
Exemplo: Se somamos os quatro primeiros elementos da terceira diagonal, teremos o seguinte:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ que é o quinto termo da 6º linha.

[3] Disponível em http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx. Acessado em 22 de out. de 2018.

Podemos observar, na figura 13, como funciona o teorema da diagonal. Os elementos que estão destacados em cada diagonal resultam em um número que está abaixo do último elemento que foi somado.

Figura 13 - Teorema das Diagonal



Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 366)

Sendo assim, analisando as propriedades que foram estudadas através de dois modos: cálculo teórico e usando apenas o triângulo de Pascal em sua forma natural, percebemos que ambas os modos resultam nos mesmos valores. Vale destacar que os teoremas têm seus casos especiais e particularidades. Com relação aos números de linhas e colunas. É importante citar a relação de Stifel permite que o triângulo de pascal seja construído utilizando apenas ordem.

Como podemos ver um caso especial é relação de stifel que é dada pela somar de dois números da mesma linha resulta em um número abaixo do segundo número que foi somado através dela podemos construir o triângulo de pascal utilizando apenas ordem numérica que é estabelecida por linhas e colunas.

4 APLICAÇÕES UTILIZANDO O TRIÂNGULO DE PASCAL

Através das propriedades do triângulo de Pascal pudemos perceber que existe uma ligação deste assunto com outros conteúdos, ou seja, que há aplicabilidade do triângulo de pascal em outros conteúdos da matemática, tendo como exemplo a análise combinatória, o binômio de newton, a sequência de Fibonacci entre outros, muitos destes assuntos também estão presente no currículo de matemática do ensino médio.

Na análise combinatória temos uma relação em que podemos usar o triângulo de Pascal para resolver algumas questões, e a outra relação e a aplicação da análise combinatória no triângulo está presente na própria formação do triângulo de Pascal, pois utilizando a fórmula de combinação simples de modo geral: $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, podemos construir o próprio triângulo, onde as suas propriedades também estão ligadas a análise combinatória.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna n
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\cdots$	$\binom{n}{n}$

Já a aplicação do triângulo de Pascal no binômio de Newton, é bem útil pois facilita nos cálculos dos coeficientes. Para entendemos melhor, o binômio de Newton é toda potência da forma $(x + y)^n$, com x e $y \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$. n é denominador grau do binômio.

Vamos ver alguns exemplos de binômios de Newton desenvolvidos:

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1y^2x^0$ Como podemos ver o grau do binômio é 2, ou seja, o binômio é do 2º grau, Para desenvolvê-lo utilizando o triângulo de Pascal basta sabermos o grau do binômio que corresponderá a linha no triângulo, Como n = 2 temos:

Linha 2 = $\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

Observando acima, temos os mesmos números que acompanham xy no desenvolvimento de

$$(x + y)^2$$

$$\binom{2}{0}x^2y^0 = 1x^2 = x^2$$

$$\binom{2}{0}x^1y^1 = 2xy$$

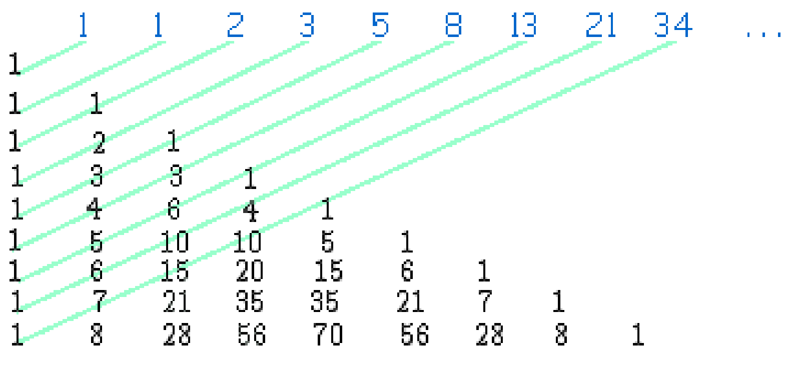
$$\binom{2}{2}y^2x^0 = 1y^2 = y^2$$

Desenvolvimento de $(x + a)^5$ Utilizando o triângulo de Pascal tendo no caso tornando, consequentemente n = 5 a 5ª linha.

$$(x + y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}y^3x^2 + \binom{5}{4}y^2x + \binom{5}{5}y^5$$
$$= 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10y^3x^2 + 5y^2x + 1y^5$$

Podemos também obter a sequência de Fibonacci através das somas das diagonais triângulo de pascal que são os números destacados em azul.

Figura 14 - sequência de Fibonacci a partir do triângulo de pascal



Fonte: Matemática Didática[4]

[4] Disponível em http://www.matematicadidatica.com.br/TrianguloDePascal.aspx. Acessado em 22 de out. de 2018.

A sequência de Fibonacci é uma sequência numérica que a partir do terceiro número, os números são obtidos através da soma dos dois números anteriores, o que pode ser observado na figura 14

Outra aplicação do triângulo de pascal é na obtenção das potências de 11. Para isto, devemos fazer uma ligação do triângulo de Pascal com o binômio de newton que já foi apresentado anteriormente. Desse modo temos que fazer a decomposição das potências de 11 no sistema decimal, assim obteremos os coeficientes de 10 que estão no triângulo. Ou seja, a potência de 11^n podemos rescrever em forma de binômio como $(10+1)^n$, assim temos:

$$11^n = (10+1)^n = \binom{n}{0}.10^n + \binom{n}{1}.10^{n-1} + ... + \binom{n}{n-1}.10^1 + \binom{n}{n}.10^0$$

Portanto podemos obter qualquer potência de 11.

Exemplos: para as três primeiras potências de 11, temos:

$11^0 = (10+1)^0 = \binom{0}{0}.10^0 = 1$

$11^1 = (10+1)^1 = \binom{1}{0}.10^1 + \binom{1}{1}.10^{1-1} = 1.10 + 1.1 = 11$

$11^2 = (10+1)^2 = \binom{2}{0}.10^2 + \binom{2}{1}.10^{2-1} + \binom{2}{2}.10^{2-2} = 1.100 + 2.10 + 1.1 = 121$

Portanto, o triângulo de Pascal tem seus casos especiais, como podemos ver neste capítulo, percebermos que podemos explora-lo e relacioná-lo com outros conteúdos como análise combinatória onde se encontra as combinações simples onde podemos utilizar para resolve alguns problemas de combinações utilizando o triângulo pascal, no cálculo dos coeficientes do binômios de newton, na sequência de Fibonacci que é formada pelas diagonais do triângulo de pascal e por último de calcula qualquer potência de 11 através das linha, podemos aplicar em outras áreas também da matemática como probabilidade e entre outras.

5 PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO TRIÂNGULO DE PASCAL NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo abordaremos uma proposta didática para o ensino do triângulo de Pascal no Ensino Médio, sabendo que nos livros de matemática para o Ensino Médio, o triângulo de Pascal só é visto no final do capítulo de análise combinatória, com uma breve abordagem. Estamos propondo uma abordagem um pouco mais ampla, interligando-a com outros conteúdos, com intuito de corroborar para a aprendizagem do aluno e para o professor com uma didática diferente na explanação do conteúdo.

De acordo com os Parâmetros Curricular Nacionais (PCN), "é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas" (BRASIL, 2000, p. 40). Deste modo, no Ensino Médio podemos estudar o triângulo de Pascal fazendo uma análise de como esse triângulo é formado, verificando também quais conceitos que pode ser explorado. Com relação a outros conteúdos e, quaisquer outros problemas o docente pode resolver de formar diferente, utilizando o triângulo de Pascal como ferramenta.

Tendo por base tudo o que já foi exposto, o nosso trabalho consiste em possibilitar uma aplicação prática de todo o conteúdo presente no desenvolvimento teórico deste trabalho. Para isso, faz-se necessário uma organização dos conteúdos e a definição da ordem em que irão ser trabalhados. Para tais fins decidiu-se adotar os fundamentos da Sequência didática, que segundo Zabala (1998, p. 18) "[...] são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

A proposta didática primeiramente, é de fazer uma breve abordagem histórica do triângulo de Pascal destacando como ele surgiu e logo em seguida fazer uma explanação de como se desenvolve o triângulo de Pascal de forma simples. Dessa maneira, a primeira questão é colocada aos alunos a construção do triângulo. Assim vamos iniciar explicando para o aluno, que o triângulo é disposto por linhas e colunas por números naturais conforme na figura 15.

Figura 15 - Triângulo de pascal

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: SANTOS, GENTIL e GREGO (2002, p. 365)

A figura 16 mostra o triângulo de Pascal formado por números binômias

Figura 16 - Triângulo de Pascal em forma binomial

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna n
Linha 0	$\binom{0}{0}$						
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
Linha 2	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\cdots$	$\binom{n}{n}$

Fonte: próprio autor

No segundo momento vamos explicar as seguintes propriedades: relação de Stifel, teorema das linhas, das colunas e das diagonais, de forma simples sem usar os números binomiais, para que o aluno tenha menos dificuldade e com intuito de colaborar com seu aprendizado. Após compreensão dos alunos podemos avançar usando as combinações simples nas propriedades.

No terceiro e último momento aplicaremos uma atividade com objetivo de verificar se o aluno realmente aprendeu a construir o triângulo de Pascal e utilizar algumas de suas propriedades de maneira simples.

5.1 UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Bloco matemático: Análise combinatória

Conteúdo: Triangulo de Pascal

Ano de Ensino: 2º ano do Ensino médio

Objetivos:

Geral: Desenvolver a capacidade de construir o triangulo de Pascal e resolver problemas matemáticos utilizando o triângulo de Pascal em outros conteúdos.

Específicos:

- Estimular os alunos a explora as propriedades do triângulo de Pascal Tais como: relação de stifel, teorema das linhas, das colunas e das diagonais.
- Compreender como é formado o triângulo de Pascal a partir dos elementos dispostos em linha e colunas.
- Compreender a relação do triângulo de Pascal entre combinação simples e o binômio de Newton.

Tempo previsto: 4 horas/aulas

1º MOMENTO

Atividade 1 – Realizar uma breve abordagem histórica[5] do Triângulo de Pascal:

O triângulo de Pascal ou triângulo aritmético recebeu vários outros nomes devidos ser estudado por diversos matemáticos. E essas alterações foram constantes e aconteceram conforme o estudo foi lapidado.

---

[5] Na abordagem histórica utilizaremos algumas figuras do capitulo 2 para mostra como era desenvolvido o triângulo de Pascal no passado.

Os primeiros registros do triângulo de Pascal foram pelo matemático indiano foi o Pingala que viveu por volta de 200 a.C. Pingala desenvolvia vários estudos na área da matemática, e um desses estudos foi de combinações, no qual ele desenvolveu o triangulo aritmético, através de combinação de silabas de com mostrar na figura 1 página 11. Este estudo utilizando o triângulo aritmético com a análise combinatória ficou conhecido como triângulo combinatório.

Na China, seu aparecimento se deu a partir dos estudos envolvendo raízes quadradas, cúbicas etc., e foi denominado sistema de tabulação para descobrir coeficientes binomiais. Esse estudo foi feito pelo famoso chinês Yang Hui, quando o triângulo aritmético ficou conhecido como triângulo de Yang Hui mostrar a figura 2 página 13.

Embora muitos matemáticos tenham estudado o triângulo aritmético, o matemático Blaise Pascal foi o que mais se dedicou ao estudo do mesmo e escreveu uma monografia com sessenta páginas sobre o triângulo aritmético. Onde abondava as propriedades e aplicações em outros conteúdos. Depois dos seus estudos e aplicações o triangulo aritmético ficou conhecido como *"TriangulumArithmeticum PASCALIANUM"* conforme a figura 8 página 20.

Por fim, o triângulo aritmético hoje conhecido como o triângulo de Pascal e está presente nos livros didáticos, sendo utilizado fortemente como ferramenta em outros conteúdos de matemática. Entre estes conteúdos, podemos citar: probabilidade, binômio de Newton, aplicações em aritmética, na álgebra e geometria entre outros.

Atividade 2 – Explanar a construção do Triângulo de Pascal:

Para construir o triangulo de Pascal é utilizanda a fórmula de combinações simples que é expressa da seguinte forma $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$,

assim temos *n* o numerador que é a linha e *p* o denominador que é a coluna

$$\binom{linha}{coluna} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Assim, o triângulo de pascal é expresso da seguinte maneira

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	$\binom{0}{0}$					
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
Linha 2	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	

Como já temos conhecimento prévio como calcular combinações simples, iremos calcular as três primeiras linhas e as últimas os alunos irão com ajudar do professor. Para calcular, basta substituir os números binominais na fórmula $\binom{n}{p} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{p}!(\mathrm{n}-\mathrm{p})!}$.

Depois de terem calculado as outras 3 linhas do Triângulo de Pascal, a seguinte forma será obtida:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		

Para construção vamos fazer uma coluna de 1 com quatro linhas, depois disto vamos soma o 1 com o número consecutivo da mesma linha e o resultado ficara abaixo do número consecutivo que foi somado, Na primeira linha só temos o número 1 pra somamos, Observando o esquema anterior vemos que a próxima coluna é 1, Neste caso a linha acima vai ser 0, pois 1 + 0 =1. Depois somamos 1 + 1 = 2, e repetimos, o mesmo processo até o triângulo de Pascal ser obtido.

1 + 0

1 + 1

1 + 2

1 + 3

1 + 4

Depois de terem somado a primeira coluna com a segunda, temos a seguinte forma:

1
1 1
1 2
1 3
1 4

Em seguida somamos a segunda coluna com a terceira que vai sendo obtida através da soma das duas colunas.

1
1 1+0
1 2+1
1 3+3
1 4+6

2º MOMENTO

Atividade 1 – Realizar uma explanação das propriedades do Triângulo de Pascal na lousa utilizando o próprio triangulo de Pascal para exemplificar cada propriedade em seguida dar um exemplo de cada uma das propriedades.

(1) **Soma das linhas:** a soma das linhas é igual a 2^n

Utilizando o triângulo que foi construindo anteriormente vamos ter o seguinte:
linha 0: $1 = 2^0 = 1$ como a linha é 0, isto é, n = 0 desse modo $2^0 = 1$
linha 1: $1 = 2^1 = 2$
linha 2: $1+2+1 = 2^2 = 4$
linha 3 = $1+3+3+1 = 2^3 = 8$

Para verificamos, basta calcular os termos do triângulo de Pascal forma de números binominais

Linha 0 = $\binom{0}{0}$ = 1

Linha 1 = $\binom{1}{0} + \binom{1}{1}$ = 1+1 = 2

Linha 2 = $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$ = 1+2+1 = 4

(2) **Teorema das colunas:** A soma de todos os números de uma coluna até uma determinada linha, o resulta no número da próxima linha da próxima coluna.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Somando os números da segunda coluna até a quarta linha temos como resultado igual a 10. Isto é 1 + 2 + 3 + 4 = 10, na forma binomial, temos o seguinte:

$$\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\binom{3}{1}+\binom{4}{1} = \binom{5}{2} = 10$$

(3) **Teorema das diagonais**: A soma de todos números da diagonal até a uma determinada linha, resulta no número da próxima linha da última coluna a ser somada.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Somando os números da diagonal até a linha quarta da terceira coluna temos como resultado igual a 10. Isto é 1 + 2 + 3 + 4 = 10, na forma binomial, temos o seguinte:

$$\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

(4) **Relação de Stifel:** Diz que a soma de dois números da mesma linha do triangulo resulta no número abaixo do segundo número que foi somado com o primeiro número.

O número 10 é soma de 4 + 6 = 10. Observando no triângulo que está na lousa, percebemos que a soma de 4 e 6 satisfaz a propriedade.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	1					
Linha 1	1	1				
Linha 2	1	2	1			
Linha 3	1	3	3	1		
Linha 4	1	4	6	4	1	
Linha 5	1	5	10	10	5	1

Verificando a soma dois números em forma de números binominais temos que:

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

3º MOMENTO

Atividade 1 – Desenvolver o raciocínio lógico por meio da construção do Triângulo de Pascal e a participação ativa do aluno nas duas atividades propostas.

Observe na figura abaixo que temos uma coluna com cinco linhas de 1, e mais uma coluna, cujo elementos foram obtidas da soma da linha anterior a qual estão já que temos conhecimento prévio de como montar o triângulo de Pascal, agora complete as demais linhas e colunas:

1

1 1

1 2 __

1 3 __ __

1 4 __ __ __

__ __ __ __ __ __

1. Observando o triângulo acima qual propriedade que foi utilizada para obter as demais linhas? Explique o diz essa propriedade.

2. Qual padrão que podemos encontra no triângulo de Pascal?

3. Quais serão os números da 6º linha?

4. Somado todos números de uma diagonal qualquer até uma determinada linha do triângulo acima, obteremos qual número? O que podemos observar a partir do número obtido?

Atividade 2

Construir um Triângulo de Pascal de forma diferente ao que foi visto na atividade 1, quando o mesmo estava incompleto. Agora o triângulo de pascal será construído de forma prática. Iremos separa a sala em 5 grupo e cada grupo vai desenvolver o triângulo de pascal. Depois de tem construído cada grupo vai apresentar uma propriedade do triângulo de Pascal utilizando o triângulo que foi construído.

Triângulo de Pascal								
L/C	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5	Coluna 6	Coluna 7
Linha 0	1							
Linha 1	1	1						
Linha 2	1	2	1					
Linha 3	1	3	3	1				
Linha 4	1	4	6	4	1			
Linha 5	1	5	10	10	5	1		
Linha 6	1	6	15	20	15	6	1	
Linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1

5.2 DETALHAMENTO E ORIENTAÇÕES PEDAGÓGICAS PARA A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Primeiramente o professor fará uma abordagem histórica do conteúdo que vai ser estudado. Anteriormente foi estudado combinação simples e a partir desse conteúdo o aluno será motivado a construir o triângulo de pascal, de suas propriedades.

A abordagem histórica fica a critério do professor. Algumas perguntas sugeridas para nortear essa, por parte são como surgiu o triângulo de Pascal? Quais foram os matemáticos que contribuíram para o estudo do triângulo de Pascal? Quais aplicações contribuíram para outros conteúdos de matemática? Aqui pode ser utilizado para apresentação.

Depois da abordagem histórica, o professor explica como é a construção do triângulo de pascal que pode ser feita através do cálculo mental ou utilizando combinação simples. Neste caso vamos fazer os dois modos de maneira bem explícita para o aluno entender para que não haja dificuldade durante a construção.

Ao iniciar a construção o professor explicar que o triângulo é composto por linhas e colunas começar a montar as linhas e colunas conforme abaixo:

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
Linha 0	$\binom{0}{0}$					
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
Linha 2	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	

Já no segundo momento a explanação de cada propriedade será realizada forma clara usando o cálculo mental e em seguida usando os números binominais para verificação do resultado de cada propriedade.

Soma das linhas: o professor explicar que a propriedade soma das linhas é igual a uma potência de 2^n que é soma dos números de cada linha, utilizando o triângulo que foi construindo anteriormente vamos tem o seguinte:

linha 0 = 1 = 2^0 = 1 como a linha é 0, isto é, n = 0 desse modo $2^0 = 1$

linha 1 = 2 = 2^1 = 2

linha 2 = 1 + 1 = 2^2 = 4

linha 3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8

Teorema das colunas: O professor explicara o teorema utilizando o triângulo de pascal para mostra aos alunos que os números da coluna 1 que estão sendo destacado através do pincel vermelho até a quarta linha (1 + 2 + 3 + 4 = 10) será somado resultando no número da próxima linha da próxima coluna, para o aluno entender bem faça pelo menos dois exemplos ou mais, depois faça a verificação do resultado através dos números binominais.

Teorema das diagonais: Neste teorema utilizando novamente o triângulo de pascal o professor trabalhar com as diagonais, usando uma linha vermelha ou circular os números da diagonal para descartá-los em seguida somamos números até linha desejada, o resultado dar somar dos números que foram destacados será o número da próxima linha abaixo do último número a ser somado da diagonal. Faça pelo menos dois exemplos ou mais, depois faça a verificação do resultado através dos números binominais.

Relação de Stifel: Na relação de Stifel não tem muita dificuldade para entende-la, neste caso o docente explicara ao aluno que através da relação de Stifel podemos construir o triângulo de pascal, pois a soma de números da mesma linha resultara no número abaixo do segundo número que foi somado. depois faça a verificação do resultado através da formula de Stifel.

No terceiro momento são duas atividades referente ao triângulo de Pascal.

Atividade 1

A primeira questão é para o aluno completa as demais linhas e colunas através do conhecimento prévio que ele já adquiriu no primeiro momento da construção do triangulo de Pascal. Desse modo deixe responde livremente. Se estiver com dificuldade, explique para aluno que pode usar as propriedades do triângulo de Pascal, para preencher as demais linhas e colunas.

A segunda questão é respondida através da questão anterior, pois a propriedade que foi utilizada foi a relação de Stifel e depois deixar que o aluno explique com seu entendimento sobre a propriedade de Stifel.

Na terceira questão dê um tempo para que o aluno possa refletir, para que ele consiga associar com as propriedades do triângulo, buscando padrões diferentes através das propriedades. Já na quarta questão vamos utilizar o triângulo de pascal para obter a sexta linha utilizando a questão vamos obter a resposta.

A quinta questão refere o teorema da diagonal, o intuito dessa questão é deixa o aluno responde só utilizando os conhecimentos prévios que foi adquirido para responder à questão.

Atividade 2

cada grupo fica responsável por construir o triângulo de Pascal e explicar uma propriedade do triângulo, a construção será feita na cartolina para isto vamos usar os seguintes materiais: pincel, régua, lápis e caneta e a cartolina. Em seguida o professor orientar como será feita a construção do triângulo de pascal na cartolina que pode ser feita uma tabela com quadrados ou retângulo como mostra a tabela na página.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pesquisamos a história do triângulo de Pascal e fizemos um levantamento de todos os matemáticos em diferentes regiões do mundo, que contribuíram no desenvolvimento do mesmo e o usaram em outras áreas da matemática para resolver problemas de forma mais prática. Posteriormente, foi feita a explanação das propriedades de maneira explicita para o leitor entendê-la.

Nas aplicações utilizando triângulo de Pascal, abordemos algumas aplicações com propósito de o relacionamos a outros conteúdos da matemática assim corroborando para conhecimento no âmbito da matemática.

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou a criação de uma proposta didática para o Ensino Médio em que abordamos um pouco da história do triângulo de Pascal, a sua construção e as propriedades com finalidade de minimizar as dificuldades que o docente tem durante a explanação do conteúdo Em seguida elaboramos duas atividades com a finalidade de que comtemplem os objetivos da proposta didática. Visando a fornecer ferramentas para o que apresente o conteúdo de forma mais didática.

Além disso, podemos enfatizar que a proposta tem uma sequência didática que traz um detalhamento para orientar o professor no contexto didático para explanação do triângulo de Pascal. Dessa forma, o professor pode inserir outros métodos que permite explorar mais o conteúdo que será estudado.

Esperamos que este trabalho sirva como ferramenta para ajudar na explanação do triângulo de Pascal que está inserido no conteúdo de análise combinatória e binômio de Newton, e que convém a resolver outros problemas de outros conteúdos.

REFERÊNCIAS

AFFONSO, A. **O TRIÂNGULO DE PASCAL E O BINÔMIO DE NEWTON.** 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=56>. Acesso em: 06 dez. 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 19 nov. 2018.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2006. 624 p.

OLIVEIRA, A. R., et al. **Blaise Pascal**: Curiosidades sobre o Triângulo. 2018. Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/pasca_l/index.htm>. Acesso em: 20 abr. 2018

PULSKAMP, R. **THE ARITHMETIC TRIANGLE.** 2009. Disponível em: <https://www.cs.xu.edu/math/Sources/Pascal/Sources/arith_triangle.pdf>. Acesso em: 05 dez. 2018.

ROSADAS, V. D. S. **Triângulo de Pascal**: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica. 2016. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/28192/28192.PDF>. Acesso em: 03 set. 2018

SANTIAGO, T. P. **Triângulo de Pascal**: Aplicações no Ensino Fundamental e Médio. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/23383/1/Dissertação%20Final.pdf>. Acesso em: 03 set. 2018.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GREGO, Sérgio Emílio (Org.). **MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO.** São Paulo: Ática, 2002. 664 p.

SILVA, M. O. **Do Triângulo à Pirâmide de Pascal**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC, Bahia, 2015. 53p.

SILVEIRA, J. F. P. D. **O triângulo pascal é de pascal?** História da Matemática - UFRGS, 2001 Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>Acessado em 03 set. 2018.

SOUZA, J. **Novo olhar matemática.** 2. ed. São Paulo: Ftd, 2013. 320 p.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa:** como ensinar. Trad. Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.