UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SIMÃO GOMES VANDERLEY

UMA BREVE INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PLANA

ARAGUAÍNA
2018

SIMÃO GOMES VANDERLEY

UMA BREVE INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PLANA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

V235b Vanderley, Simão Gomes.
Uma Breve Introdução à Geometria Plana. / Simão Gomes Vanderley. – Araguaína, TO, 2018.
58 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2018.
Orientador: José Carlos De Oliveira Junior

1. História da Geometria. 2. Geometria Euclidiana Plana. 3. Teoremas de Pitágoras e Tales. 4. Teorema de Bramagupta. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

SIMÃO GOMES VANDERLEY

UMA BREVE INTRODUÇÃO À GEOMETRIA PLANA

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Alvaro Julio Yucra Hancco

Profa. Ma. Samara Leandro Matos da Silva

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado esperança e fé para acreditar que essa jornada fosse possível, pela força para lutar e chegar até aqui, vencendo as dificuldades encontradas pelo caminho, passando por cima das palavras negativas e perseverando na luta, pois é muito difícil para um jovem conciliar trabalho e estudo sem contar as dificuldades encontradas por morar em outo município; mas Deus me fez vencedor! Obrigado, senhor, por ter me dado força para retornar depois da desistência e por me levantar depois de tantos tombos.

Agradeço à Universidade Federal do Tocantins (UFT) por oferecer esses cursos de licenciatura em matemática que têm colocado tantos jovens no mercado de trabalho. Agradeço a todo corpo docente do curso de licenciatura em matemática por ter proporcionado conhecimento para minha profissionalização e me ajudado quando me encontrava com dificuldades e me acolheram em suas salas, nos corredores e até mesmo por redes sociais para tirarem minhas dúvidas. Em especial, agradeço ao professor Dr. José Carlos de Oliveira Junior, meu orientador, que encarou esse desafio de me orientar no meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Obrigado, professor, por ter separado um tempo para estar me ajudando. Fico muito agradecido por sua contribuição nessa reta final do curso.

Agradeço à minha querida esposa, Livanda Coelho da Silva Vanderley, por estar do meu lado e ter enfrentado essa barra juntamente comigo. Não posso deixar de agradecer alguns guerreiros que enfrentaram algumas batalhas comigo nesses anos todos aqui na Universidade Federal do Tocantins (UFT). Por esses motivos, agradeço aos meus amigos Jhonys Santa Rita, Lindomarcos Rodrigues Sousa, Gilberto Silva Oliveira, Gabriel Di Angelo Ferreira e José Oliveira, amigos esses que me ajudaram nos momentos de dificuldades. Obrigado, amigos, pelas palavras de apoio.

Não posso deixar de agradecer à minha família por ter me ajudado a chegar até aqui. Em especial, agradeço à minha mãe, Maria Conceição Gomes Silva Vanderley, e ao meu pai, Pedro Alcantara Alves Vanderley, pessoas humildes que se sacrificaram tirando muitas vezes da onde não tinham para me ajudar. Por isso, sou muito grato aos meus pais e aos meus irmãos, Simone Gomes Vanderley e Sanderley Gomes Vanderley, e aos meus sobrinhos que colaboraram ficando quietos para que eu pudesse estudar. E dizer que essa vitória não é só minha, mas também de vocês.

E, assim, concluo com a fala de Paulo em II Timóteo 4:7: ”combati o bom combate, acabei a carreira, guardei a fé”. Quero dizer muitíssimo obrigado a todos vocês.

''A ciência de maneira nenhuma nega a existência de Deus. Quando considero quantas e quão maravilhosas coisas o homem compreende, pesquisa e consegue realizar, então reconheço claramente que o espírito humano é obra de Deus, e a mais notável.''

Galileu Galilei

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar a elegância da geometria unida com a importância do conhecimento de que povos antigos utilizavam essa área, tendo como ponto de partida os povos babilônicos, indianos, egípcios, gregos e chineses. Além disso, apresentaremos alguns matemáticos importantes que realizaram estudos na geometria e forneceram contribuições, deixando a geometria como conhecemos hoje. A partir daí, serão abordados conceitos primitivos que são aceitos sem demonstração para a que, usando os postulados da determinação e da inclusão, enunciar a geometria usual, começando por ponto, reta e, então, abordando os conteúdos de ângulos. Na sequência, serão apresentados os polígonos triângulo, quadrilátero, hexágono, definindo perímetro e, depois, área dos polígonos, além de trazer exemplo de cálculo de área de diferentes formas. Trataremos acerca da fórmula de Heron que serve pra calcular a área de qualquer triângulo, utilizando seu semiperímetro. No final do trabalho, serão enunciados e demonstrados alguns teoremas importantes, a saber, Teoremas de Pitágoras, que tem cerca de 370 demonstrações e serão apresentadas duas neste trabalho, e o Teorema de Tales. Além desses teoremas, também é enunciado e demonstrado o Teorema de Bramagupta, um importante resultado dentro da geometria.

Palavras-chave: História da Geometria. Geometria Euclidiana Plana. Teorema de Pitágoras. Teorema de Tales. Teorema de Bramagupta.

ABSTRACT

This work aims to show the elegance of geometry together with the importance of the knowledge that ancient peoples used this area in antiquity, starting with the Babylonian, Indian, Egyptian, Greek and Chinese peoples. In addition, we will present some important mathematicians who have made studies in geometry and provided contributions, making geometry as we know it today. From this, primitive concepts will be approached that are accepted without demonstration for which, using the postulates of determination and inclusion, to enunciate the usual geometry, starting with point, straight and then approaching the contents of angles. In the sequence, the triangle, quadrilateral, hexagon polygons will be presented, defining perimeter and then area of the polygons, in addition to providing example of area calculation in different ways. We will deal with the Heron fórmula that is used to calculate the area of any triangle, using its semi-meter. At the end of the work, some important theorems will be enunciated and demonstrated, namely, Theorems of Pythagoras, which has about 370 demonstrations and will be presented two in this work, and Tales Theorem. In addition to these theorems, Bramagupta's Theorem is also stated and demonstrated, an important result within geometry.

Keywords: History of Geometry. Euclidean Geometry. Theorem of Pythagoras. Theorem of Tales. Bramagupta's theorem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A palavra Geometria vem do grego *Geo*, que significa Terra, e *metrium*, que significa medida. Na história da humanidade, é possível observarmos que o homem vinha utilizando alguns conhecimentos da matemática desde os tempos primitivos, como nos mostram as tábulas da babilônia, o papiro Rhinds (harnes), o papiro de Moscou e outros. Sem falar na quantidade de documentos que foram perdidos ou destruídos ao longo dos tempos, como é o caso dos escritos matemáticos da China antiga que foram queimados como podemos observar analisando a referência [3]. Isso são fatos abordados pelos autores Howard Eves na referência [3], Paulo Roberto Martins Contador na referência [1] e Carl B. Boyer na referência [2].

A presente monografia traz em seu segundo capítulo um pouco da história da matemática, onde o estudo é focado na área da geometria utilizada por povos antigos. Começaremos com os povos babilônicos, que habitavam as margens dos rios Tigres e Eufrates e tinham conhecimento bastante avançado de cálculo de área e até mesmo das relações métricas de um triângulo retângulo. A arqueologia já encontrou muitas tábulas de argilas com seus conhecimentos gravados, mas poucas delas já foram traduzidas, dentre essas há muitas peças que abordam conteúdos matemáticos.

Em seguida, apresentamos um pouco da história da matemática egípcia, um povo que possuía conhecimento matemático capaz de fazer demarcação de terras. Eles também tinham, assim como os babilônicos, conhecimentos das relações métricas de triângulos retângulos, e isso pode ser visto na história que conta que, depois de uma enchente do rio Nilo, as terras de sua margem ficavam boas para plantio. Mas, como a enchente tinha arrancado os marcos ou enterrado os puxadores de cordas, eles tinham que demarcar todas aquelas terras novamente e, para fazer isso, eles construíam triângulos retângulos com cordas.

Além desses dois povos, discutiremos sobre os indianos, que também tinham conhecimentos matemáticos que estão descritos no *sulvasutras*, dentre eles o conhecimento do cálculo de área e de volumes de objetos geométricos. Eles utilizavam esse conhecimento na construção de altares para seus deuses, e o tamanho do altar dependia da importância do deus que seria cultuado. Para isso, eles tinham a necessidade de fazer cálculos precisos para que o altar saísse corretamente, com medo da ira de algum deus.

Também é abordado acerca dos povos chineses, mas é falado pouco sobre eles por causa do modo que eles registravam seus conhecimentos, que era em material perecível e além disso um governante ainda ordenou a destruição dos livros formado por tais materiais. Por isso, o pouco que se sabe é através de um material que foi resgatado algum tempo depois.

Outro povo apresentado que o capítulo dois traz são os povos gregos, que foram os responsáveis pelo rigor demonstrativo na matemática para o qual, a partir daí, a matemática passou a ser considerada uma ciência, pois foram os gregos os responsáveis por reunir os conhecimentos de vários povos e dar carácter dedutivo a eles.

Ainda nesse segundo capítulo, apresentamos grandes nomes da história da matemática que deram contribuições importantes para a geometria. Trazemos Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides e algumas contribuições de cada um.

Já no terceiro capítulo, falamos sobre a geometria euclidiana plana, começando dos conceitos primitivos passando pelos primeiros postulados para, então, mostrar os conteúdos, partindo de conceitos mas simples como ponto, reta e plano até chegar nos polígonos. Na sequência, faço uma abordagem de como é calculada a área de alguns polígonos conhecidos de várias maneiras.

O quarto, finalmente, traz alguns teoremas famosos de grande importância na geometria e algumas demonstrações desses teoremas, onde dois deles estão entre os mais importantes resultado de toda a geometria plana.

Capítulo 2

Parte Histórica

Destacaremos, neste capítulo, uma breve história da geometria plana sob o ponto de vista da Babilônia, Egito, China, Índia e Grecia. Além de falar dessas nações que deram grandes contribuições para a geometria, também apresentaremos algumas contribuições de matemáticos importantes que revulocionram a matemática em sua época e escreveram seus legados na história. Este capítulo está baseado nas referências [1] , [2] e [3].

2.1 Babilônia

Conta a história que ao longo dos rios Tigres e Eufrates viviam os povos Babilônicos que, segundo Howard Eves em [3], no período de 2000 a.C a 1600 a.C, deveriam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, do triângulo retângulo, do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, além do volume de alguns sólidos geométricos. Os babilônicos tinham conhecimento também de semelhança de triângulos retângulos e já conheciam o Teorema de Pitágoras.

> Os babilônicos também tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, que a perpendicular baixada do vértice de um triângulo isósceles em que incidem os lados congruentes divide ao meio a base e que um ângulo inscrito em uma semi-circunferência é reto. (EVES, 2004, p. 61)

Os babilônicos faziam suas inscrições em argilas e hoje existem algumas coleções delas em alguns museus. Essas tábulas de argila contam a história dos povos babilônicos e possui muita história relacionada à matemática deles, mas poucas dessas inscrições já foram traduzidas. Tem tábulas tão antigas que nos levam para o segundo milênio a.C.

> Com a capacidade de ler textos cuneiformes das tábulas babilônicas escavadas, conclui-se que estas dizem respeito a todas as fases e interesses da vida diária e percorrem muitos períodos da história babilônica. Há textos matemáticos que datam talvez de 2100 a.C. no último período sumério. (CONTADOR, 2008, p. 203).

2.2 Egito

Existe registro que os agrimensores do Egito antigo, mais precisamente do tempo dos faraós, onde eles construíam triângulos retângulos com lados 3,4,5 com uma corda que era dividida em doze partes iguais com onze nós para demarcar ângulos retos. Esses homens que realizavam esse tipo de trabalho eram sacerdotes, mas diferente dos sacerdotes de hoje, esses personagens não tinham seu papel voltado à religião, mas eram homens que tinham conhecimento da astronomia, do calendário agrícola e de matemática. Eles eram conhecidos como puxadores de cordas e, como eles tinham conhecimento que o povo não tinha, eles possuíam um certo respeito da população e o papel fundamental de fazer as medições de terras, por exemplo, quando havia uma enchente à beira do rio Nilo, os marcos da terra eram soterrados ou arrancados e, então, esses importantes personagens faziam as marcações das terras novamente.

Um documento antigo, datado de aproximadamente três mil anos antes de Cristo, nos mostra que os egípcios tinham conhecimento sobre triângulos retângulos com as medidas diferentes do triângulo com lados 3,4,5.

> Nove dos que lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras e mostram que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3,4,5 é retângulo, mas que também acontecia o mesmo com os triângulos 5,12,13 e 20,21,29. (EVES, 2004, p. 87)

Segundo (CONTADOR, 2008), um documento importante do povo egípcio foi descoberto na tumba de Ramsés II, o famoso papiro de Rhind, que foi comprado por um escocês chamado Henry Rhind no ano de 1858 na cidade de Tebas, localizada à beira do rio Nilo. Esse documento está, atualmente, no museu Britânico de Londres. Ele é conhecido também como papiro de Ahmés, fazendo uma homenagem ao escriba Ahmés que foi quem copiou esse famoso documento. Segundo (CONTADOR, 2008), esse documento tem cerca de cinco metros de comprimento e quatorze folhas.

Apesar desse documento ter um conhecimento matemático, nele não está presente o Teorema de Pitágoras e nem o número π.

> O teorema de Pitágoras e nem o número π, embora não estejam presentes nos papiros conhecidos, talvez tenham sido usados mesmo inconscientemente, pois topógrafos quando queriam dividir terras e medir ângulos retos, usavam a regra 3, 4 e 5, mas sem conhecimento mais profundo da teoria. (CONTADOR, 2008, p. 70)

De acordo com (CONTADOR, 2008), sem o π, algumas construções como as pirâmides não seriam possíveis, mas os egípcios tinham conhecimento do cálculo de área de algumas figuras inclusive a do círculo. Eles chegavam a um valor bem próximo e ainda tinham uma aproximação para o número π igual 3,16.

> Cálculo de volume de alguns sólidos, áreas de triângulos, triângulos retângulos e trapézios já eram conhecidos, tantos quanto a área do circulo, era conhecida por aproximação; achavam que a área do quadrado de lado 8 unidades era a mesma de um circulo com diâmetro de 9 unidades.(CONTADOR,2008,P.71)

Os egípcios usavam a matemática de uma maneira intuitiva, apesar de eles terem obtido bastante conhecimento e assim intuitivamente eles iam usando a matemática apenas o suficiente para suprir suas necessidades.

> Um papiro com data aproximada de 1890 a.C traz o cálculo do volume de um trapézio que confere com os conceitos atuais, $V = \dfrac{h \cdot (a+b)^2}{3}$ onde h é a altura, a e b são os lados da base. A matemática egípcia, com disse não era colocada como ciência de pesquisa e educações, pois se resume a uma matemática aplicada, somente o suficiente para as necessidades. (CONTADOR, 2008, P.73)

2.3 Índia

Existem escavações arqueológica na Índia que dizem que ali existia uma civilização mais ou menos na mesma época em que, no Egito, as pirâmides estavam sendo construídas. Mas infelizmente não temos documentos matemáticos daquela época que comprovem isso. Pois um dos escritos matemáticos mais antigos da Índia é do século V.

> A queda do Império Romano do Ocidente tradicionalmente é situada no ano 476; foi neste ano que nasceu um dos mais antigos textos matemáticos indianos. É claro, entretanto, que tinha havido matemática na Índia antes disto - provavelmente antes mesmo da mistica fundação de Roma em 753 a.C. (BOYER, 1996, P.141).

Acredita-se que assim como no Egito tinha personagens que utilizavam cordas para fazerem figuras e demarcarem terra, na Índia também tivessem homens que realizavam esse tipo de trabalho com cordas.

> A Índia, como o Egito tinha seus ”esticadores de cordas”, e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construção de altares tomaram a forma de um corpo de conhecimento conhecido como sulvasutras ou ”regras de cordas”, sulva (ou sulba) refere-se às cordas usadas para medidas, e sutra significa o livro de regras ou aforismos relativo a um ritual ou ciência. (BOYER, 1996, P.141).

Os sulvasutra é uma obra que é formada por três versões, onde a mais conhecida delas é ”Apastamba”. Essa obra fala sobre a construção de ângulos retos com a utilização de cordas com medidas que hoje nós conhecemos como teorema de Pitágoras. Essas relações também foram encontradas na Babilônia e no Egito. Essa obra apresenta em sua segunda parte conteúdos semelhantes a conteúdos do segundo volume da obra ”Os elementos”.

No sexto século, viveram dois matemáticos hindus que escreveram livros, onde o mais antigo e importante foi Aryabhata, sua obra é parecida com a obra “os elementos” que foi escrita por Euclides oito séculos antes, a semelhança está no sentido de que tanto Euclides quanto

Aryabhata organizaram conhecimentos que já tinham sido usados, apesar dessa semelhança, elas se diferem no sentido de que “os elementos” é uma obra grande e bem organizada, já a Aryabbhatiya composta por 499 estrofes, é uma obra curta e praticamente a metade dela está errada.

> Isto é claro, é regra familiar que diz que se a/b=c/x, então x=bc/a, onde a é a ”medida”, b o ”fruto, c o ”desejo”, e x o ”fruto do desejo”. A obra de Aryabhata é na verdade uma miscelânea de coisas simples e complexas, corretas e incorretas. O estudioso árabe Al-Biruni, meio milênio mais tarde, caracterizou a matemática hindu como uma mistura de pedregulho e cristal valioso, uma descrição muito adequada para o Aryabhatiya. (BOYER, 1996, P.144).

A Índia ainda nos deu outras contribuições na matemática, voltadas para a representação do “nada” (zero) e para a trigonometria (valores para a função seno).

2.4 Grécia

Na Grécia foi onde a matemática nasceu, quando estamos abordando o nascimento da matemática na Grécia isso não quer dizer que antes disso a matemática na era usada, pois sabemos que os povos Babilônicos, Egípcios e Chineses já tinham conhecimento de bastante conteúdos matemáticos antes da Grécia, por causa disso que quando falamos do nascimento da matemática estamos falando do nascimento dela como uma ciência.

Como sabemos, a Grécia era dividida em cidades e estados onde algumas dessas cidades tinham governo democrático e foram surgindo alguns pensadores. Com isso eles sentiram a necessidade de explicar a natureza de uma maneira racional livre de mitos, o que ia de encontro à mitologia grega.

> A matemática não começou com os gregos, como vimos, ela já existia muito antes, tanto na mesopotâmia como no Egito e até mesmo na China, mas uma coisa é certa: com os gregos que tiveram início as demonstrações e as deduções, e foram pensadores como Tales, Pitágoras, Arquimedes, Euclides, Aristarco e Apolônio, entre outros, que fizeram a matemática como conhecemos hoje. (CONTADOR, 2008, P.90).

2.4.1 Matemáticos importantes para geometria

Tales de Mileto

Tales de Mileto foi um grego que viveu entre os seculos VI e VII antes de Cristo. Esse ilustre matemático foi considerado o primeiro pensador; era filoso, matemático, além de realizar trabalho como engenheiro e astrônomo, mas a parte da matemática que despertou o interesse de Tales foi a geometria e, assim, além de Tales se fazer perguntas sobre a natureza e sobre o ser humano ele também construiu seu legado como um grande geômetra e deixou sua contribuição para a matemática. Tales foi o primeiro a usar ângulo e depois disso a geometria ganhou mais uma grandeza, pois a partir daí ela tinha comprimento, área, volume e agora ângulo.

> Como matemático interessou-se pela Geometria e foi o primeiro a usar o ângulo como um ente matemático e, assim, a Geometria, a partir de Tales, passou a usar ou relacionar, além das grandezas comprimento, área e volume, o ângulo. (CONTADOR, 2008, P.193)

Tales também mostrou que todo e qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência ou através de três pontos não colineares.

> Tales mostrou que qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, ou, por três pontos não colineares sempre passa uma e somente uma circunferência, podemos então dizer que três pontos não colineares não só define um Triângulo, mas definem uma circunferência é circunscrita e o triângulo é inscrito.(CONTADOR,2008,P.193)

No legado de tales também está que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais assim como seus lados que tem um ponto em comum com a base; e que em duas retas que se intersectam os ângulos que estão opostos são iguais; é atribuído a ele também que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Alguns dos conceitos que são atribuídos a Tales já eram usados pelos egípcios antes, porem eles não fórmularam teoremas a esse respeito; já com Tales foi diferente e com simples teoremas surgiu a geometria moderna.

Conta a história que Tales foi um homem de negocio e fez muitas viagens. Em uma dessas viagens, Tales conquistou a admiração do rei do Egito (faraó) depois de ter medido a altura de uma pirâmide sem ser necessário fazer uma escalada nela, pois segundo alguns estudiosos ele utilizou um bastão em certa hora do dia e a partir daí fez seus cálculos através da sombra que o bastão e a pirâmide projetavam.

Acredita-se que ao chegar no Egito Tales ficou muito admirado com as pirâmides pois há muito a se pensar como de onde tinham vindo aquelas pedras enormes, como que elas tinham sido colocadas lá, quanto tempo levou pra fazer aquela construção?

Pitágoras

Pitágoras de Samos foi um ilustre matemático que nasceu no ano de 582 a.C. na ilha de Samos por isso é conhecido por Pitágoras de Samos. Foi um jovem que trilhou a estrada da matemática e deixou o seu legado.

Conta a história que em sua juventude mais precisamente com dezenove anos de idade Pitágoras saiu de casa para viajar para outras terras pois essa era a maneira que eles acreditavam que os jovens cresciam intelectualmente. Em sua viagem ele passou pela Babilônia uma sociedade antiga que ficava às margens dos rios Tigre e Eufrates, onde ele teve contato com sábios homens que tinham conhecimento da ciência de seu povo e evidentemente tinham muito a oferecer a esse jovem. Saindo dali, acredita-se que ele tenha ido para Índia outra civilização para ser visitada por quem queria adquirir conhecimento naquela época, onde ele teve contato com a religião budista que ele carregou por toda sua vida, por exemplo. Saindo da Índia, Pitágoras foi para o Egito onde passou boa parte de sua vida e teve contato com os sacerdotes egípcios que eram pessoas que tinham conhecimento da matemática do Egito.

Há quem diga que Pitágoras foi um aluno de Tales, porém Boyer duvida disso e explica isso falando acerca da diferença de idade entre Tales e Pitágoras.

> Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável da a diferença de meio século entre suas idades. Algumas semelhanças nos seus interesses podem ser facilmente explicadas pelo fato de Pitágoras ter também viajado pelo Egito e Babilônia - e possivelmente indo até a índia. (BOYER, 1996, P.33)

Na peregrinação de Pitágoras ele pôde contemplar não só conhecimento matemático mas também religioso, e acredita-se que durante sua jornada ele se estabeleceu, na maior parte do tempo, no Egito e assim ele pôde ter estudado com os sacerdotes Egípcios e ter conhecido as relações métricas de um triângulo retângulo que hoje são conhecidas como Teorema de Pitágoras.

Ao retornar para casa, Pitágoras se estabeleceu em uma região conhecida como Magna Grécia atualmente fica na costa da Itália e ali fundou a famosa escola pitagórica, uma instituição que trazia como sua logomarca o pentágono estrelado (pentagrama).

A história apresenta Pitágoras como uma figura obscura e isso acontece por causa de que muitas das bibliografias daquela época perderam-se até mesmo uma feita por Aristóteles, e as descobertas feitas por algum membro da escola pitagórica não era creditada ao descobridor e nem a Pitágoras mas sim à sociedade pitagórica, apesar de naquela época as descobertas serem creditadas ao mestre.

A escola pitagórica era conservadora e tinha um código de conduta duro, onde seus membros tinham que ser vegetariano porque o pitagorismo acreditava na doutrina de metempsicose onde se eles matassem um animal para se alimentar, poderiam estar matando a nova moradia do espirito de algum amigo que já tinha morrido. A ordem dos Pitagóricos não era voltada apenas para o estudo da matemática, mas também filosofia e religião.

Uma das grandes contribuições de Pitágoras juntamente com a escola pitagórica foi a descoberta do primeiro número irracional quando eles foram calcular o comprimento da hipotenusa do triângulo com os catetos medindo 1.

Euclides

Da história desse grande matemático não sabemos quase nada, pois não sabemos a cidade que ele nasceu, nem o ano do seu nascimento e nem da sua morte apesar de se acreditar que ela tenha ocorrido por volta de 300 a.C. Euclides foi professor e fundador da escola de matemática de Alexandria, ele fez estudos sobre Pitágoras dando uma forma e uma ordem ao seu trabalho.

Euclides foi o escritor de uma das mais importantes obras da matemática, chamada Os Elementos, uma obra que está dividida em treze volumes e tem um valor inestimável. Oitocentas edições pra ter uma ideia da sua grande importância em toda a história, Os Elementos é a segunda obra mais traduzida ficando atrás apenas da bíblia.

Hoje quando os alunos começam a estudar Geometria já se deparam com as teorias de Euclides pois foi sua obra que deu fundamento à geometria. É tanto que muitas pessoas pensam que os elementos trata só de geometria, mas esta obra também trata de outros ramos da matemática como álgebra e aritmética.

> Todos nós aprendemos matemática na escola e temos as primeiras noções de Geometria seguindo os teoremas de Euclides. Seus treze livros contém 30 definições e 465 proposições, e ao contrário do que muitos pensam, não trata apenas de Geometria, contendo também bastante teoria dos números. (CONTADOR ,2008, P.203).

O volume I dos elementos traz logo no seu inicio 48 proposições, além de axiomas, cálculos de áreas de figuras como quadrado, paralelogramo, triângulo e termina com uma demonstração do famoso teorema de Pitágoras. Esse volume mostra algumas definições que para muitos não seriam necessárias, mas essas definições são essenciais pois nesse capítulo acaba sendo abordado todo conteúdo de equações do primeiro grau e ainda começa a fazer o alicece pra álgebra no futuro.

> Os axiomas de Euclides não só parecem simples e evidente como o são e seria até desnecessários escrever tais princípios, mas como tudo tem um começo, este foi o começo escolhido por Euclides. Esses axiomas encerram toda resolução de equação do primeiro grau e servem para dedução de fórmula que generaliza a resolução de uma equação do segundo grau; são axiomas que formam a base da Álgebra que que viria a florescer anos mais tarde. (CONTADOR,2008,P.204)

O segundo volume de elementos de Euclides apresenta 14 proposições, este volume trata de transformação de áreas, álgebra geométrica além das propriedades distributiva, associativa e comutativa da multiplicação, traz também o teorema de Pitágoras com algumas identidades algébricas e proposições que os gregos não aceitavam e a resolução da equação do segundo grau.

O volume III da obra Os Elementos traz 39 proposições que tratam da geometria referente ao circulo, do raio, assim como da corda, tangente, secante e do diâmetro.

> Livro IV: (16 proposições) Sobre construção com réguas e compasso de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinzes lados, inscrição e circunscrição desses polígonos a um circulo. (CONTADOR,2008,P.209).

E assim podemos observar que Euclides foi reunindo diversos ramos da matemática para montar a obra que ficou como o seu legado. Foi considerada a mais importante obra da matemática, um legado tão grandioso que foi atravessando os tempos e hoje mesmo depois de um pouco mais de dois milênios ainda continua sendo uma de grande importância e fundamental para a geometria, seu reconhecimento é tão notório que Euclides é considerado o pai da geometria.

2.5 China

A civilização chinesa no vale dos rios Iang-tse e rio amarelo é bem mais antiga do que a civilização grega, porém não é tão antiga como as civilizações que viviam nos vales dos rios Tigre e Eufrates (Babilônia) e no vale do rio Nilo (Egito).

Apesar da civilização chinesa ser da época da egípcia e babilônica e ter feito observações astronômicas, e ainda ter listado os doze signos do zodíaco, ela não é tão merecedora de confiança em seus escritos.

> [...] testemunho de cronologia referente à China são menos merecedores de fé do que os relativos ao Egito e Babilônia. Afirmações quanto a terem os chineses feito observações astronômicas importantes, ou descrito os doze signos do zodíaco, pelo décimo quinto milênio a.C. São certamente infundadas, mas uma tradição que coloca o primeiro império chinês em 2750 a.C. aproximadamente não é absurda. Outra avaliações mais modestas coloca as civilizações primitivas da China por volta do ano 1000 a.C. Datar os documentos matemáticos da China não é nada fácil, [...]. (BOYER, 1996, P.133).

Hoje, temos que pode ser encontrado muito pouco material que trata de como era usada a matemática na China antiga, pois eles escreviam em bambus, que por serem um material perecível não dura muito tempo além de que no século III a.C. um governante chinês mandou que tocassem fogo nos livros com medo que outros povos invadissem a China.

> [...] o egotista imperador Shi Huang-ti ordenou em 213 a.C. uma lamentável queima de livros. A despeito de ameaças e represálias severas, o ditador certamente não foi levado a efeito completamente; mas como muitos dos livros queimados foram reconstituídos memorias, hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior àquela data infeliz. Por consequência, muitos de nosso conhecimento sobre a matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de textos originais. (EVES, 2004, P.241).

Além da dificuldade de se encontrar material da matemática chinesa, muitos estudiosos por não conhecerem a língua chinesa, tinham que basear seus estudos em obras traduzidas por pessoa de outra nação.

Capítulo 3

Geometria Plana

Nesse primeiro momento vamos abordar alguns conceitos primitivos que dão uma base para a geometria plana e a partir daí faremos um estudo partindo de conceitos mais simples até chegar nos mais complexos. Começaremos falando dos conceitos primitivos que são o ponto, reta e plano. Este capítulo está baseado nas referencias [4] e [5].

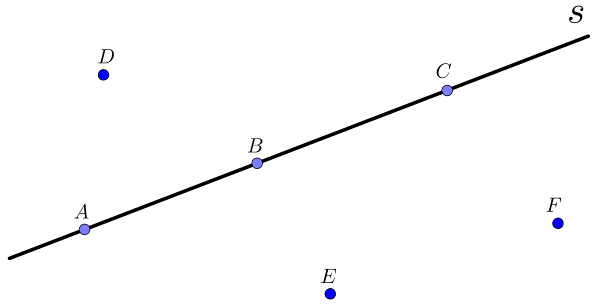
Os conceitos primitivos são postulados e axiomas da geometria que aceitamos como verdadeiros sem necessidade de uma demonstração rigorosa onde o nosso primeiro é o ponto. O ponto é o elemento da geometria que não possui dimensão. A reta, por sua vez, é o elemento da geometria que possui apenas uma dimensão (unidimensional), e o plano é um elemento bidimensional (duas dimensões).

Como tudo na matemática tem sua representação, devemos saber que temos nossas formas de representações para ponto, reta e plano, onde sempre que estivermos falando de plano usaremos letra latina (do nosso alfabeto) maiúscula, reta usaremos letra latina minuscula e para o plano usaremos letras gregas minúscula.

3.1 Primeiros Postulados

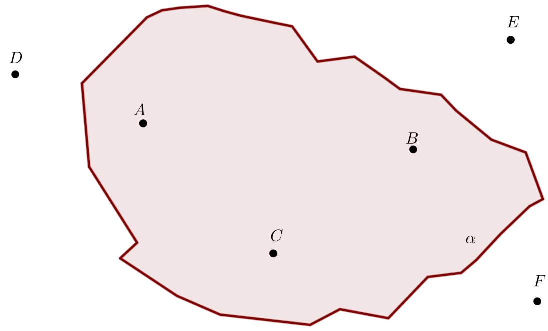
Postulado da existência: diz que "1ª em uma reta assim como fora dela exitem infinitos pontos. 2ª em um plano assim como fora dele existe infinitos pontos."

Vamos exemplificar. Na figura a seguir, os pontos A, B, C pertencem a reta s e os pontos D, E, F não pertencem a reta s. Em outras palavras, a reta s passa pelos pontos A, B, C mas não passa pelos pontos D, E, F.



Fonte: Arquivo Pessoal.

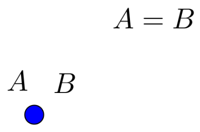
Os pontos A, B, C pertencem ao plano α, e D, E, F não pertencem ao plano α.



Fonte: Arquivo Pessoal.

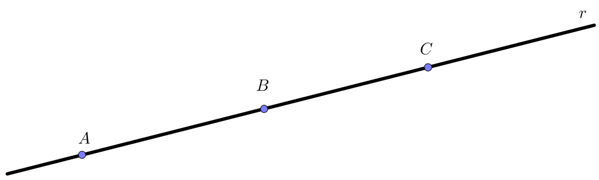
Posição de dois pontos e ponto e reta: "dados dois pontos A, B, então A é distinto de B (A diferente de B) ou A e B são coincidentes". Se A e B são iguais, então A e B são pontos coincidentes, ou seja, A e B são o mesmo ponto, mas com dois nomes. "dado um ponto e uma reta, então ou o ponto está na reta (a reta passa pelo ponto) ou o ponto está fora da reta (o ponto não pertence a reta)".

Fonte: Arquivo Pessoal.



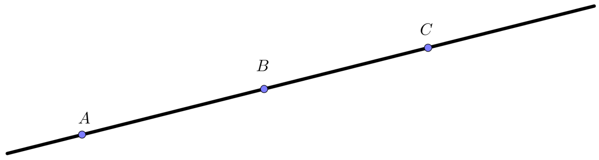
Fonte: Arquivo Pessoal.

Pontos colineares e pontos coplanares: os pontos A, B, C são ditos pontos colineares se uma reta r passar por eles, ou em outras palavras, se A pertence a reta r, B pertence a reta r e C pertence a reta r, ou seja, pontos colineares são pontos que pertencem a mesma reta. Já os pontos coplanares não precisam pertencer a mesma reta mas sim ao mesmo plano, ou seja, dados os pontos D, E, F, eles são ditos pontos coplanares se D pertencer ao plano alfa, E pertence ao plano alfa e F pertence ao plano alfa, se todos os pontos pertencerem ao plano alfa, então eles são pontos coplanares.



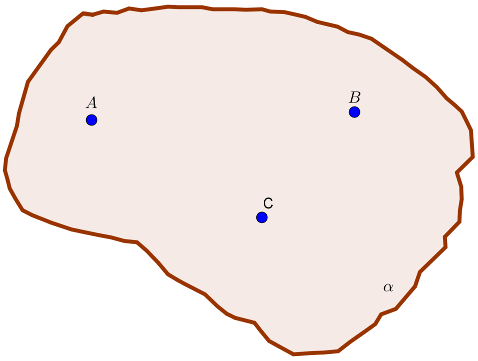
Fonte: Arquivo Pessoal.

Postulado da determinação: o postulado da determinação é dividido em duas pastes onde a primeira é da determinação da reta e diz “dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passar por eles”. Ou seja dado os pontos A, B eles determinam uma única reta r que passa por eles ou seja A pertence a r e B pertence a r daí tem se que a reta $r = AB$.



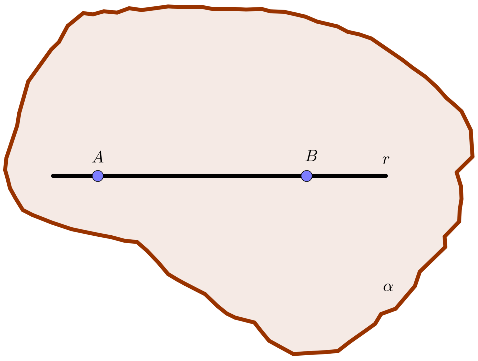
Fonte: Arquivo Pessoal.

A segunda parte do postulado fala sobre o plano onde diz que “Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles”. Ou seja A, B, C sendo A diferente de B diferente de C e não coplanares determinam um único plano alfa que passa por eles.



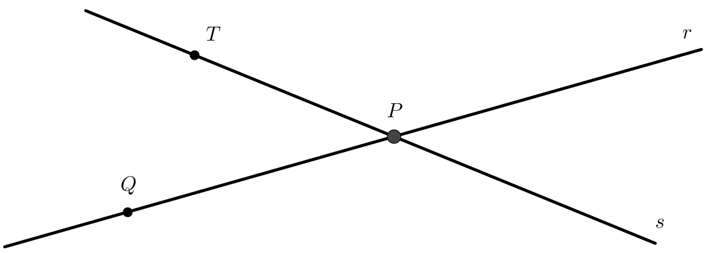
Fonte: Arquivo Pessoal.

Postulado da inclusão: “Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano”. Ou seja dado os pontos A e B com A diferente de B e A e B pertencentes a reta r, se A e B pertence ao plano alfa, então a reta r pertence ao plano alfa.



Fonte: Arquivo Pessoal.

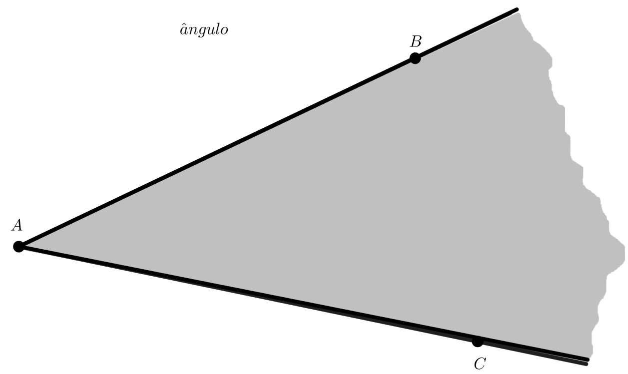
Retas concorrentes: “Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas tem um único ponto em comum”. Ou seja dados os pontos Q, P, T não colineares podemos usar o postulado da existência para definir duas retas distintas e não paralelas onde os pontos Q, P serão pertencentes a reta r e os pontos P, T serão pertencentes a reta s, daí pelo postulado da existência temos duas retas. Note que o ponto P é um fator comum tanto a reta r como a s e se P pertence a r e s e as retas r e s são retas distintas, temos que P é o ponto de intersecção de r e s, daí concluímos que r é concorrente a s.



Fonte: Arquivo Pessoal.

3.2 Ângulo

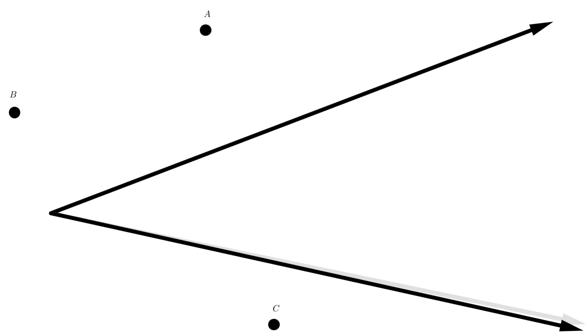
Chamamos de ângulo não só a inclinação de uma reta em relação a outra, mas todos os pontos de uma região que está localizada entre duas semi-retas distintas e que pertence a retas diferentes que tem sua origem em um mesmo ponto.



Fonte: Arquivo Pessoal.

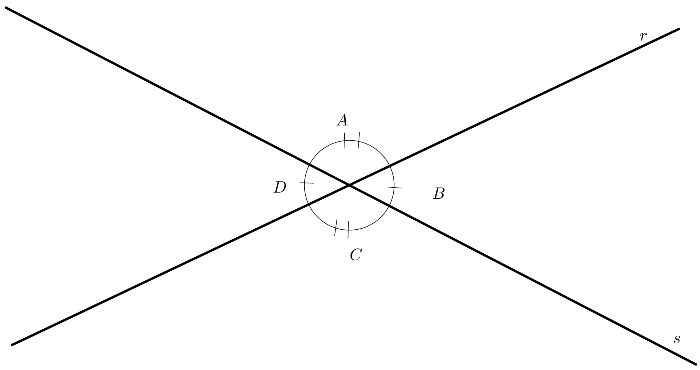
Os elementos de um ângulo os lados que são formados por duas semi-retas distintas com mesma origem e o vértice que é o ponto comum a essas semi-retas.

Como um ângulo é o conjunto de todos os pontos que estão em uma região entre duas semi-retas, temos também outra região que não pertence a esse ângulo que é a união de todos os pontos que estão no exterior de um ângulo.



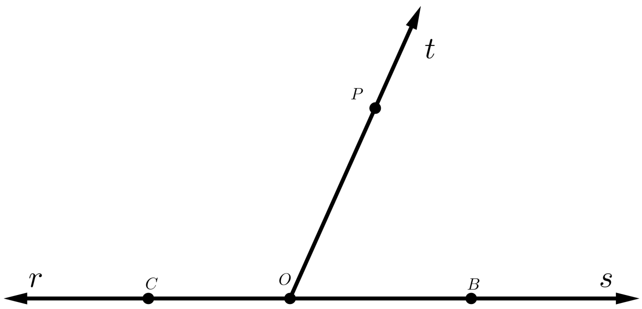
Fonte: Arquivo Pessoal.

Chamamos de ângulos opostos pelo vértice os ângulos que tem seus vértices em comum e um é o reflexo do outro; se isso ocorre, falamos que esses ângulos são o.p.v. “Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, o lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro”. (DOLCE E POMPEO,2005,P.22.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Considere as semi-retas $r = OP$, $s = OB$ e $t = OC$ onde a semi-reta t é oposta a semi-reta s, chamamos de suplemento do ângulo formado pelas semi-retas r e s o ângulo formado pelas retas r e t e como a semi-reta r é comum aos dois ângulos dizemos que o ângulo formado por r e t é suplementar adjacente do ângulo formado por r e s.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Um ângulo pode ser classificado como agudo, reto e obtuso onde o ângulo agudo é menor que noventa graus, o reto é igual a noventa graus e o obtuso é maior que noventa graus.

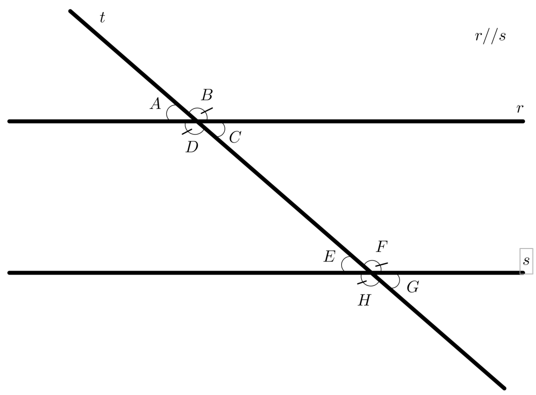
> Ângulo reto é todo ângulo congruente a seu complementar adjacente. Ângulo agudo é o ângulo menor que o ângulo reto. Ângulo obtuso é o ângulo maior que o ângulo reto.(DOLCE E POMPEL,2005,P.26)

Um ângulo assim como qualquer grandeza matemática pode ser medido e o valor da sua medida é chamado de amplitude, é muito comum falarmos que a medida de um ângulo é grau, porem essa não é a única maneira de se medir um ângulo pois ele tem outras medidas como o minuto onde $1^o = 60'$ ou $1' = \frac{1^o}{60}$. Além dessas medidas, temos ainda o segundo que é $1' = 60''$ ou $1'' = \frac{1'}{60}$ que é o mesmo que $1'' = \frac{1^o}{3600}$. Temos também o grado, onde $1gr = \frac{90^o}{100}$ dessa medida também tem o centigrado que é a centésima parte de um grado ou seja $1gr = \frac{1gr}{100}$ e também o decimiligrado que é a decima dezena de milhar de um grado ou em outras palavras $1gr = \frac{1gr}{10000}$.

Em geral, associamos a medida de um ângulo com uma letra grega qualquer, por exemplo, o α onde podemos fazer uma classificação de ângulos de acordo com a medida de α. Se $\alpha = 0^o$ classificamos como ângulo nulo, $0^o < \alpha < 90^o$ como ângulo agudo, $\alpha = 90^o$ como ângulo reto, $90^O < \alpha < 180^O$ como ângulo obtuso e $\alpha = 180^o$ como ângulo raso.

3.3 Ângulos Formados por duas Retas Paralelas Cortadas por uma Transversal

Os ângulos formados por dua retas paralelas cortadas por uma transversal se relacionam diretamente.



Fonte: Arquivo Pessoal.

As retas r e s são paralelas e a reta t é transversal as retas r e s, como a reta t corta as retas r e s os ângulos formados pelas retas t e r tem ligação direta com os ângulos formados pela reta t e s mesmo que $r \neq s$. E isso só acontece porque $r//s$, isto é, as retas r e s estão no mesmo plano e nunca se intersectam (elas são paralelas).

Os ângulos a, b, c, d são formados pelas são formados pelas retas r e t e nesse caso temos que $a + b = 180^o$ e $c + d = 180^o$ e daí substituindo $c + d$ no lugar de 180^o na primeira equação temos que $a + b = c + d$ se voltando a figura acima temos que $a \equiv c$ isso quer dizer que a e c tem a mesma medida e então dizemos que a é congruente a c e isso é verdade pois os ângulos a e c são ângulos opostos pelo vértice. Da mesma maneira, acontece com os ângulos b e d, pois se subtrairmos c nos dois lados da equação $a + b = c + d$ fica $a + b - c = c + d - c$, mas como já sabemos a tem o mesmo valor de c, então temos que $b = d$ daí podemos concluir que $b \equiv d$. Analogamente podemos fazer o estudo dos ângulos formados pelas retas s e t e chegaremos que os ângulos $e \equiv g$ e $f \equiv h$.

Então como já foi abordado antes os ângulos a, b, c, d se relacionam com os ângulos e, f, g, h. Neste primeiro caso temos que os ângulos a e E são correspondentes, assim como os ângulos b e f, c e g, d e h eles se corresponde por que as retas $r//s$ que são cortadas por t que é transversal elas formando tais ângulos e assim se a reta s for transportada parra cima da reta r esses ângulos correspondentes vão ficar na mesma posição, e assim falamos que esse ângulos são correspondente da mesma posição e assim temos que $a \equiv e$, $b \equiv f$, $c \equiv g$ e $d \equiv h$.

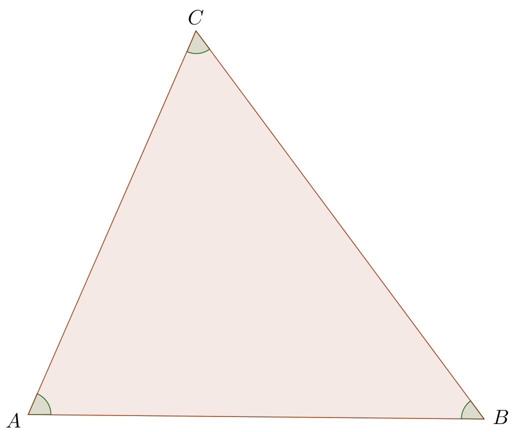
Também temos o caso dos ângulos colaterais onde temos que b e g são ângulos colaterais, da mesma forma que os ângulos c e F, a e h, d e e, em outras palavras são ângulos que somados seu resultado é 180^o ou seja $b + g = 180^o$, $c + f = 180^o$, $a + h = 180^o$, e $d + e = 180^o$.

E por fim temos o caso dos ângulos alternos interno e alternos externos neste caso temos que d e f são ângulos alternos internos assim como c e e que também são alternos internos e os ângulos a e g são ângulos alternos externos da mesma forma que b e h são ângulos alternos externos e assim temos que ângulos alternos internos são ângulos congruentes e alternos externos também são ângulos congruentes, em linguagem matemática $d \equiv f$, $c \equiv e$, $b \equiv h$ e $a \equiv g$.

3.4 Figuras planas

Triângulo é uma figura plana que recebe esse nome por causa da quantidade de ângulos que possui.

Consideremos os pontos coplanares e não colineares A, B, C e tracemos os segmentos de retas AB, BC e AC, a união desses três segmentos forma uma figura plana que é denominada de triângulo ABC.

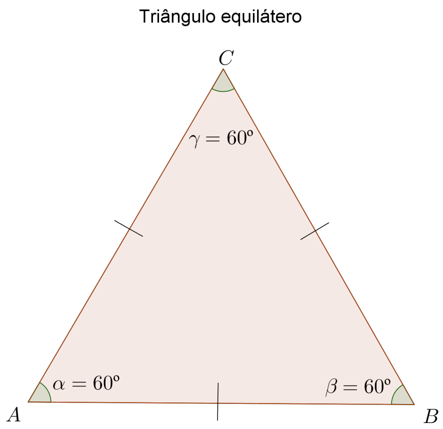


Fonte: Arquivo Pessoal.

Os elementos desse triângulo são: os lados AB, BC e AC, os vértices A, B e C e os ângulos $A\widehat{B}C$, $A\widehat{C}B$ e $B\widehat{A}C$.

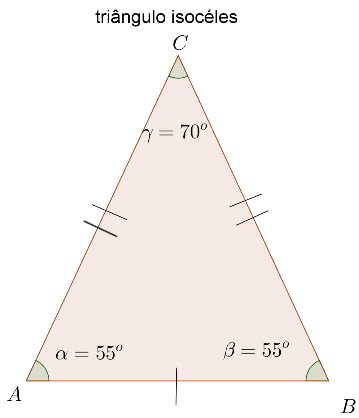
Os triângulos podem ser classificados de acordo com suas características.

Triângulo equilátero é aquele que tem duas características importantes: a primeira, é referente aos seus lados onde todos têm as mesmas medidas, e a segunda é referente aos seus ângulos internos que todos têm as mesmas medidas, ou seja, todos medem 60^o (admitimos aqui que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180^o. Veja o Teorema 3.1).



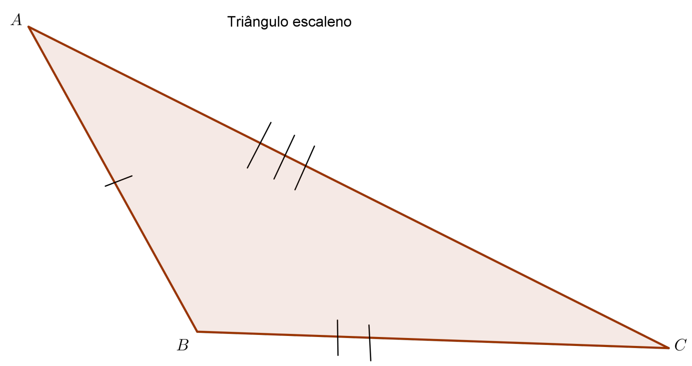
Fonte: Arquivo Pessoal.

Chamamos de triângulo isósceles todo triângulo que tem dois lados com as mesmas medidas. Esse triângulo também tem outra característica importante que é apresentada como um postulado na obra os elementos onde diz que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes ou, em outras palavras, têm a mesma medida; além disso ainda podemos classificar todo triângulo equilátero como isósceles, porém não podemos classificar todo triângulo isósceles como equilátero.



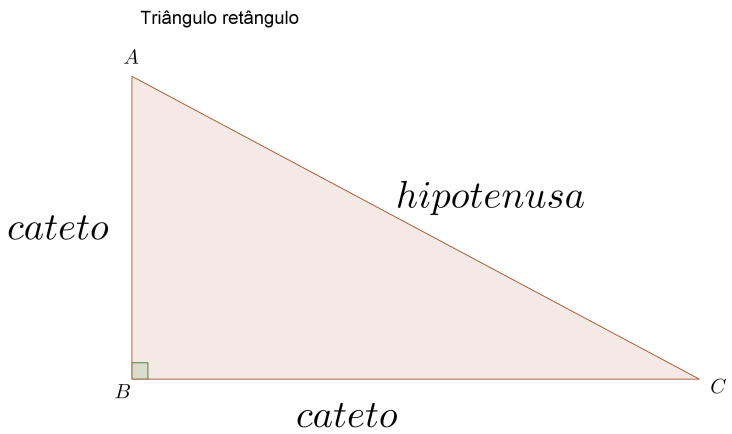
Fonte: Arquivo Pessoal.

Triângulo escaleno é o triângulo que tem como característica principal que as medidas de seus lados são todas diferentes.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Triângulo retângulo é um tipo especial de triângulo que tem como característica principal que um de seus três ângulos é retângulo (mede 90^o). Os lados desse triângulo têm nomes especiais, onde os dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e seu lado maior que é oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa.



Fonte: Arquivo Pessoal.

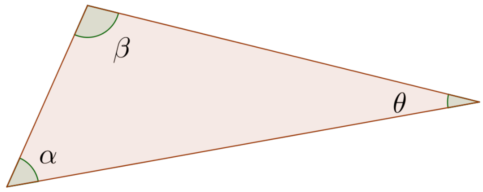
Acutângulo e todo triângulo que tem seus três ângulos agudos, ou seja, menor que 90^o. Obtusângulo é todo triângulo que tem um de seus ângulos obtuso, ou seja, maior que 90^o.

Um resultado importante sobre triângulos é o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a* 180^o.

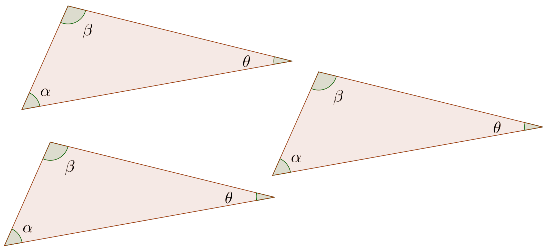
A demonstração a seguir está baseada na referência [7].

Demonstração: Seja o triângulo a seguir com seus ângulos internos α, β, γ:



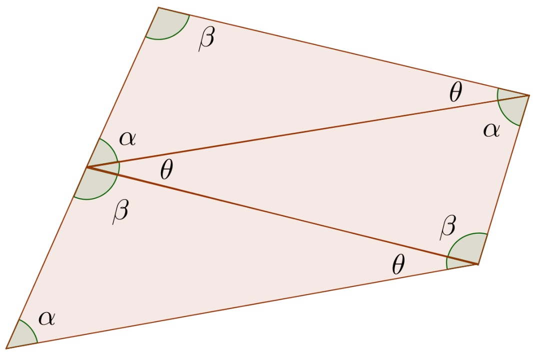
Fonte: Arquivo Pessoal.

Tomando mais dois triângulo iguais ao anterior temos:

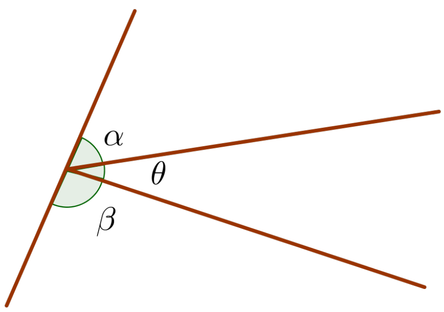


Fonte: Arquivo Pessoal.

Girando esse triângulos e unindo os vértices α, β, γ de uma forma que esses se tornem dois a dois adjacentes formamos um ângulo raso.



Fonte: Arquivo Pessoal.



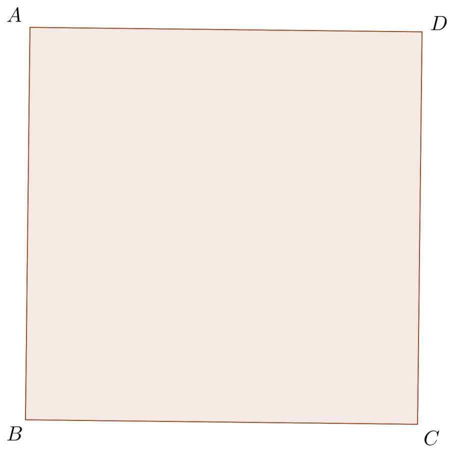
Fonte: Arquivo Pessoal.

E assim concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. $\square$

3.5 Polígono

Dado uma quantidade $n \geq 3$ qualquer de pontos não colineares, podemos utilizar o postulado da determinação para construir segmentos de retas e quando fazemos a reunião de todos os segmentos formamos uma figura que chamamos de polígono.

Como exemplos de polígonos, temos o quadrilátero que é um polígono que tem quatro lados, pentágono é um polígono que tem cinco lados, hexágono é um polígono que tem seis lados.



Fonte: Arquivo Pessoal.

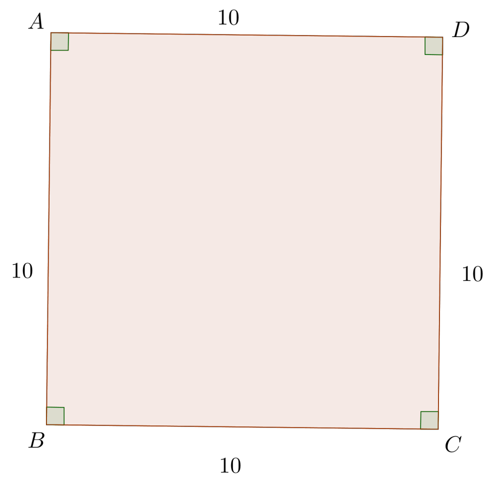
Em um polígono temos alguns elementos que são os vértice, os lados e os ângulos. Os vértice é o ponto de encontro de dois lados, o lado é o segmento de reta que liga dois pontos e o ângulo é toda região que está entre dois segmentos de retas consecutivos.

Os polígonos recebem nomes de acordo com o número de lados que eles tem.

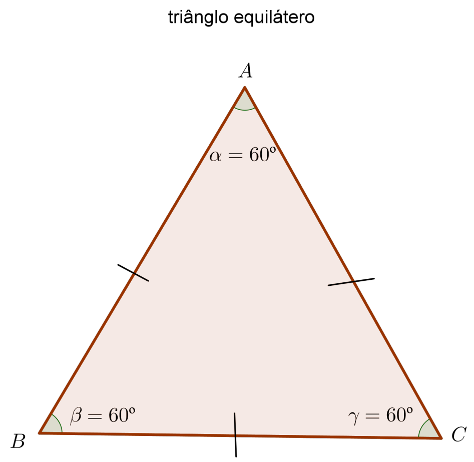
n=3	triângulo ou trilátero	3 lados
n=4	quadrângulo ou quadrilátero	4 lados
n=5	pentágono	5 lados
n=6	hexágono	6 lados
n=7	heptágono	7 lados
n=8	octógono	8 lados
n=9	eneágono	9 lados
n=10	decágono	10 lados
n=11	undecágono	11 lados
n=12	dodecágono	12 lados
n=15	pentadecágono	15 lados
n=20	icoságono	20 lados

Fonte: Arquivo Pessoal.

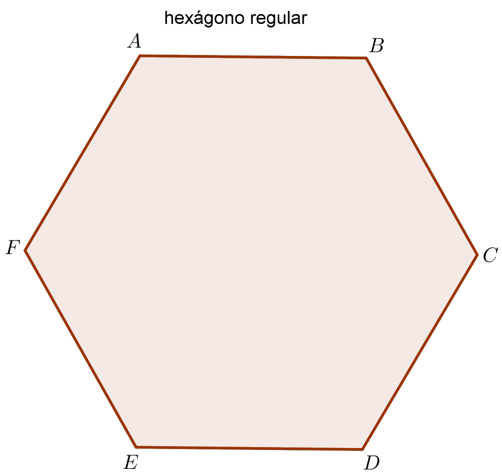
Chamamos de polígono regular todo polígono que tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos congruentes.



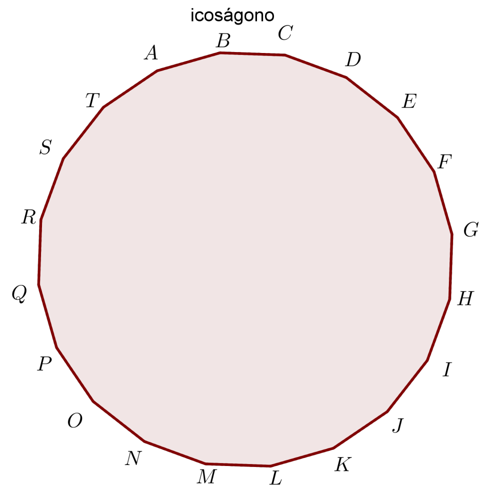
Fonte: Arquivo Pessoal.



Fonte: Arquivo Pessoal.



Fonte: Arquivo Pessoal.

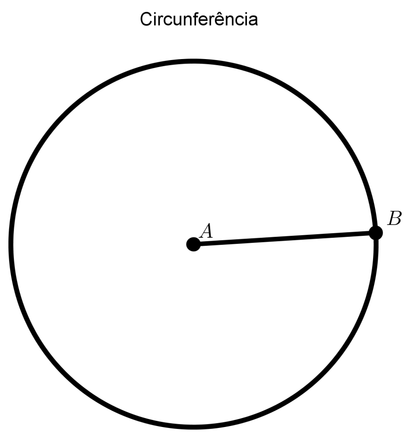


Fonte: Arquivo Pessoal.

3.6 Círculo e Circunferência

Circulo é a reunião de todos os pontos que estão na parte interior de uma circunferência, “porção de plano limitado por uma circunferência; circunscrição territorial; [...]”. (BUENO, 2007, P.168).

Circunferência é o nome dado a borda de um círculo. Segundo Silveira Bueno, circunferência é “curva plana e fechada cujos os pontos são equidistantes de um ponto interior chamado centro.” (BUENO,2007,P.168). A essa distância fixa, chamamos de raio da circunferência.

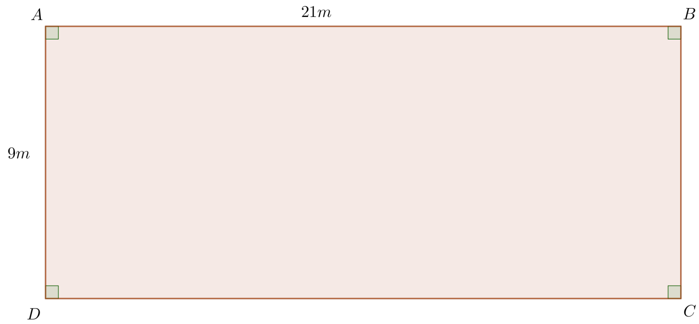


Fonte: Arquivo Pessoal.

3.7 Perímetro

Chamamos de perímetro de um polígono a soma das medidas de todos os seus lados. Utilizamos a letra p para representar o perímetro.

Exemplo 3.2. *João precisa cercar um terreno retangular como mostra na figura abaixo. Quantos metros de arame João gastará para cercar esse terreno com cinco fios de arame?*



Fonte: Arquivo Pessoal.

Para saber a quantidade de arame que João vai usar, antes precisamos calcular o perímetro da região a ser cercada, que nesse caso é

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$$
$$P = 21 + 9 + 21 + 9$$
$$P = 60m$$

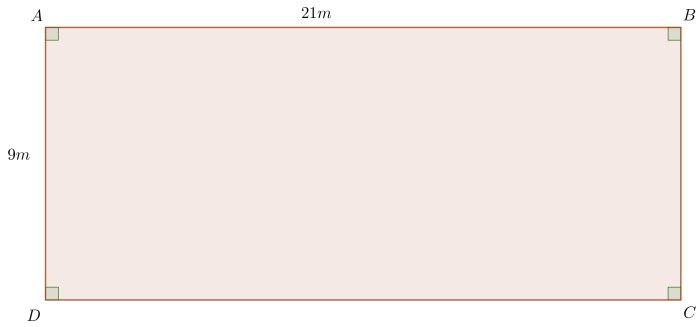
Então sabendo que o perímetro da região retangular é $60m$, basta multiplicar por 5 que é a quantidade de fios de arame que ele quer usar. Temos $60m \cdot 5 = 300m$. $\square$

3.8 Cálculo de Área

Nessa seção, faremos um estudo sobre os cálculos de áreas mais utilizados, e os resultados estarão baseados na referência [4].

Cálculo de área é um cálculo que fazemos para saber o quanto de unidade de área cabe no interior de uma região (figura geométrica plana), onde depois de feitos esses cálculos encontramos um número real positivo, ou seja, o cálculo de área nunca resultará em um número negativo.

Quando estamos calculando a área de um determinada região podemos nos deparar com uma região em que podemos ter duas regiões uma região A e a outra B iguais portanto suas áreas serão iguais ou podemos ter uma região B está contido em A e neste caso a área de A será maior que a de B além de ter o caso que uma região seja a soma de duas regiões e nesse casa temos a área é a soma das áreas $At = Aa + Ab$.



Fonte: Arquivo Pessoal.

No cálculo de área utilizamos algumas fomas que depende muito do formato que representa a região que queremos calcular sua área que dependendo do seu formato temos que fazer o cálculo de área por partes e depois somar todas as áreas encontradas.

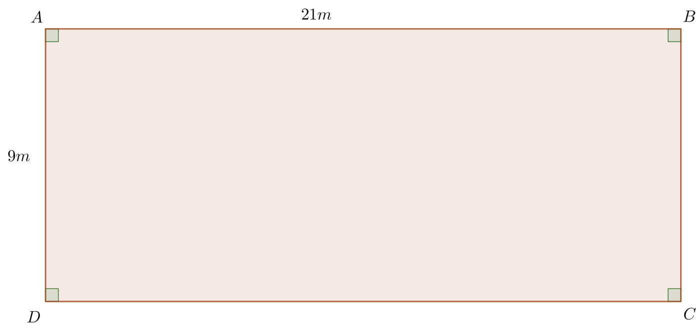
3.8.1 Quadriláteros

Temos diversos tipos de quadriláteros onde podemos fazer cálculo de área, entre os quadriláteros temos os que são convexos e os côncavos e, neste momento, faremos um estudo sobre os quadriláteros convexos, que são eles o retângulo, paralelogramo, trapézio e losango.

Área de retângulo

cálculo da área do retângulo: existe dois tipos de retângulo que receberam o nome de retângulo por causa dos seus ângulos internos que são todos ângulos reto o retângulo espichado é o famoso retângulo que todos conhecemos que tem os lados dois a dois congruentes, mas também temos o regular que também é conhecido por quadrado.

Para o retângulo espichado utilizamos a fórmula matemática do cálculo de área $A = B \cdot H$ onde A é a área B é a base do retângulo e H é a altura do retângulo.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Exemplo: A figura acima representa a área de um salão, quantas peças de porcelanas com as medidas $0,5mx0,5m$ serão necessário para o piso desse salão?

solução. primeiro devemos calcular a área desse salão.

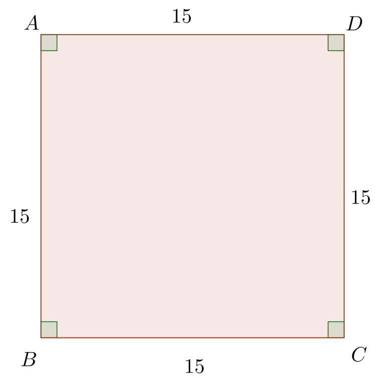
$$A = b \cdot h$$
$$A = 21 \cdot 9$$
$$A = 189m^2$$

Como cada peça de porcelana tem as medidas de $0,5mx0,5m$ então para cobri $1m^2$ de piso são necessária quatro peças.

Logo.

$$189 \cdot 4 = 756$$

então serão necessários 756 peça de porcelana. Para um retângulo regular nos podemos utilizar a mesma forma que é utilizado para um retângulo esticado que é $A = b \cdot h$ ou utilizar outra forma que é $A = l^2$ essa fórmula é basicamente a mesma do retângulo estica já que se trata de um retângulo regular que tem a medida da altura congruente a da base por isso que fica $A = b \cdot h$ mas com $h = b$ então é utilizado l pra representar o lado e daí temos $A = l^2$.



Fonte: Arquivo Pessoal.

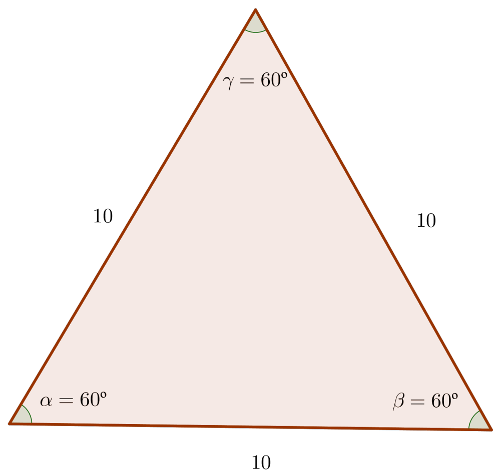
Exemplo: o cálculo de área da figura acima é calculado da seguinte maneira.

$$A = l^2$$
$$A = 15^2$$
$$A = 225u.m$$

Área de triângulo

cálculo da área do triângulo o cálculo da área do triângulo depende do tipo de triângulo, onde se o triângulo for isósceles utilizamos a fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ onde A é a área b é a base e h é a altura. E isso é algo claro já que um triângulo pode ser construído a partir de uma diagonal em um quadrilátero por isso a área de um triângulo é a metade da área de quadrilátero.

Se o triângulo for equilátero não utilizamos a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ pois para utilizar essa fórmula precisaríamos encontrar a altura antes que só aumentaria o trabalho por isso que temos uma fórmula especifica para esse tipo de triângulo $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, onde A é a área $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ é a medida da altura e l é a medida do lado que quando substituída na fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$ resulta na fórmula $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e assim tendo conhecimento dessas duas fórmulas podemos calcular a área de qualquer triângulo.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Exemplo 3.3. *A área do triângulo acima é calculado da seguinte maneira.*

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A = \frac{10^2\sqrt{3}}{4}$$
$$a = \frac{100\sqrt{3}}{4}$$
$$a = 25\sqrt{3}u.a.$$

ou

$$A \cong 43,3u.a.$$

Além dessa fórmulas, ainda podemos calcular a área de qualquer triângulo por meio da fórmula de Heron ou (Herão), Heron foi um matemático que viveu na famosa cidade conhecida por Alexandria no Egito e sua fórmula que ficou conhecida como fórmula de Heron $A = \sqrt{p[(p-a)(p-b)(p-c)]}$ onde p é o semiperímetro e a, b, c são as medidas dos lados do triângulo, o semiperímetro é a soma de todos os lados divido por dois, então $p = \frac{a+b+c}{2}$

Exemplo 3.4. *O cálculo de área do triângulo acima na fórmula de Heron fica.*

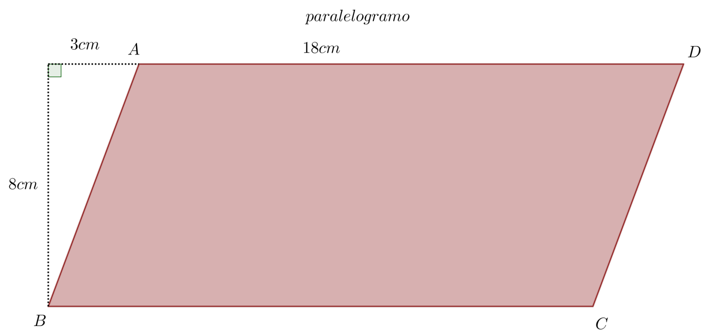
$$p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow p = \frac{10+10+10}{2} \Rightarrow p = \frac{30}{2} \Rightarrow p = 15$$

$$A = \sqrt{p[(p-a)(p-b)(p-c)]}$$
$$A = \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)}$$
$$A = \sqrt{15(5)(5)(5)}$$
$$A = \sqrt{1875}$$
$$A = 43,3u.a$$

Área do paralelogramo

Paralelogramo é um polígono formado por quatro segmentos de retas dois a dois paralelos, é bem parecido com um retângulo porem não possui nenhum ângulo reto seu nome origina dos seus saldos que são dois a dois paralelos.

para calcular a área de um paralelogramo existe duas fórmulas a primeira é pela fórmula do cálculo de área do retângulo $A = b \cdot h$ essa é a fórmula mais simples de se calcular a área de paralelogramo, a segunda forma é um cálculo de área por partes onde é calculado a área de duas regiões essa forma é mais trabalhosa pois a região é dividida em um retângulo e dois triângulos e depois é feito o cálculo de área do retângulo pela fórmula $A = b \cdot h$ e depois do triângulo pela fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ esse cálculo só é preciso ser feito uma vez pois a área do segundo triângulo é igual a do primeiro, daí é só somar a aula do retângulo com duas vezes a área do triângulo e o resultado encontrado é a área do paralelogramo.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Podemos fazer o cálculo da região representado pelo paralelogramo acima de duas maneiras a primeira pela fórmula do cálculo de área do retângulo.

$$A = b \cdot h$$
$$A = 18 \cdot 8$$
$$A = 144cm^2$$

A segunda maneira é considerarmos que tem dois triângulos congruentes junto ao paralelogramo de maneira que esse se torne um retângulo e depois subtrair a área dos triângulos.

$$A = B \cdot H$$
$$A = (3 + 18) \cdot 8$$
$$A = 21 \cdot 8$$
$$A = 168cm^2$$

calculando a áreas dos triângulos

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A = \frac{3 \cdot 8}{2}$$
$$A = \frac{24}{2}$$
$$A = 12cm^2$$

Como são dois triângulos congruentes então.

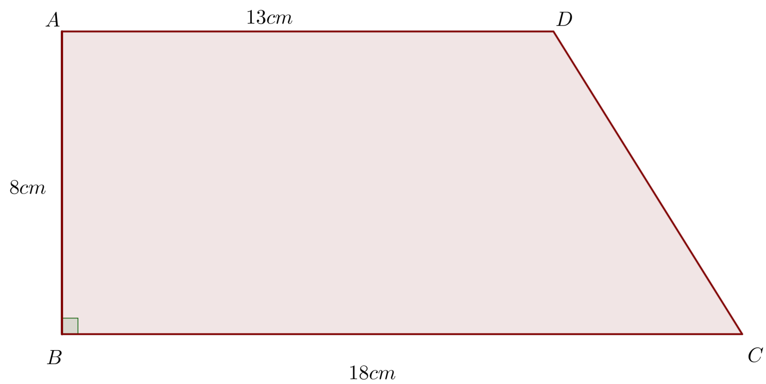
$$A = 12 \cdot 2 \Rightarrow A = 24cm^2.$$

Daí temos que a área do paralelogramo é igual a.

$$A = 168cm^2 - 24cm^2 \Rightarrow A = 144cm^2.$$

Área do trapézio

cálculo da área do trapézio é um quadrilátero que sua área pode ser encontrada por duas forma a primeira é pela fórmula do cálculo de área do trapézio $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ esse é o caminho mais simples para se calcular a área do trapézio, a segunda maneira é um cálculo de área por partes onde o trapézio será dividido em retângulo e triângulo e depois calculado a área do retângulo pela fórmula $A = b \cdot h$ e dos triângulos pela fórmula $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ e depois de feito isso é só somar todas as áreas e o valor encontrado é a área do trapézio.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Exemplo: podemos calcular a área da do trapézio acima utilizando a fórmula

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$
$$A = \frac{(18+13)\cdot 8}{2}$$
$$A = \frac{(31\cdot 8}{2}$$
$$A = \frac{248}{2}$$
$$A = 124cm^2$$

Outra maneira.

traçamos um segmento de reta ligando vértice D com a aresta BC de maneira que forme um ângulo reto e então fazemos o cálculo de área por partes, pois a figura será dividida em um retângulo e um triângulo.

Área do retângulo.

$$A = b\cdot h$$
$$A = 13\cdot 8$$
$$A = 104cm^2$$

Área do triângulo.

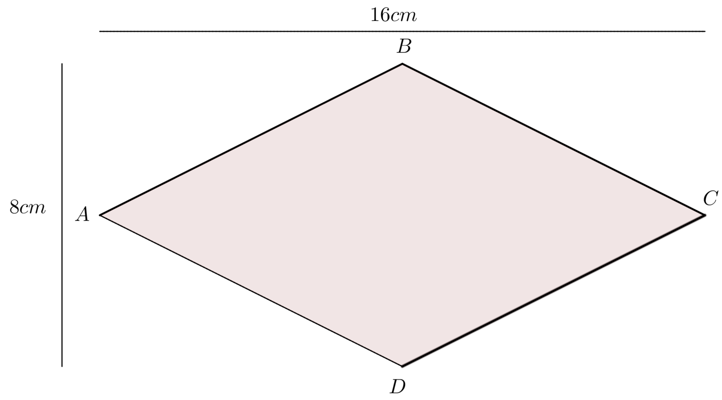
$$A = \frac{b\cdot h}{2}$$
$$A = \frac{5\cdot 8}{2}$$
$$A = \frac{40}{2}$$
$$A = 20cm^2$$

Somando a área do triângulo com a do retângulo temos.

$$A = 20cm^2 + 104cm^2$$
$$A = 124cm^2$$

Área do losango

cálculo da área do losango é um quadrilátero que podemos calcular sua área fazendo o produto entre suas diagonais pela fórmula $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ onde A é a área, d_1 é a medida da diagonal maior e d_2 é a medida da diagonal menor. O losango também é um paralelogramo e por se tratar de um paralelogramo podemos calcular sua área com a fórmula $A = b\cdot h$.



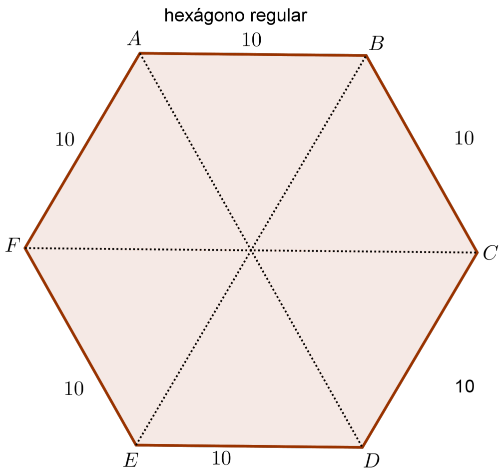
Fonte: Arquivo Pessoal.

Exemplo: cálculo da área do losango.

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$
$$A = \frac{8 \cdot 16}{2}$$
$$A = \frac{124}{2}$$
$$A = 64cm^2$$

Área do hexágono regular

Hexágono regular com lado medindo n, neste caso temos que a área do hexágono é 6 vezes a área de um triângulo equilátero com medida do lado igual a n e como já sabemos a área de um triângulo equilátero pode ser calculado pela fórmula $A = \frac{n^2\sqrt{3}}{4}$, e dessa forma podemos calcular a área do hexágono utilizando a fórmula $S = 6 \cdot A$ onde S é a área do hexágono e A é a área do triângulo equilátero e assim podemos deduzir a fórmula $S = \frac{6 \cdot n^2\sqrt{3}}{4}$ a mesma forma pode ser escrita como $S = \frac{3 \cdot n^2\sqrt{3}}{2}$ e essa é a fórmula que utilizamos para calcular a área de qualquer hexágono regular utilizando a fórmula $S = \frac{3 \cdot n^2\sqrt{3}}{2}$ onde S é a área do hexágono regular n é a medida do lado do hexágono.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Exemplo 3.5. *A área da figura acima é calculado de seguinte maneira.*

$$S = \frac{3 \cdot n^2\sqrt{3}}{2}$$
$$S = \frac{3 \cdot 10^2\sqrt{3}}{2}$$
$$S = \frac{3 \cdot 100\sqrt{3}}{2}$$
$$S = \frac{300\sqrt{3}}{2}$$
$$S = 150\sqrt{3}$$
$$S = 259,80u.a.$$

Outra fórmula de resolver é calculando a área de um triângulo já que sabemos que traçando as diagonais de um hexágono regular podemos dividi-lo em seis triângulos equiláteros congruentes e depois da área calculada é só multiplicar por seis e o resultado é a área do hexágono.

$$A = \frac{n^2\sqrt{\sqrt{3}}}{4}$$
$$A = \frac{10^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A = \frac{100\sqrt{3}}{4}$$
$$A = 25\sqrt{3}$$
$$A = 43.30127u.a$$

Daí,

$$S = 6 \cdot A$$
$$S = 6 \cdot 43,30127u.a.$$
$$S = 259,80u.a$$

Cálculo da área do círculo para calcular a área de uma região circular é feito através da fórmula matemática $A = \pi \cdot r^2$ onde A é a área π é uma constante com valor aproximado de $3,14$ e r é a medida do raio da circunferência e através dessa fórmula podemos calcular o valor de qualquer circulo.

Capítulo 4

Principais Teoremas

Na geometria, como em toda matemática, são apresentados muitos teoremas. Tendo em vista isso, neste capítulo, serão abordados alguns teoremas de grande importância da geometria e que são o objetivo principal deste trabalho como o teorema de Pitágoras, Tales e de Brahmagupta. Este capítulo será baseado nas referências [4], [6] e [8].

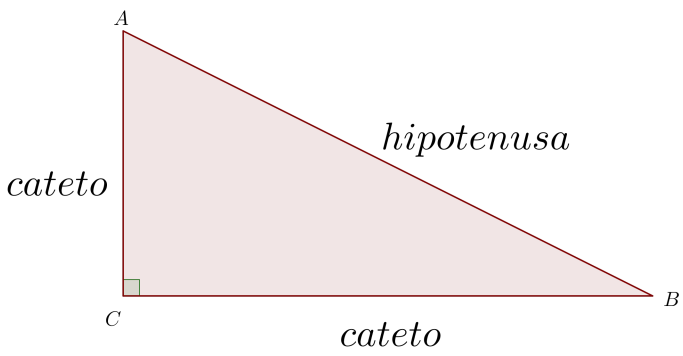
4.1 Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é um dos mais conhecidos teorema da matemática. Esse teorema é tão conhecido que muitos profissionais utilizam-no sem saber que conhecimento da matemática está por trás como, por exemplo, na construção civil onde pedreiros usam relações do teorema de Pitágoras para fazerem esquadrejamento de construções. Abaixo, enunciamos e provamos este teorema.

Teorema 4.1. *(Terema de Pitágoras) Seja ABC um triângulo retângulo com catetos iguais a b e c e hipotenusa igual a a. Então,*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

O teorema de Pitágoras fala a respeito de triângulo retângulo onde sabendo da medida de dois lado desse triângulo é possível encontrar a medida do seu terceiro lado com muita facilidade usando esse teorema.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Quando se trata do teorema de Pitágoras é muito importante sabermos que os catetos são sempre os lados que formam o ângulo reto e a hipotenusa é o lado que está oposta a ângulo reto além de ser o maior lado como mostra a figura acima.

A seguir, apresentamos uma demonstração do Teorema 4.6 que está baseada na referência [4], página 224.

Demonstração: Por semelhança de triângulo, temos que

$$b^2 = a \cdot n \tag{4.1}$$

e

$$c^2 = a \cdot m. \tag{4.2}$$

Agora, para provar o teorema, basta somar membro a membro das equações (4.1) e (4.2), como segue:

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2,$$

que é exatamente a igualdade dada pelo Teorema de Pitágoras. □

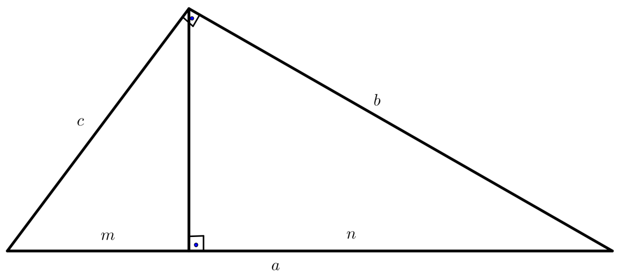
Observação 4.2. *Consideremos as relações métricas no triângulo retângulo a seguir.*

$$b^2 = a \cdot n \tag{4.3}$$

$$c^2 = a \cdot m \tag{4.4}$$

$$h^2 = m \cdot n \tag{4.5}$$

Essas relações são de grande importância.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Todas as outras relações podem ser encontrada através dessas três. Por exemplo, fazendo $(4.3)X(4.4)$ *membro a membro e usando a (4.5), temos:*

$$b^2.c^2 = an \cdot am \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot mn \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h \tag{4.6}$$

onde mn *que resulta do produto de (4.3) por (4.4) é igual a* h^2 *da (4.5).*

Também temos que em um triângulo retângulo, a soma dos inversos dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa, ou seja,

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}. \tag{4.7}$$

Podemos observar que isso é verdade, pois

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h^2} = \frac{1}{h^2} \tag{4.8}$$

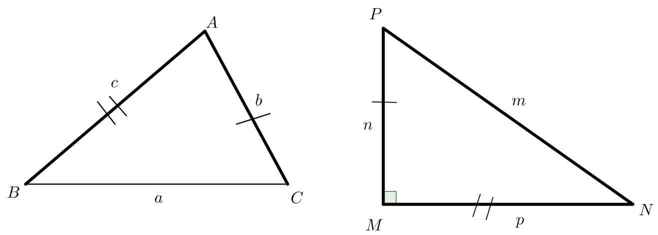
A recíproca do Teorema de Pitágoras fala que se em um triângulo a soma dos quadrados de dois lados for igual ao quadrado do outro lado, então esse triângulo é retângulo.

A demonstração a seguir está baseada na referência [4], página 225.

Hipótese: Temos que o triângulo ABC em que $a^2 = b^2 + c^2$.

Tese: Então, o triângulo ABC é retângulo.

Demonstração:



Fonte: Arquivo Pessoal.

O triângulo MNP é retângulo em M, onde os catetos são os lado $\overline{MP}$ e $\overline{MN}$ que são respectivamente congruentes as lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ que pertence ao triângulo ABC e daí temos.

Triângulo MNP retângulo em m então

$$m^2 = n^2 + p^2 \tag{4.9}$$

Como $n = b$ e $p = c \Rightarrow m^2 = b^2 + c^2$

Por congruência de triângulo LLL temos $a = m \Rightarrow a^2 = m^2$

Daí concluímos que.

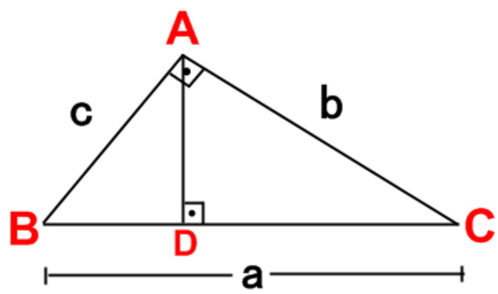
$$a^2 = b^2 + c^2 = m^2 = n^2 + p^2 \tag{4.10}$$

Então o triângulo ABC é retângulo $\square$

Demonstração baseada na referência [6].

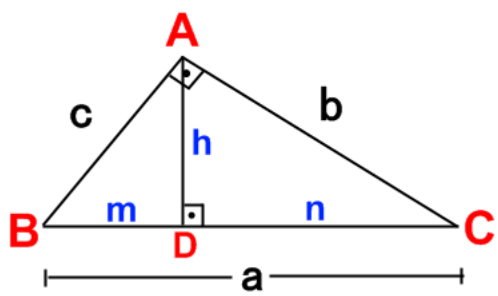
Demonstração:

Primeiramente consideremos um segmento de reta que sair do vértice A e forma um ângulo perpendicular com o lado $\overline{BC}$ no pomto que camamos de D como mostra a figura.



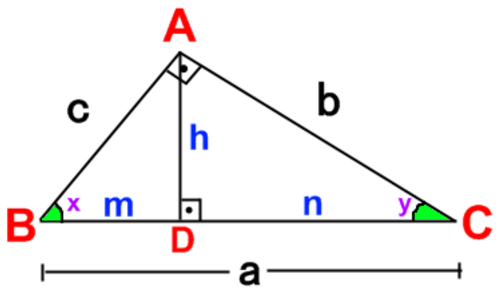
Fonte: Arquivo Pessoal.

Observamos que esse segmento de reta que acabamos de construir é a própria altura do triângulo. então consideremos a medida da altura como h e observamos também que o lada a foi dividido em duas parte que chamaremos de m en como mostra a figura.



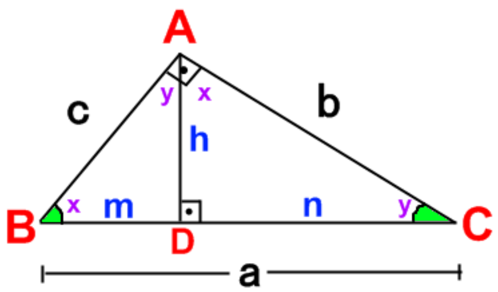
Fonte: Arquivo Pessoal.

daí consideremos que os vértice C e D tem ângulo que medem respectivamente x e y como está representado na figura.



Fonte: Arquivo Pessoal.

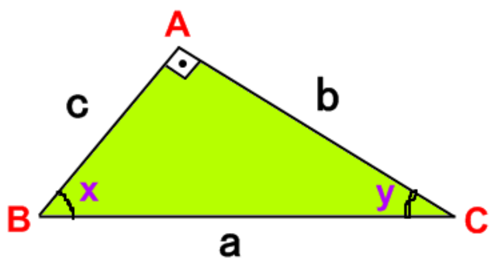
Olhando o triângulo ABC temos que $x + y = 90^o$, e daí temos os valores que falta nos triângulos ABD que Y e ACD é x, veja a figura abaixo.



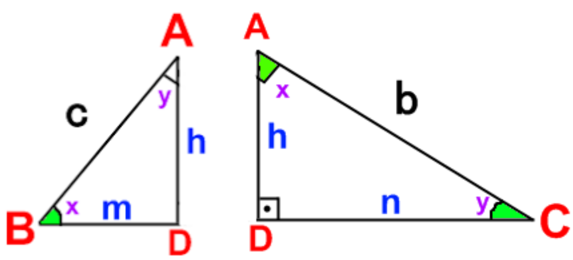
Fonte: Arquivo Pessoal.

Dessa figura tiramos informações necessárias para a dedução do Teorema de Pitágoras. Dessa figura deduzimo que os triângulos ABC, ABD e ADC são semelhantes entre si e com isso podemos fazer algumas relações matemáticas.

para maior compreensão os triângulos foram separados.



Fonte: Arquivo Pessoal.



Fonte: Arquivo Pessoal.

quando observamos os triângulos ABC e ABD temos

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$
$$\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$$
$$c^2 = a \cdot m$$

Quando observamos os triângulos ABC e ADC temos:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$$
$$\frac{b}{n} = \frac{a}{b}$$
$$b^2 = a \cdot n$$

Daí temos que $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$ então quando somamos b^2 com c^2 é o mesmo que soma $a \cdot n$ com $a \cdot m$ já que $b^2 + c^2$ é o mesmo que $a \cdot n + a \cdot m$ vejamos o que acontece fazendo isso.

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$

olhando para o segundo membro podemos colocar a em evidência e temos que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$$

como no começo a foi dividido em duas partes que chamamos de m e n, então voltando a unir essas duas partes temos novamente a,ou seja:

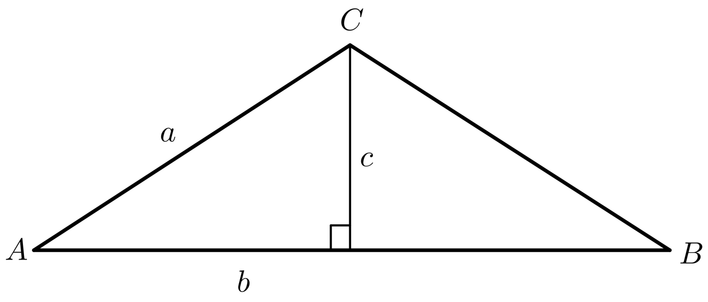
$$m + n = a$$

então podemos concluir que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$\text{ou}$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

□

Exemplo 4.3. *Um pedreiro precisa calcular o comprimento das vigotas que serão utilizadas em um casa de* 8 *metros de comprimentos, sabendo que a porcentagem de inclinação indicada para a telha é de* 30 *por centro, qual será o comprimento das vigotas sabendo que o beiral do telhado é* $0,5m$*?*



Fonte: Arquivo Pessoal.

$$4 \longrightarrow 100$$
$$x \longrightarrow 30$$

Fazendo uma multiplicação cruzada temos:

$$100x = 120$$
$$x = \frac{120}{100}$$
$$x = 1,20m$$

Calculando o tamanho da vigota utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = 4^2 + 1,20^2$$
$$a^2 = 16 + 1,44$$
$$a^2 = 17,44$$
$$a = \sqrt{17,44}$$
$$a = 4,17m$$

Somando com a medida do beiral temos que a medida das vigotas serão de:

$$4,17 + 0,5 = 4,67m$$

4.2 Teorema de Tales

Teorema de Tales é também conhecido como teorema das paralelas. Esse teorema trata de um feixe de retas paralelas entre si e que pertencem a um mesmo plano (são coplanares), e além dessas retas paralelas, também tem as retas transversais a esse feixe de retas.

Teorema 4.4. *(Teorema de Tales) sejam duas retas transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer da primeira será sempre igual à razão entre os segmentos correspondentes da segunda.*

Segui uma demostração do teorema de Tales baseada na referência [4] nas páginas 185 e 186.

Hipótese

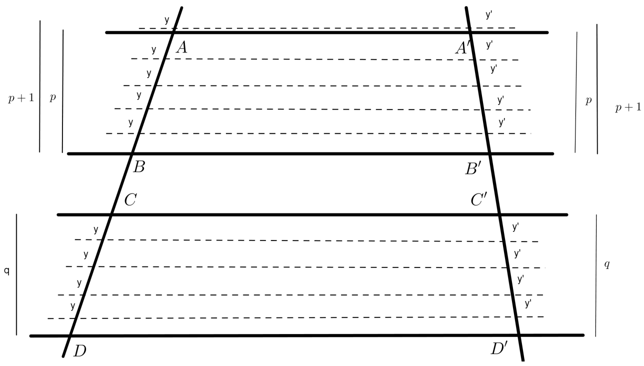
$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois segmentos de uma transversal, e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos correspondentes da outra.

Tese

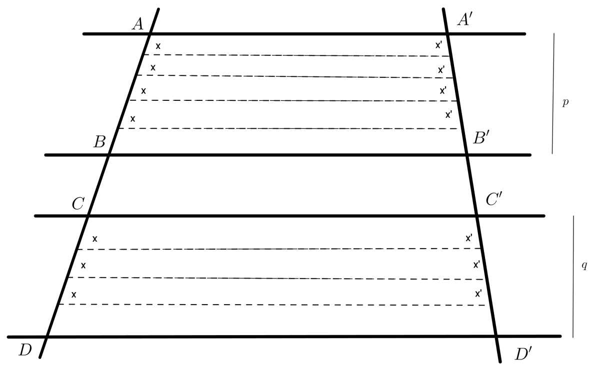
$\Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

Demonstração:

1º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.



Fonte: Arquivo Pessoal.



Fonte: Arquivo Pessoal.

Existe um se x que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$.

$$\frac{\overline{AB} = px}{\overline{CD} = qx}\} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \tag{4.11}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (na primeira figura) e aplicando na propriedade que diz que ”se duas retas paralelas e um segmento delas é dividido por um numero de pates congruente entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do fixe então os segmentos correspondentes da outra é transversal”.(DOLCE E POMPEL,2005,P.184).

Daí,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{px'}{qx'}\} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \tag{4.12}$$

Comparando (4.11) e (4.12), temos:

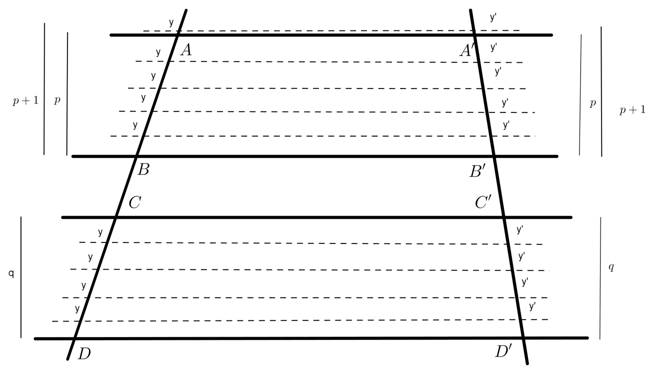
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}.$$

2º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são inumerável.

Dessa forma não ha segmento submúltiplo comum a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomamos um segmento y submúltiplo qualquer de $\overline{CD}$ (y e neste caso existe número inteiro n de vezes em $\overline{CD}$), daí temos:

$\overline{CD} = n \cdot y$



Fonte: Arquivo Pessoal.

como $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ inumeráveis, colocando um sequencia y em $\overline{AB}$, para um certo número inteiro p de vezes acontece que:

$p.y < \overline{AB} < (p+1)y$

Fazendo as operações com as relações acima, temos:

$$\frac{my < \overline{AB} < (m+1)y}{ny = \overline{CD} = ny}\} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \tag{4.13}$$

Traçando retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando a propriedade anterior, vem:

$\overline{C'D'} = qy'$

$py' < \overline{A'B'} < (p+1)y'$

Operando com as relações acima, temos:

$$py' < \overline{A'B'} < (p+1)y'\} \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{p+1}{q} \tag{4.14}$$

$qy' = \overline{C'D'} = qy'\}$

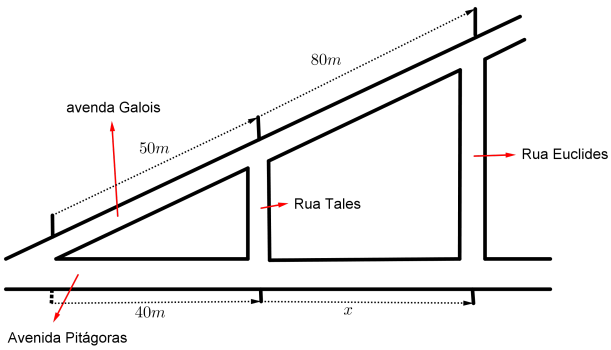
Então, y é um submúltiplo de $\overline{CD}$ que se pode variar; dividindo y, aumentamos q e nestas condições $\frac{p}{q}$ e $\frac{p+1}{q}$ são um par de classes adjacentes que definem um único número real, que é $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ pela expressão (4.13), e é $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ pela expressão (4.14). e esse número é único, daí:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} \tag{4.15}$$

□

Observação 4.5. *A igualdade a seguir também é válida:*
$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$.
Daí concluímos que a razão entre segmentos correspondentes é constante.

Exemplo: A figura abaixo representa as avenidas Galois e Pitágoras e tem inicio em um mesmo ponto A e cortam as ruas Tales e Euclides, sabendo que as ruas Tales e Euclides são paralelas e que a avenida Galois corta a rua tales a $50m$ e a rua Euclides a $130m$ e a avenida Pitágoras corta a rua Tales a $40m$. Calcule distância em que a Avenida Pitágoras corta a rua Euclides.



Fonte: Arquivo Pessoal.

$$\frac{50}{40} = \frac{130}{x}$$
$$50x = 40 \cdot 130$$
$$50x = 5200$$
$$x = \frac{5200}{50}$$
$$x = 104m$$

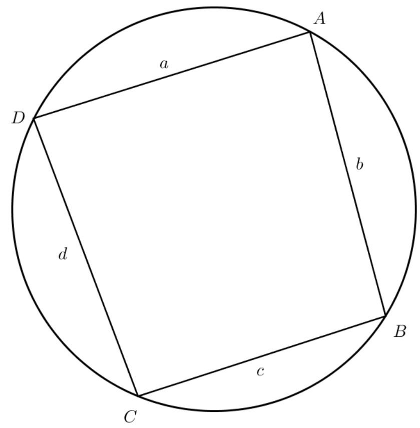
4.3 Teorema de Brahmagupta

O Teorema ou fórmula de Brahmagupta $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ é voltado para quadrilátero cíclico onde podemos calcular a área de quadrilátero tirando a raiz quadrada do produto da diferença do semi-perímetro de cada lado, onde se tomarmos o comprimento de um de seus lados igual a zero o teorema vira a fórmula de heron que já foi abordada no capítulo anterior.

Teorema 4.6. *(Teorema de Brahmagupta) Se as diagonais de um quadrilátero cíclico são perpendiculares, então qualquer linha perpendicular a qualquer lado do quadrilátero e passando pela interseção das diagonais, divide o lado oposto em duas partes iguais.*

A seguir, está uma demonstração baseada na referência [8].

Demonstração:



Fonte: Arquivo Pessoal.

Seja A a área de um quadrilátero, então:

$$A = \text{área}\triangle ADB + \text{área}\triangle BDC$$
$$A = \frac{absen\widehat{A}}{2} + \frac{cdsen\widehat{C}}{2}$$

Daí, como $ABCD$ um quadrilátero cíclico.

$$D\widehat{A}B = 180^o - D\widehat{C}B$$

Por consequência: $sen\widehat{A} = sen\widehat{C}$
portanto,

$$A = \frac{absen\widehat{A}}{2} + \frac{cdsen\widehat{A}}{2}$$

elevando os dois lados da expressão ao quadrado temos:

$$A^2 = \frac{absen^2\widehat{A}}{4} \cdot (ab + cd)^2$$

multiplicando os dois membros da expressão por 4

$$4A^2 = absen^2\widehat{A} \cdot (ab + cd)^2$$

utilizando a fórmula das relações fundamentais $cos^2\widehat{A} + sen^2\widehat{A} = 1 \Rightarrow sen^2\widehat{A} = 1 - cos^2\widehat{A}$ substituindo na expressão

$$4A^2 = (1 - cos^2\widehat{A}) \cdot (ad + cd)^2$$
$$4A^2 = (ab + cd)^2 - cos^2\widehat{A} \cdot (ab + cd)^2$$

aplicando a lei do cosseno nos triângulos ADB e BDC e igualando a expressão corresponde para o lado DB, temos

$$a^2 + b^2 - 2abcos\widehat{A} = c^2 + d^2 - 2cdcos\widehat{C}$$

substituindo $cos\widehat{C} = -coos\widehat{A}$, tendo em vista que os ângulos são suplementares e reorganizando temos:

$$2cos\widehat{A} \cdot (ab + cd) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

substituindo na equação da área.

$$4A^2 = (ab + cd)^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4}$$

$$16A^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \tag{4.16}$$

que é da forma $a^2 - b^2$, portanto podemos escrever a expressão $(a + b) \cdot (a - b)$ como,

$$(2(ab + cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2(ab + cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)$$
$$= ((a + b)^2 - (c - d)^2)((c + d)^2 - (a - c)^2)$$
$$= (a + b + c - d)(a + B + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)$$

"a soma de todos os lados é igual ao semi-perímetro": $s = \dfrac{a + b + c + d}{2}$,

$$16A^2 = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

dividindo os dois membros por 16

$$A^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

tirando a raiz quadrada

$$A = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - D)}.$$

□

Capítulo 5

Considerações Finais

O presente trabalho possibilitou uma reflexão no estudo da matemática no campo da geometria plana, abrindo uma extensão para a história da matemática, pois torna importante não só conhecer o conteúdo matemático, mas também quem foram os primeiros a usarem esse conhecimento, como eles usavam e para quê eles usavam. Além de possibilitar uma análise de grandes pesquisadores da matemática que realizaram importantes estudos no ramo da geometria, a fim de ter conhecimento de como eles reuniram seus materiais de pesquisa, e quais as contribuições que marcaram seu lugar na história da matemática e fizeram com que ela ficasse com como conhecemos hoje.

O objetivo de fazer um estudo histórico para depois entrar nos conteúdos que são trabalhados hoje na geometria plana nos possibilita ter uma compreensão de como as noções primitivas, como ponto, reta e plano, unida com alguns postulados nos permite um estudo que vai transformando algo simples, como ponto, nas mais complexas figuras geométricas e que se continuar o estudo pode chegar em importantes sólidos.

Durante a pesquisa e a escrita, ficou evidente que existem muitas maneiras de fazer uma abordagem de um conteúdo a fim de deixá-lo mais simples e compreensível e de os estudantes terem um desempenho melhor, como é trabalhado no cálculo de área nesse trabalho. Também ficou notável que há teoremas e fórmulas muito importantes que são pouco utilizadas, fórmulas essas que facilitariam muito os trabalho de geometria plana como a fórmula de Heron que serve para calcular a área de qualquer triângulo, o Teorema de Brahmagupta que apesar de sua importância, pouco conhecida é sua abordagem. É tão pequena que foi preciso analisarmos uma demonstração em espanhol e parafrasearmos a fim de compreendermos melhor.

Pela importância de alguns conteúdos, seria necessário que professores de universidade fizessem a inclusão deles nas ementas das disciplinas, a fim de que os formandos saíssem da universidade com um aprendizado a mais e tivessem um desempenho melhor na sua carreira profissional.

Referências

[1] CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **MATEMÁTICA, UMA BREVE HISTÓRIA**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Livraria de Física, [2008].

[2] BOYER, carl b. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. 2 ed. São Paulo: Editora edgard blucher ltda, [1996].

[3] EVES, Howard. **INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, [2004].

[4] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau. **FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR - GEOMETRIA PLANA**. Vol. 9, 8ª. ed. São Paulo: Atual, [2005].

[5] BUENO, Francisco Silveira.**MINE DICIONARIO DA LÍNGUA PORTUGUESA**. 2ª ed. São Paulo: FTD, [2007].

[6] CALVACANTE, Romirys. **Demonstração do Teorema de Pitágoras**. **www.vivendoentresimbolos.com**, 20 Dezembro 2012. Disponível em: <https://www.vivendoentresimbolos.com/2012/12/demonstracao-do-teorema-de-pitagoras.html>. Acesso em 16 Novembro 2018 às 14:29 hs.

[7] FRANÇA, Michele Viana Debus de. **Soma dos Ângulos Internos de Um Triângulo: por que a Soma Sempre** 180^o**?**. **educacao.uol.com.br**,04 Maio 2009. Disponível em <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/soma-dos-angulos-internos-de-um-triangulo-por-que-a-soma-vale-sempre-180suposup.htm>. Acesso em 19 Novembro 2018, à s 12:36 hs.

[8] NÃO INFORMADO. **Teorema de Brahmagupita**. **Wikipedia**. Disponível em <https://es.wikipedia.org/wiki/F%C3%B3rmula_de_ Brahmagupta>. Acesso em 26 Novembro 2018 às 17:58 hs.