

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO DIAS LIMA

**PONTO FIXO DE BANACH APLICADO ÀS FUNÇÕES IMPLÍCITAS E À
INFORMÁTICA**

ARAGUAÍNA

2017

EDUARDO DIAS LIMA

**PONTO FIXO DE BANACH APLICADO ÀS FUNÇÕES IMPLÍCITAS E À
INFORMÁTICA**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior.

ARAGUAÍNA

2017

EDUARDO DIAS LIMA

**PONTO FIXO DE BANACH APLICADO ÀS FUNÇÕES IMPLÍCITAS E À
INFORMÁTICA**

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior .

Aprovada em: / / .

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior (orientador)

Prof. Dr. Álvaro Julio Yucra Hancco (coorientador)

Profa. Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza

Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo

Dedico este trabalho a todos aqueles que me apoiaram e torceram por mim durante toda minha vida acadêmica. Em especial, a minha avó Luzia da Silva Lima.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente, a Deus por me guiar a esta carreira acadêmica, por me conceder o privilégio da saúde, da paz, da família, do estudo, enfim, sem esses privilégios não teria quaisquer condições de alcançar os meus sonhos.

Esse trabalho é fruto da colaboração e do incentivo de muitas pessoas, inclusive daquela que foi minha maior motivadora para ingressar na universidade, minha avó Luzia da Silva Lima. Uma mulher exemplar como mãe, avó, amiga e dona de casa. Uma vida inteira dedicada à sua família. Uma pessoa que me apoiou em todos os momentos da minha vida e que hoje sou grato por tudo. Muito obrigado minha rainha!

Agradeço à minha mãe Denise Dias por todo o suporte educacional junto com uma boa dose de carinho e incentivo, por me ajudar nessa caminhada, tanto financeira como emocionalmente, dando apoio durante os quatro anos de curso. E ao meu amado irmão Wilian Lima, agradeço pelas vezes que me levou na Universidade, pelas palavras de incentivo e etc. Muito obrigado!

Não menos importante, agradeço à minha namorada Débora Vanessa, pela paciência, pelo carinho ao compartilhar comigo mais esse marcante momento dos meus estudos e de nossa vida. Seu apoio foi de fundamental importância para a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos de sala da Universidade, Daniel Alves, João Marcos, Rosalina, Luan Alves e Tarcísio, cujos históricos de vida pessoal e acadêmico são os mais diversos, respeitáveis e abrangentes, pelas trocas de experiências, pelo convívio, por todas as madrugadas estudando, pelas alegrias e incertezas, pela generosidade e constante colaboração e por nossas conversas nos corredores e na cantina, por todos esses momentos juntos e partilhados, que serão levados pra sempre na minha memória, na certeza de que a amizade foi consolidada. Obrigado meus amigos, vocês tornaram essa caminhada tão menos cansativa e me ensinaram o real valor de uma amizade verdadeira!

Agradeço também aos meus amigos de infância, Mateus, Filipe, Patrícia, Daniela, Angelina, Marcos Vinícios, Jaqueline, Paloma, Werik Warlan e Iago Martins (in memoriam). Vocês me proporcionaram os melhores momentos da minha vida. Obrigado!

Devo meus agradecimentos a todos os professores do colegiado de Matemática e do Colégio Estadual Campos Brasil, em especial, ao Roblêdo, Freud, Sinval, André, Rogério, Samara, Renata Alves, Robson, Charlene, Heden, Sabina, Silvani e Geovania, que incentivaram-me diretamente, participaram do meu desenvolvimento enquanto matemático e acreditaram na realização deste trabalho. São mestres da vida, por compartilharem seus conhecimentos, suas experiências e suas orientações, que, por vezes, ultrapassaram os limites da sala de aula.

Por fim, devo minha profunda gratidão a dois professores que foram fundamentais para o meu sucesso acadêmico. Meu colossal agradecimento ao meu amigo, orientador e querido professor José Carlos de Oliveira Junior, que sempre me incentivou e animou nesta laboriosa e generosa jornada acadêmica. Tenho uma imensa admiração por você, por ser um exemplo de

dedicação e doação pessoal, apoiar-me em minhas dificuldades, estando sempre à disposição. E também, meu colossal agradecimento ao meu amigo, coorientador e querido professor Álvaro Júlio Yucra Hanco, pelas coorientações realizadas durante todas as fases deste trabalho.

Sem vocês esse trabalho não teria sido possível. Obrigado a todos!

“Até onde as leis da matemática se referem à realidade, elas estão longe de construir algo certo, e, na medida em que constituem algo certo, não se referem à realidade”.

Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas de suas diversas aplicações nas funções definidas implicitamente e na informática. Para isso, utilizaremos as noções topológicas em espaços métricos e o conceito de diferenciabilidade em espaços euclidianos. Quanto à área da informática, traremos o famoso buscador da internet “Google” como exemplo de aplicação deste teorema. Além disso, sua demonstração produz um método, conhecido como Newton-Raphson, rico em informações que nos possibilitou a elaboração de um programa que encontra por aproximação as raízes de algumas funções.

Palavras-chave: Espaços Métricos. Ponto Fixo de Banach. Método de Newton-Raphson. Google.

ABSTRACT

In this work, we will present Banach's Fixed Point Theorem and some of its various applications in implicitly defined functions and in computing. For this, we will use the Topological notions in Metric Spaces and the concept of differentiability in Euclidean spaces. As for the area of computing, we will bring the famous Internet search engine "Google" as an example of the application of this theorem. In addition, its proof produces a method, known as Newton-Raphson, which is rich in information that enabled us to elaborate a software that approaches the roots of some functions.

Keywords: Metric Spaces. Banach Fixed Point. Newton-Raphson method. Google.

Lista de Figuras

2.1	Disco unitário na norma euclidiana.	16
2.2	Disco unitário na norma do máximo.	16
2.3	Disco unitário na norma da soma.	17
2.4	Intervalo aberto $(-1, 1)$ na reta real.	17
2.5	Esfera de centro na origem e raio 1.	18
2.6	Distância euclidiana entre dois pontos.	19
2.7	Bola aberta $B(a, \varepsilon)$ na reta real.	22
2.8	Bola aberta de centro a e raio r	22
2.9	Ponto interior e ponto de fronteira do conjunto X	24
2.10	Conjunto aberto em M	25
2.11	Composição de funções.	27
3.1	Pontos fixos da função $f(x) = x^3$	35
3.2	Gráfico da função f do Exemplo 3.8.	39
3.3	Gráficos das funções dos Exemplos 3.9 e 3.10.	40
3.4	Ponto fixo da função f do Exemplo 3.11.	42
3.5	Ponto fixo da função f do Exemplo 3.12.	44
3.6	Ponto fixo da função cosseno.	46
3.7	Interpretação gráfica do método de Newton-Raphson.	47
3.8	Zero da função f	51
3.9	Ponto fixo da função g	51
3.10	Zero da função f	52
3.11	Ponto fixo da função g	52
3.12	Zero da função f	53
3.13	Ponto fixo da função g	53
4.1	Restrição de g ao aberto U	60
4.2	Buscador de internet: Google.	62
4.3	Ordenação de páginas.	64
4.4	Conexão de páginas.	64

Sumário

1	Introdução	12
2	Uma Introdução aos Espaços Métricos	14
2.1	Espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n	14
2.2	Produto Interno e Normas em \mathbb{R}^n	15
2.3	Espaços Métricos	18
2.4	Bolas e Conjuntos Limitados	21
2.5	Conjuntos Abertos e Fechados	23
2.6	Funções Contínuas	26
2.7	Sequências	28
2.8	Sequências de Cauchy	30
2.9	Espaços Métricos Completos	31
3	Teorema do Ponto Fixo de Banach	33
3.1	Um Pouco da História	33
3.2	O Teorema do Ponto Fixo de Banach	34
3.3	O Método de Newton-Raphson	46
4	Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach	54
4.1	Diferenciabilidade	54
4.2	Teorema da Função Implícita	57
4.3	O Buscador de Internet: Google	62
5	Considerações Finais	68
	Referências	69
	Anexos	71

Capítulo 1

Introdução

Dentro das ciências exatas, a matemática desempenha um papel preponderante em auxiliar as outras áreas no seu desenvolvimento. Nesse sentido, a Análise é uma área específica com inúmeras aplicações na física, biologia, ciências sociais e economia. Uma parte desta área se preocupa em estudar propriedades de determinadas funções e, com elas, obter resultados que se apliquem em fenômenos naturais. Sobre isso, um dos importantes teoremas da Análise é o Teorema do Ponto Fixo de Banach, resultado principal deste trabalho.

A compreensão do estudo de aspectos referentes à Análise Matemática e suas aplicações, como o das propriedades de determinadas funções, nos remete, muitas vezes, a pensar acerca dos resultados cujas demonstrações envolvem o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Por exemplo, uma aplicação relevante deste teorema assegura a existência e a unicidade de soluções de algumas Equações Diferenciais Ordinárias (o famoso Teorema da Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias, veja [16], capítulo 7, páginas 222, 223 e 224). Sem contar outras aplicações nas diversas áreas do conhecimento. Para demonstrar este teorema, utiliza-se o método das iteradas da função contração em questão aplicada em qualquer ponto de seu domínio. Apesar de nos atermos ao Ponto Fixo de Banach, existem outros teoremas que possuem a mesma essência, formando uma teoria utilizada como ferramenta importante para nortear estudos sobre fenômenos não lineares, apresentando resultados de existência de solução.

O Teorema da Função Implícita, por sua vez, fornece uma maneira elegante de, a partir de uma equação que envolve várias variáveis, garantir que algumas variáveis podem ser escritas como função das demais, satisfazendo ainda a equação. Historicamente, de acordo com [10], Isaac Newton (1642-1727) deu as primeiras ideias do Teorema da Função Implícita e uma extensão da derivação implícita. Mas foram Gottfried Leibniz (1646-1717) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) que apresentaram uma versão do teorema para funções de duas variáveis reais com rigor matemático, em que uma das hipóteses era que o jacobiano fosse não nulo. Anos depois, Ulisse Dini (1845-1918) apresentou uma versão generalizada para o contexto de

funções de qualquer número de variáveis reais. Dessa forma, outros matemáticos culminaram o teorema em espaços de Banach. Neste trabalho, vamos demonstrar esse teorema, que determina condições sob as quais uma relação como $f(x, y) = 0$ define y como função de x (ou x como função de y).

Algumas das questões norteadoras de interesse deste trabalho são: Quais são as condições suficientes para uma função possuir um ponto fixo? Será que toda equação de várias variáveis determina algumas delas em função das outras? Para responder a estas e outras perguntas, usaremos os teoremas supracitados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, abordaremos uma introdução aos Espaços Métricos através de alguns conceitos e resultados fundamentais que servirão como ferramentas para o estudo do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

No capítulo 3, inicialmente, faremos um apanhado histórico sobre Stefan Banach, o autor do teorema. Em seguida, definiremos a noção de pontos fixos e enunciaremos e demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Veremos também concisamente alguns exemplos e curiosidades importantes para a compreensão do mesmo. Além disso, explanaremos uma aplicação conhecida como o método de Newton-Raphson, que estima uma aproximação dos zeros de algumas funções reais por meio do ponto fixo de uma função auxiliar. Para desenvolver este método, com ajuda do software MATLAB, elaboramos um programa conhecido como “NewtonRA” e trouxemos, no final deste capítulo, alguns exemplos resolvidos por ele.

Finalmente, o capítulo 4 tem dedicação total para as aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Neste sentido, falaremos sobre o Teorema da Função Implícita e suas aplicações. Além disso, mostraremos uma aplicação muito interessante sobre o buscador de páginas na internet mais famoso do mundo, o “Google”.

Ressaltamos que o leitor deve ter familiaridade com alguns conceitos da Análise Real e da Álgebra Linear. Salientamos também que o trabalho conta com um anexo contendo alguns resultados complementares necessários para o seu desenvolvimento.

Bom proveito!

Capítulo 2

Uma Introdução aos Espaços Métricos

Neste capítulo, implantaremos os conhecimentos básicos de Topologia em espaços métricos. Em particular, vamos explorar as noções de espaço euclidiano \mathbb{R}^n , espaço métrico, conjuntos abertos, conjuntos fechados, seqüências, funções contínuas e outros. Esses conceitos são fundamentais para o entendimento da demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, o principal deste trabalho.

2.1 Espaço Euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n

O espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n é o produto cartesiano de n fatores \mathbb{R} , onde n é um número natural, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}.$$

Os elementos de \mathbb{R}^n são seqüências ou listas da forma: $x = (x_1, \dots, x_n)$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $x_i \in \mathbb{R}$ é chamado de i -ésima coordenada cartesiana de x . Por conveniência, algumas vezes, consideramos $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, tendo um único elemento 0 e será chamado “espaço de dimensão zero”.

Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , diremos que $x = y$ se, e somente se, $x_i = y_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , temos as seguintes operações em \mathbb{R}^n

Adição:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Multiplicação por escalar:

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n, \text{ então } \alpha \cdot x = \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Com as operações de adição e multiplicação por escalar, o espaço \mathbb{R}^n é um espaço vetorial, em que o elemento neutro para a adição é $0 = (0, \dots, 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, \dots, x_n)$ é

$-x = (-x_1, \dots, -x_n)$. Algumas vezes, chamaremos de *pontos* os elementos de \mathbb{R}^n , e outras vezes de *vetores*.

Observação 2.1. É importante analisar as propriedades de Álgebra Linear definidas em [7].

2.2 Produto Interno e Normas em \mathbb{R}^n

Para entendermos a noção de norma em \mathbb{R}^n , analisaremos a seguinte definição.

Definição 2.2. Um *produto interno* num espaço vetorial real E é uma regra que faz corresponder a cada par de vetores $x, y \in E$ um número real, indicado por $\langle x, y \rangle$, de tal modo que, para quaisquer $x, x', y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, se tenham:

P1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

P2. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;

P3. $\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha \cdot y \rangle$;

P4. $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$.

O *produto interno canônico* é o exemplo mais importante do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , onde, para $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , tem-se

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n.$$

Exemplo 2.3. Pela definição, em \mathbb{R}^3 , temos $\langle (1, 0, 1), (2, 1, -1) \rangle = 2 + 0 - 1 = 1$.

Como \mathbb{R}^n é um espaço vetorial, podemos definir *norma* da seguinte maneira:

Definição 2.4. Uma *norma* em \mathbb{R}^n é uma função $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

N1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; (Desigualdade Triangular)

N2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

N3. $\|x\| \geq 0$, valendo $\|x\| = 0$ somente quando $x = 0$.

Vamos descrever alguns exemplos de norma.

Norma Euclidiana: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, denota-se a norma euclidiana por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ou seja,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Se elevarmos ao quadrado a expressão acima, tem-se $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, de maneira que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $\|x\| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Particularizando para o caso em que $n = 2$, seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\|x\| \leq 1$. Dessa forma obtemos

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle} \leq 1,$$

$$\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 \leq 1^2 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Com essas afirmações, geometricamente, podemos observar que em \mathbb{R}^2 a desigualdade acima representa um disco de centro $(0, 0)$ e raio 1, como ilustrado abaixo.

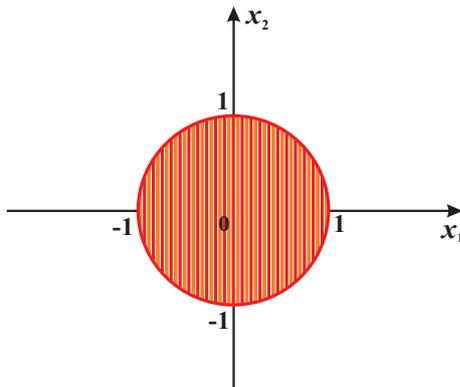


Figura 2.1: Disco unitário na norma euclidiana.

A partir desta seção, o número $\|x\|$ será chamado norma euclidiana ou comprimento do vetor $x \in \mathbb{R}^n$.

Norma do Máximo: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, vamos escrever e denotar a norma do máximo por $\|x\|_{max} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Então, $\|x\|_{max} = \|(x_1, x_2)\|_{max} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Dessa forma obtemos

$$\|(x_1, x_2)\|_{max} \leq 1 \Rightarrow \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1.$$

Abaixo, segue o disco unitário nesta norma.

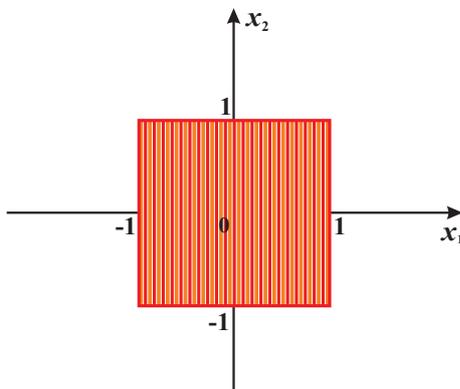


Figura 2.2: Disco unitário na norma do máximo.

Norma da Soma: Dado $x \in \mathbb{R}^n$, denota-se a norma da soma por $\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, novamente, se

$$\|x\|_S \leq 1 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\|_S = |x_1| + |x_2| \leq 1.$$

Geometricamente, temos

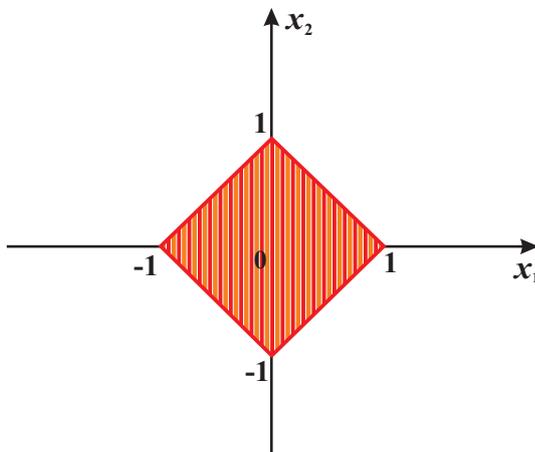


Figura 2.3: Disco unitário na norma da soma.

Exemplo 2.5. Identifique no espaço \mathbb{R} o conjunto $Y = \{y \in \mathbb{R} : \|y\| < 1\}$.

Observe que o espaço \mathbb{R} é o conjunto dos números reais. Dessa forma, se $y \in \mathbb{R}$, como $\|y\| = \sqrt{y^2} = |y| < 1$, então $|y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$, em que $|y|$ significa valor absoluto de y . Concluimos que o conjunto Y é o intervalo aberto $(-1, 1)$. Observe que, geometricamente, y é o seguinte intervalo abaixo em \mathbb{R}^1 .



Figura 2.4: Intervalo aberto $(-1, 1)$ na reta real.

Exemplo 2.6. Identifique no espaço \mathbb{R}^3 o conjunto $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

Sabemos que \mathbb{R}^3 é o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, como estudamos na Geometria Analítica e no Cálculo para representar figuras geométricas espaciais como cubos, esferas e outras superfícies. Dessa forma, se $x \in \mathbb{R}^3$, tem-se $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Portanto, para esse caso específico, S é o conjunto dos pontos de uma esfera de centro na origem $(0, 0, 0)$ e raio 1, como na figura abaixo.

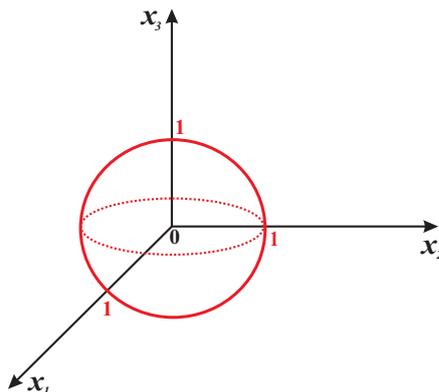


Figura 2.5: Esfera de centro na origem e raio 1.

Observação 2.7. Como definimos outras normas em \mathbb{R}^n , algumas vezes a norma euclidiana será referenciada de maneira implícita.

2.3 Espaços Métricos

Nos cursos de cálculo, apresentam-se as noções de derivação e integração, centradas no conceito de distância entre pontos, pode ser em forma de intervalos (reta real), ou como vizinhança (mais de uma variável). Podemos falar, intuitivamente, que um conjunto é espaço métrico se for possível definir uma maneira de medir a distância entre seus pontos. Por exemplo, nós usamos uma maneira de medir distâncias entre objetos próximos. Basta pegarmos uma régua e medirmos a distância entre os dois. Para medir as distâncias entre países, como outro exemplo, fica inviável (e errado) medir por meio de uma régua. A distância do Brasil ao Japão não é o diâmetro terrestre, mas sim o comprimento do arco da circunferência da Terra que une estes dois países. Note que estes dois exemplos, conjunto de objetos próximos e conjunto de países, são exemplos de espaços métricos, pois, nestes conjuntos, há uma maneira de medir a distância entre seus elementos.

Mas o que vem a ser maneira de medir distância? Abaixo, segue a definição de métrica.

Definição 2.8. Uma *métrica* num conjunto M não vazio é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$.

- d1) **d é não-negativa e separa pontos distintos:** Se $x \neq y$, então $d(x, y) > 0$ e $d(x, x) = 0$;
- d2) **d é simétrica:** $d(x, y) = d(y, x)$;
- d3) **d satisfaz a desigualdade triangular:** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A partir dessa definição, quando for mencionado o par (M, d) , significa que é um espaço métrico, onde M é um conjunto não vazio e d é a métrica em M . Quando for dito que M é um

espaço métrico, ficará subentendido que em M já existe uma métrica d . Todas as propriedades de métrica acima têm uma interpretação intuitiva se pensarmos em d como uma noção de distância. Por exemplo, a propriedade d1) diz que a distância de um lugar a ele mesmo é nula, mas que qualquer outro lugar a esta distância é positiva. A propriedade d2) afirma que ir de x a y não é mais fácil ou difícil que ir de y a x . E a propriedade d3) admite que ir de x para z e depois para y não resulta em um caminho mais curto que a rota direta de x para y .

No plano cartesiano \mathbb{R}^2 , a distância euclidiana entre dois pontos é dada pelo comprimento de reta que os une, ou seja, se $x, y \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$. A figura abaixo mostra a distância entre os pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

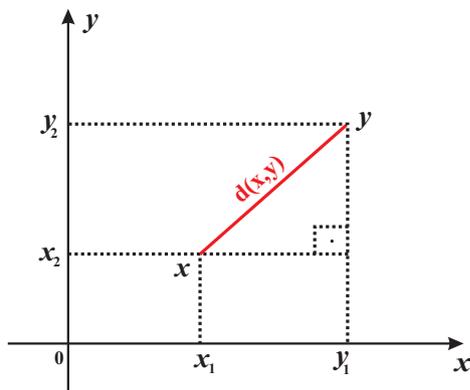


Figura 2.6: Distância euclidiana entre dois pontos.

No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , podemos definir as seguintes funções $d, d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como métricas. Assim, existem três formas naturais de representar distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n , ou seja, dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n , a saber,

$$\text{i) } d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2};$$

$$\text{ii) } d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$\text{iii) } d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\} = \max |x_i - y_i|, \text{ com } 1 \leq i \leq n.$$

Exemplo 2.9. Seja \mathbb{R} um espaço métrico, a distância euclidiana entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$.

De fato, as propriedades são verdadeiras, pois

$$\text{i) } d(x, y) = |x - y| \geq 0 \text{ e } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$\text{ii) } d(x, y) = d(y, x), \text{ pois } |x - y| = |y - x|;$$

$$\text{iii) } d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(y, z). \quad \square$$

Os itens i) e iii) resultam das propriedades do valor absoluto dos números reais. Esta métrica d é conhecida como métrica usual em \mathbb{R} .

Exemplo 2.10. A função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = (x - y)^2$, não é uma métrica em \mathbb{R}^2 .

De fato, sejam $x = 3$, $y = 9$ e $z = 6$. Temos que, $d(3, 9) = (3 - 9)^2 = (-6)^2 = 36$, $d(3, 6) = (3 - 6)^2 = (-3)^2 = 9$ e $d(6, 9) = (6 - 9)^2 = (-3)^2 = 9$. Se $d(3, 9) \leq d(3, 6) + d(6, 9)$, então $36 \leq 9 + 9 = 18$ (Absurdo). Portanto, a função d não é métrica em \mathbb{R} . \square

Proposição 2.11. Sejam d, d_1, d_2 as métricas definidas acima. Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

$$d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_2(x, y).$$

Demonstração: De fato, vamos mostrar que as propriedades são verdadeiras.

$$d_2(x, y) = \max\{|x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n\} = |x_j - y_j| \text{ para algum } (1 \leq j \leq n). \text{ Então,}$$

$$d_2(x, y) = |x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = d(x, y).$$

Logo, $d_2(x, y) \leq d(x, y)$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2 + \sum_{i \neq j} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|} = \\ &\sqrt{(|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|)^2} = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = d_1(x, y). \end{aligned}$$

Assim, $d(x, y) \leq d_1(x, y)$. Finalmente, obtemos

$$|x_i - y_i| \leq \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}, \text{ com } 1 \leq i \leq n. \text{ Então,}$$

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \leq \max\{|x_i - y_i|\} + \dots + \max\{|x_i - y_i|\} = \\ &n \cdot \max\{|x_i - y_i|\} = n \cdot d_2(x, y), \text{ com } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Logo, $d_1(x, y) \leq n \cdot d_2(x, y)$. Portanto, $d_2(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n \cdot d_2(x, y)$. \square

Exemplo 2.12. Para $M = \mathbb{R}$, a função $d(x, y) = x^2 + 3xy$ não é métrica em \mathbb{R} .

De fato, note que d não é métrica em \mathbb{R} , pois não cumpre a propriedade d1). Por exemplo, seja $x = 2$ e $y = -2$, temos $d(2, -2) = 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -8 < 0$.

Exemplo 2.13. Considere o conjunto M formado por três objetos quaisquer, como uma borracha, um lápis e um caderno, denotados por b , l e c , respectivamente. Definiremos a seguinte função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$: a distância de um elemento a ele mesmo é zero, isto é, $d(x, x) = 0$ para qualquer $x \in M$; a distância de um objeto com qualquer outro objeto distinto dele é um, ou seja, $d(x, y) = 1$ com $x \neq y$.

Mostraremos que (M, d) é um espaço métrico. Para isso, basta verificar se as propriedades da Definição 2.8 são válidas. Com efeito, a propriedade d1) é verdadeira, pois pela construção $d(x, x) = 0$ para qualquer $x \in M$ e $d(x, y) = 1 > 0$ para quaisquer $x, y \in M$ com $x \neq y$. Também verifica-se rapidamente a propriedade d2), pois $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in M$ com $x \neq y$ e $d(x, y) = 0 = d(y, x)$ se $x = y$. Agora, a desigualdade triangular se verifica por dois casos. Considere $x, y, z \in M$.

Primeiro caso: Se $x = y$, então $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ independentemente de quem seja z , pois 0 é menor ou igual que a soma de quaisquer números não negativos.

Segundo caso: Se $x \neq y$, certamente, temos que ou $y = z$ ou $y \neq z$. Assim, se $y = z$, então $1 = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) = d(x, y) + 0 = d(x, y) = 1$ é verdadeira. Se, por outro lado, $y \neq z$, então $1 = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) = d(x, z) + 1$ é verdadeira.

Podemos generalizar este exemplo.

Exemplo 2.14. (*Métrica zero-um*): Sejam M um conjunto qualquer e $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

Então, d é uma métrica.

Analisando o resultado do Exemplo 2.13, podemos concluir que d é uma métrica no Exemplo 2.14. \square

2.4 Bolas e Conjuntos Limitados

Introduziremos aqui as noções de bolas abertas, bolas fechadas, esfera e conjuntos limitados, que serão importantes para definirmos os conceitos de conjuntos abertos e outras definições topológicas. A ideia de bola é essencial no estudo de espaços métricos.

Definição 2.15. Sejam a um ponto no espaço métrico M e r um número real positivo. Definimos:

i) A bola aberta de centro a e raio r é denotada pelo conjunto $B(a, r)$, definido por

$$B(a, r) = \{x \in M : d(x, a) < r\}.$$

ii) A bola fechada de centro a e raio r é denotada pelo conjunto $B[a, r]$ tal que

$$B[a, r] = \{x \in M : d(x, a) \leq r\}.$$

iii) A esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a, r)$, em que

$$S(a, r) = \{x \in M : d(x, a) = r\}.$$

Observe que, por definição, temos $B[a, r] = B(a, r) \cup S[a, r]$, onde esta união é disjunta.

Exemplo 2.16. Dado $\varepsilon > 0$, construa geometricamente a bola aberta $B(a, \varepsilon)$ em \mathbb{R} , utilizando a métrica usual.

Note que, em \mathbb{R} , a bola aberta de centro a e raio ε é o intervalo de $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, utilizando a métrica usual, pois $B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : d(a, x) = |a - x| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$.



Figura 2.7: Bola aberta $B(a, \varepsilon)$ na reta real.

Exemplo 2.17. Dado um ponto qualquer $p \in B(a, r) \subset M$, existe um número real $r_1 > 0$ tal que $B(p, r_1) \subset B(a, r)$, isto é, todo ponto da bola aberta de centro a e raio $r > 0$ em M , $B(a, r)$, é centro de uma bola contida inteiramente em $B(a, r)$.

Com efeito, por hipótese $p \in B(a, r)$. Tomemos agora $r_1 = r - d(a, p)$ e notemos que $r_1 > 0$, pois $d(a, p) < r$. Para $t \in B(p, r_1)$, obtemos da desigualdade triangular que,

$$d(a, t) \leq d(a, p) + d(p, t) < d(a, p) + r_1 = d(a, p) + r - d(a, p) = r.$$

Portanto, pela definição de bola aberta, temos que $t \in B(a, r)$ e $B(p, r_1) \subset B(a, r)$. Para uma melhor compreensão observe a seguinte imagem.

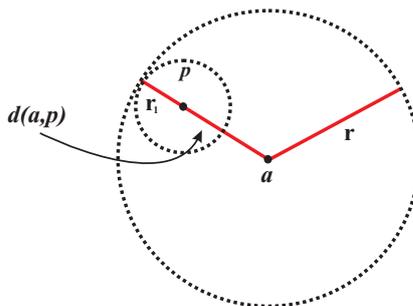


Figura 2.8: Bola aberta de centro a e raio r .

Proposição 2.18. *Dados dois pontos distintos a e b num espaço métrico M , existem bolas abertas de centro em a e b disjuntas.*

Demonstração: Por hipótese, os pontos a e b são distintos. Daí, $d(a, b) > 0$. Sejam $r > 0$ e $t > 0$ tais que $r + t \leq d(a, b)$. Mostraremos que $B(a, r) \cap B(b, t) = \emptyset$. Para isso, suponha que $B(a, r) \cap B(b, t) \neq \emptyset$, e tomemos $r = \frac{d(a, b)}{4}$ e $t = \frac{d(a, b)}{4}$. Para $x \in B(a, r) \cap B(b, t)$, tem-se $d(x, a) < r$ e $d(x, b) < t$. Logo,

$$d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < r + t < \frac{d(a, b)}{4} + \frac{d(a, b)}{4} = \frac{d(a, b)}{2} < d(a, b),$$

o que é um absurdo. Portanto, $B(a, r) \cap B(b, t) = \emptyset$. \square

Definição 2.19. Um subconjunto $A \subset M$ é limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$ para quaisquer $x, y \in A$.

Note que dizer que um conjunto A em um espaço métrico é limitado é equivalente a mostrar que existe uma bola fechada, digamos com centro no ponto $p \in A$ e de raio $r > 0$, $B[p, r]$, tal que A está contido em $B[p, r]$. De fato, se A é limitado, fixe qualquer ponto $p \in A$. Note que $d(x, p) \leq c$ para todo $x \in A$, isto é, A está contido em $B[p, r]$, com $r = c > 0$. A recíproca deste resultado segue imediatamente da desigualdade triangular, pois

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) \leq 2c = r$$

Com isso, obtemos $d(x, a) \leq r$, para todo $x \in A$.

Exemplo 2.20. Toda bola aberta, toda bola fechada e esfera em qualquer espaço métrico são conjuntos limitados.

Para verificar isso, veja a observação logo após a Definição 2.19. \square

2.5 Conjuntos Abertos e Fechados

Nesta seção, estudaremos os conjuntos abertos e fechados de um espaço métrico. A noção de subconjunto aberto (ou fechado) nos dirá que o espaço métrico em questão é também um espaço topológico, talvez o tipo de conjunto mais simples para se trabalhar noções de continuidade. Mas o que vem a ser um subconjunto aberto em M , um espaço métrico? Veja a definição.

Definição 2.21. Seja $a \in X \subset M$ um ponto qualquer. Diz-se que o ponto a é interior ao conjunto X quando, para algum $r > 0$, tem-se $B(a, r) \subset X$. Isto significa que todos os pontos suficientemente próximos de a também pertencem a X . O conjunto $\text{int}X$ dos pontos interiores a X em M chama-se o *interior* do conjunto X .

Por outro lado, dizer que $b \in X$ não é interior a X significa que toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X . Observa-se na ilustração abaixo que o ponto b não pertence a $\text{int}X$ e a pertence.

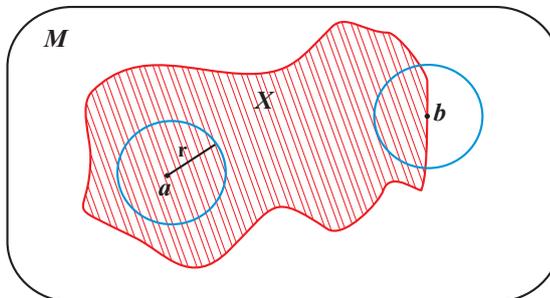


Figura 2.9: Ponto interior e ponto de fronteira do conjunto X .

Definição 2.22. Seja $X \subset M$ e $X \neq \emptyset$. Dizemos que um ponto $y \in M$ é um *ponto de fronteira* de X se toda bola aberta de centro y contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $C(X)$.

Lembre-se de que a fronteira de X também pode conter pontos que não pertencem a X , de acordo com a definição de fronteira.

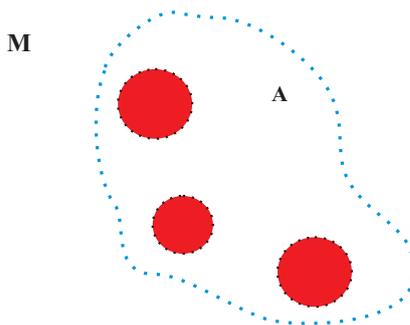
No conjunto dos números reais, considere os seguintes intervalos:

- No intervalo aberto (a, b) , note que todos os pontos são pontos interiores;
- No intervalo fechado $[a, b]$, temos que os pontos a e b não são pontos interiores, pois $\text{int}([a, b]) = (a, b)$;
- No intervalo aberto ilimitado $(a, +\infty)$, todos os pontos são pontos interiores;
- No intervalo fechado ilimitado $[a, +\infty)$, temos que a não é ponto interior, pois $\text{int}([a, +\infty)) = (a, +\infty)$.

A seguir, a definição de conjunto aberto.

Definição 2.23. Dizemos que um subconjunto $A \subset M$ é aberto se todo ponto de A é um ponto interior de A .

Uma imagem que ilustra a definição anterior é a seguinte.

Figura 2.10: Conjunto aberto em M .

Proposição 2.24. *Em qualquer espaço métrico M , uma bola aberta $B(a, r)$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: A prova desta Proposição encontra-se no Exemplo 2.17. □

Agora, veremos alguns exemplos de conjuntos abertos.

- a) O conjunto vazio \emptyset e todo espaço métrico M ;
- b) A união arbitrária de conjuntos abertos;

Exemplo 2.25. Sejam $A_1, \dots, A_m \subset M$ abertos. Então a interseção finita de abertos é um aberto.

Com efeito, se $a \in \bigcap_{i=1}^m A_i$, temos que $a \in A_i$ para cada i . Como estes conjuntos são abertos, existem $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$ tais que $B(a, \delta_i) \subset A_i$ com $1 \leq i \leq m$. Assim, considere

$$\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\} > 0.$$

Logo, $B(a, \delta) \subset A_i$ com $1 \leq i \leq m$. O que implica $B(a, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^m A_i$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^m A_i$ é um aberto. □

É importante notar que as noções de interior e fronteiras são relativas, dependem do espaço métrico M no qual se considera o subconjunto X , isto é, deve-se especificar o espaço métrico M no contexto que se estuda.

Definição 2.26. Seja $A \subset M$. O conjunto A é dito fechado em M se $\partial A \subset A$, ou seja, quando seu complementar, $C(A)$, for aberto.

Existem muitos conjuntos que não são abertos nem fechados. Um exemplo é o conjunto dos números racionais em \mathbb{R} (veja Exemplo 2.28). Alguns exemplos de conjuntos fechados.

- a) O conjunto vazio \emptyset e todo espaço métrico M ;
- b) A união finita de conjuntos fechados;
- c) A intersecção arbitrária de conjuntos fechados;

d) Toda bola fechada.

As demonstrações dos exemplos acima encontram-se em [9], capítulo 1, páginas 33 e 34. \square

Exemplo 2.27. O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2, r > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ é fechado.

De fato, pois sua fronteira é $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, r > 0\}$ e $\partial A \subset A$.

Exemplo 2.28. O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} não é fechado.

De fato, basta considerar uma sequência $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

toda bola centrada em e contém um número racional da forma $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Logo, $e \in \partial \mathbb{Q}$.

Portanto, \mathbb{Q} não é fechado, pois $e \notin \mathbb{Q}$. \square

2.6 Funções Contínuas

O objetivo desta seção é estudarmos as funções contínuas e suas propriedades. Em particular, vamos abordar as suas relações e caracterizações em um espaço métrico. A definição de continuidade em espaços métricos é semelhante à definição de funções reais, estudadas no cálculo diferencial, via ε 's e δ 's trocando o módulo, por métricas apropriadas.

Sejam M e N espaços métricos e uma função $f : M \rightarrow N$. Podemos pensar intuitivamente que a ideia de uma função ser contínua é quando pequenas variações no domínio da função ocasionam pequenas variações na imagem. Lembrando que para intervalos abertos em termos de limites, continuidade em x_0 significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Agora, formalizando esse conceito, segue a definição.

Definição 2.29. Sejam M e N dois espaços métricos. A aplicação $f : M \rightarrow N$ é *contínua* no ponto $a \in M$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } d(x, a) < \delta, \text{ então } d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Se $f : M \rightarrow N$ é contínua em todos os pontos $a \in M$, dizemos simplesmente que f é contínua.

Observe que podemos falar de continuidade com a noção de bola aberta. Especificamente, uma função $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto $a \in M$ se, em qualquer bola $B_1 = B(f(a), \varepsilon)$ de centro $f(a)$ e raio $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar uma bola $B = B(a, \delta)$ de centro a e raio $\delta > 0$ tal que $f(B) \subset B_1$. Veja que as métricas estão implicitamente nesta definição. A bola B se refere à métrica de M ; já a bola B_1 , à métrica de N .

Exemplo 2.30. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{2}$ é contínua, onde em \mathbb{R} usamos a métrica usual.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = 2\varepsilon$ para satisfazer a definição de continuidade. Logo, f é contínua.

Teorema 2.31. Se $f : M \rightarrow N$ é contínua no ponto a e $g : N \rightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \rightarrow P$ é contínua no ponto a . Em outras palavras, a composição de duas aplicações contínuas é contínua.

Demonstração: Com efeito, dado um $\varepsilon > 0$, como g é contínua no ponto $f(a)$, existe $\delta' > 0$ tal que, se

$$d(y, f(a)) < \delta', y \in N, \text{ então } d(g(y), g(f(a))) < \varepsilon.$$

Por sua vez, como f é contínua em a e $\delta' > 0$, existe então $\delta > 0$ tal que, se

$$d(x, a) < \delta, x \in M, \text{ então } d(f(x), f(a)) < \delta'.$$

Portanto, implica que $d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$. Observe a seguinte ilustração.

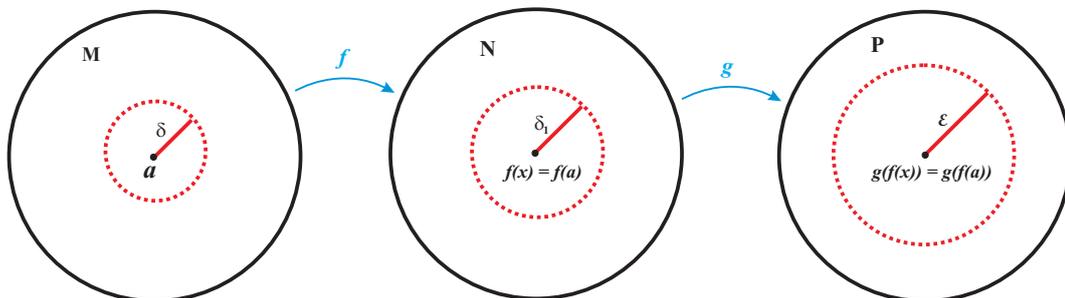


Figura 2.11: Composição de funções.

Provavelmente, o tipo de aplicação mais importante neste trabalho são as chamadas lipschitziana. Segue sua definição.

Definição 2.32. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita *lipschitziana* se existe $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M$. A constante $c > 0$ é chamada constante de Lipschitz.

Note que toda aplicação $f : M \rightarrow N$ lipschitziana é contínua. De fato, como f é uma aplicação lipschitziana, existe um $c > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Dessa forma, fixado $a \in M$ e dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, de modo que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua.

Exemplo 2.33. Sejam $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ funções lipschitzianas. Então, toda combinação linear $c_1 \cdot f_1 + \dots + c_n \cdot f_n$, em que $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, é uma função lipschitziana.

De fato, como f_1, \dots, f_n são funções lipschitzianas, existem $k_1, \dots, k_n > 0$ tais que, para todo $x, y \in M$, tem-se

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq k_1|x - y|, \dots, |f_n(x) - f_n(y)| \leq k_n|x - y|.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} & |c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) - (c_1 f_1(y) + \dots + c_n f_n(y))| \\ &= |c_1 f_1(x) - c_1 f_1(y) + \dots + c_n f_n(x) - c_n f_n(y)| \\ &= |c_1(f_1(x) - f_1(y)) + \dots + c_n(f_n(x) - f_n(y))| \\ &\leq |c_1(f_1(x) - f_1(y))| + \dots + |c_n(f_n(x) - f_n(y))| \\ &= |c_1| \cdot |(f_1(x) - f_1(y))| + \dots + |c_n| \cdot |(f_n(x) - f_n(y))| \\ &\leq |c_1| \cdot k_1 \cdot |x - y| + \dots + |c_n| \cdot k_n \cdot |x - y| \\ &= (|c_1| \cdot k_1 + \dots + |c_n| \cdot k_n) \cdot |x - y| = c \cdot |x - y|, \end{aligned}$$

onde $c = |c_1| \cdot k_1 + \dots + |c_n| \cdot k_n > 0$. Portanto, toda combinação linear $c_1 \cdot f_1 + \dots + c_n \cdot f_n$ de funções lipschitzianas é lipschitziana. \square

2.7 Sequências

Nesta seção, introduziremos a definição de sequências em um espaço métrico. Apresentaremos as noções de convergência e sequência de Cauchy, essenciais para o teorema principal deste trabalho.

Definição 2.34. Uma *sequência* no conjunto M é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow M$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ dos números naturais. O valor $x(n)$ com $n \in \mathbb{N}$ será indicado por x_n e chamado de n -ésimo termo da sequência.

Para representar uma sequência, usaremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou ainda (x_n) e para indicar o conjunto dos termos, escreveremos $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ou $x(\mathbb{N})$.

Note que se $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ for injetiva, os termos da sequência são dois a dois distintos. Por exemplo, se definirmos $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ colocando $x_n = (1 + (-1)^n)$, encontraremos a sequência $(0, 2, 0, 2, \dots)$, com o conjunto de valores $\{0, 2\}$. É importante notar que podem acontecer repetições entre os termos x_n de uma sequência de maneira que $x_m = x_n$ com $m \neq n$.

Definição 2.35. Num espaço métrico M , uma sequência é dita *limitada* quando existe $c > 0$ tal que $d(x_m, x_n) \leq c, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.36. Se $M = \mathbb{R}$, a sequência $x_n = (-1)^n$ é limitada.

A solução deste exemplo é de fácil visualização, pois a sequência é $(-1, 1, -1, 1, \dots)$, e a distância entre seus termos é $d(x_n, x_m) = |(-1)^n - (-1)^m| = 0$ quando n e m tem paridades iguais ou $d(x_n, x_m) = |(-1)^m - (-1)^n| = 2$ quando n e m tem paridades distintas. Portanto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Exemplo 2.37. Se $M = \mathbb{R}$, a sequência $x_n = (n + (-1)^n \cdot n)$ não é limitada.

De fato, a sequência é $(0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, 16, \dots)$, porém o conjunto de seus termos $\{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$ não limita-se. Logo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada.

Definição 2.38. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico M é dita *convergente* se existe um ponto $x \in M$ de modo que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Em outras palavras, x é chamado de limite de x_n e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ou } x_n \rightarrow x.$$

Podemos escrever também $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Quando uma sequência não for convergente, dizemos que ela é divergente.

Observação 2.39. Tratando-se de bolas, num espaço métrico M , toda bola $B(a, \varepsilon)$ de centro a e raio $\varepsilon > 0$, contém a sequência (x_n) , para todo n , com exceção de um número finito de pontos $\{x_1, \dots, x_{n_0}\}$.

Exemplo 2.40. A sequência $x_n = \frac{n}{n+1}$, para todo número natural n , converge em \mathbb{R} , considerando a métrica usual.

De fato, pela definição, dado $\varepsilon > 0$, tomamos n_0 de maneira que $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. Então, para todo n natural, temos

$$d(x_n, 1) = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) converge para 1.

Teorema 2.41. Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência convergente, em que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$. Particularmente, para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in B(a, 1).$$

Daí, o conjunto $C = \{x_1, \dots, x_{n_0}\}$ é um conjunto finito. Então, tomando, $r_1 = \max\{d(a, x_i)\}$, com $1 \leq i \leq n_0$, o conjunto C está contido na bola aberta $B(a, r_1)$. Dessa forma, todos os termos da sequência pertencem a $B(a, r_1)$. Portanto, a sequência (x_n) é limitada. \square

A recíproca do Teorema 2.41 é falsa. Por exemplo, a sequência de números reais $x_n = (-1)^n$ é limitada, mas não converge. Se $x_n = a^n$ com $|a| > 1$, então (x_n) não converge, pois não é limitada.

Proposição 2.42. *Seja (M, d) um espaço métrico.*

- i) *Uma sequência (x_n) não pode convergir para dois limites diferentes;*
- ii) *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) converge para a .*

Demonstração: A demonstração deste resultado encontra-se em [16], páginas 131 e 132. \square

2.8 Sequências de Cauchy

Neste trabalho, o exemplo mais importante de sequência é a *sequência de Cauchy*, que possui a propriedade de que seus termos distantes se tornam tão próximos quanto se queira.

Definição 2.43. Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (M, d) é dita ser de *Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{para todo } m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Note que a definição de sequência de Cauchy não diz nada a respeito de sua convergência, mas sim sobre a distância entre termos suficientemente grandes.

Teorema 2.44. *Toda sequência convergente num espaço métrico M é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração: Com efeito, se $\lim x_n = a$, então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, tomando $m, n > n_0$, tem-se

$$d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, pela desigualdade triangular, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, a sequência (x_n) é de Cauchy. \square

Exemplo 2.45. No conjunto dos números reais \mathbb{R} , a sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy.

Com efeito, como $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, segue do Teorema 2.44 que (x_n) é de Cauchy.

Observação 2.46. É importante analisar que nem toda sequência de Cauchy é convergente. Por exemplo, a sequência (x_n) dada por $(1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; \dots)$ é de Cauchy em \mathbb{Q} , mas não converge em \mathbb{Q} . Observe que $\lim x_n = \sqrt{2}$.

Teorema 2.47. *Toda sequência de Cauchy num espaço métrico é limitada.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M . Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ com $m, n > n_0$. Em particular, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < 1$. Logo, o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado, e como

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\} = \{x_1, \dots, x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$$

segue que a sequência de Cauchy (x_n) é limitada. \square

Por outro lado, quando a sequência é limitada não significa que ela seja de Cauchy. Por exemplo, no conjunto dos números reais, a sequência $(2, 0, 2, 0, \dots)$ é limitada, mas não é de Cauchy pois para todo n , a $d(x_m, x_n) = 2$.

Teorema 2.48. *Seja M um espaço métrico e (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Se (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) que converge para $a \in M$, então $\lim x_n = a$.*

Demonstração: A prova deste resultado encontra-se em [16], página 180. \square

2.9 Espaços Métricos Completos

A propriedade de completude em espaços métricos é a principal diferença entre \mathbb{Q} , o conjunto dos números racionais, e \mathbb{R} , o conjunto dos números reais. Esta propriedade ocorre em outros conjuntos também e é de fundamental importância para o estudo de pontos fixos, sobretudo o de Banach.

Definição 2.49. Um espaço métrico M é dito *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Proposição 2.50. *A reta real é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Com efeito, seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ponhamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Pelo Teorema 2.47, (x_n) é uma sequência limitada. Como $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$, tem-se que os conjuntos X_n são limitados e, portanto, possuem supremo e ínfimo. Sejam $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$ com $n \in \mathbb{N}$. Pelas propriedades de ínfimo (observe o Lema 1 nos Anexos), temos

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_1.$$

Isto significa que a sequência (a_n) é monótona e limitada no conjunto dos números reais. Logo, (a_n) é convergente (de acordo com o Lema 2 nos Anexos). Assim, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim a_n = a$. Neste momento, deixamos a cargo do leitor mostrar que existe uma subsequência de (x_n) que converge. Pelo Lema 3 nos Anexos, (x_n) converge. Portanto, \mathbb{R} é um espaço métrico completo. \square

Exemplo 2.51. Se M é o intervalo fechado $[0, 2]$ com a métrica usual de \mathbb{R} , então M é completo.

De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Então, (x_n) é de Cauchy em \mathbb{R} . Como \mathbb{R} é completo (ver a Proposição 2.50), existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = a$. Mas $M = [0, 2]$ é fechado e, pela definição de conjunto fechado, temos que $a \in M$. Logo, a sequência (x_n) converge em M . Portanto, M é completo.

Exemplo 2.52. Seja $M = (0, 1)$ o intervalo aberto na reta real. Se considerarmos em M a métrica usual de \mathbb{R} , temos que M não é um espaço métrico completo.

Isso é verdade, uma vez que $x_n = \frac{1}{2n}$ para $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de Cauchy de pontos de M que converge para $x = 0 \notin M$.

Exemplo 2.53. Qualquer espaço métrico (M, d) , em que d é a métrica zero-um (veja Exemplo 2.14), é completo.

Com efeito, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$ para $n, m \geq n_0$. Mas os únicos pontos que possuem distância menor que 1 são os pontos cuja distância é nula, ou seja, pontos que são iguais. Assim, (x_n) ser de Cauchy implica que (x_n) é constante a partir de um índice (n_0 , por exemplo), o que garante que converge em M , como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.54. O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} não é um espaço métrico completo.

De fato, por contradição, suponha que \mathbb{Q} é um espaço métrico completo. Em particular, considere a sequência (x_n) de números racionais dada por $(1; 1, 4; 1, 414; 1, 4142; \dots)$. Esta é uma sequência de Cauchy, pois converge em \mathbb{R} (veja o Teorema 2.44). Porém seu limite é $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Portanto, o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} não é um espaço métrico completo. \square

Capítulo 3

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo, iremos enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho, o Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual é crucial na demonstração de vários resultados da Matemática. A sua importância reside no fato de garantir a existência e a unicidade de ponto fixo através de um processo iterativo. Além disso, discutiremos a necessidade das hipóteses do teorema, mostrando por meio de exemplos que elas são realmente essenciais. E, por fim, veremos uma aplicação que é a segunda mais importante deste trabalho, intitulado como o famoso *método de Newton-Raphson*, que consiste em encontrar as raízes de uma função real, por aproximação numérica. A partir deste capítulo, denota-se o Teorema do Ponto Fixo de Banach simplesmente por T.P.F.B.

3.1 Um Pouco da História

A teoria dos pontos fixos se tornou uma ferramenta importante para nortear estudos sobre fenômenos não lineares, apresentando resultados de existência de solução. Nesse sentido, há vários tipos de teoremas sobre pontos fixos na literatura matemática, por exemplo, o *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer* (afirmando que toda função contínua $f : B^n \rightarrow B^n$ definida na bola fechada B^n contida em \mathbb{R}^n , tem pelo menos um ponto fixo, mas nem sempre é garantida a unicidade) e o *Teorema do Ponto Fixo de Schuader* (garante que, dado um subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach, toda função contínua definida neste conjunto tem um ponto fixo, não necessariamente único).

O *Teorema de Ponto Fixo de Banach* foi estabelecido por Banach em 1922. Stefan Banach foi um matemático polonês que nasceu em 30 de Março de 1892 na cidade de Cracóvia, localizada no sul da Polônia. Seu pai se chamava Stefan Greczek, um funcionário do imposto que não estava casado com a mãe de Banach, que desapareceu da cena depois que Stefan foi batizado, quando ele tinha apenas quatro dias e não se sabe mais nada sobre a vida dela. Na certidão de nascimento de Banach, encontra-se o nome de sua mãe como Katarzyna Banach.

Banach frequentou a escola primária em Cracóvia, deixando a escola em 1902 para iniciar o ensino secundário no ginásio. Uma grande coincidência é que um dos alunos da classe de Banach foi Witold Wilkosz, o qual se tornou um professor de matemática. Sua escolha foi estudar engenharia, deixando a Cracóvia e indo para Lviv, onde matriculou-se na Faculdade de Engenharia da Universidade Técnica de Lviv. Sem apoio financeiro, Banach teve que se sustentar dando aulas. Por isso, ele levou mais tempo para concluir o curso do que era comum em 1914.

Depois de ajudar seu amigo Steinhaus a resolver um problema matemático, Banach tomou gosto pela coisa e começou a produzir trabalhos importantes na matemática. Em 1924, Banach foi promovido a professor titular e passou o ano letivo de 1924 a 1925 em Paris, onde escreveu trabalhos para algumas escolas de Ensino Médio na área de Geometria, Álgebra e Aritmética. Banach morreu de câncer de pulmão na cidade de Lviv em 31 de Agosto de 1945.

3.2 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

O estudo das propriedades de determinadas funções é indispensável em grandes áreas da Matemática como na Análise e na Matemática Aplicada. Muitos pesquisadores atualmente estão desenvolvendo trabalhos nesse sentido, uma vez que a compreensão de como uma função se comporta pode trazer resultados surpreendentes para nossa realidade. O próprio Cálculo Diferencial se preocupa em conhecer o comportamento de algumas funções em torno de certos pontos. O Teorema do Ponto Fixo de Banach vem nessa direção e, basicamente, fornece hipóteses suficientes para que uma função f possua um ponto fixo, isto é, que exista um elemento x no domínio da função f que satisfaça $f(x) = x$. Um resultado interessante (talvez, o mais importante no contexto das Equações Diferenciais Ordinárias) que vem como consequência deste teorema é o famoso Teorema da Existência e Unicidade de solução para EDO's. Além disso, o T.P.F.B contém outras aplicações, no que se refere às equações numéricas, equações integrais e outras áreas da Matemática pura.

Antes de partirmos para matemática em si, você conhece a brincadeira do Amigo-secreto? Ela é uma brincadeira tradicional que acontece no final do ano, geralmente, e tem como objetivo trocar presentes por meio da confraternização com os demais integrantes da dinâmica. Para a realização da brincadeira, colocam-se os nomes dos participantes num papel e deposita-se cada nome numa única urna. Em seguida, cada pessoa retira aleatoriamente da urna um bilhete, no qual contém o nome do seu amigo-secreto. Porém, um problema muito comum desta dinâmica é quando a pessoa retira o seu próprio nome da urna. Se f for chamada de função escolha, por exemplo, $f(x)$ é o nome tirado pela pessoa que possui o nome x , quando este fato ocorre, temos que $f(x) = x$, ou seja, a pessoa com nome x tirou o nome x da urna. Tal fato corriqueiro pode ocorrer em funções matemáticas, como nos exemplos abaixo. Quando isto ocorre com uma

função, dizemos que x é um ponto fixo.

Definição 3.1. Sejam F um conjunto não vazio e $f : F \rightarrow F$ uma função. Dizemos que f tem *ponto fixo* se existe um $x \in F$ tal que x é levado nele mesmo, ou seja,

$$f(x) = x.$$

Os pontos que satisfazem essa equação são chamados de *pontos fixos* da aplicação f . Na prática, dada uma função f , pode ser difícil saber se existe ponto fixo para ela. Geometricamente, os pontos fixos de uma função f são os pontos do seu gráfico que interceptam o gráfico da aplicação identidade. Veremos agora, alguns exemplos em equações numéricas.

Exemplo 3.2. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ possui pontos fixos.

De fato, pela Definição 3.1, tem-se $f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$. Assim, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$ são pontos fixos de f .

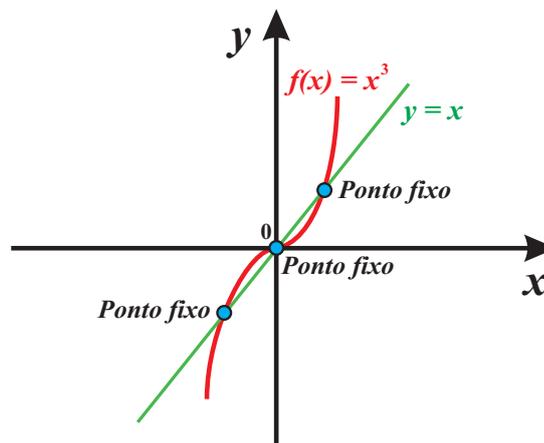


Figura 3.1: Pontos fixos da função $f(x) = x^3$.

Exemplo 3.3. A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{x}$ não possui pontos fixos.

De fato, note que

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2}{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = -2.$$

Porém, não existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça tal igualdade. Logo, f não possui pontos fixos.

Definição 3.4. Seja (M, d) um espaço métrico. Uma aplicação $f : M \rightarrow M$ é uma *contração* quando existe uma constante $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Exemplo 3.5. Sejam M o espaço métrico completo dos números reais com a métrica usual e a função $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Temos que a função f é uma contração.

Com efeito, pela Definição 3.4, temos que provar que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in [1, +\infty)$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot \frac{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \\ &= \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Como o domínio da função é $[1, +\infty)$, tem-se $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} \geq 1 + 1 \geq 2$. Então $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}$. Logo,

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y| \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} \cdot d(x, y).$$

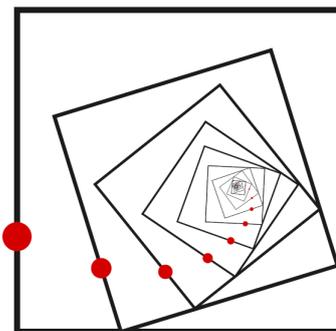
Portanto, f é uma contração, escolhendo $\alpha = \frac{1}{2}$. □

Observação 3.6. No Exemplo 3.5, se o domínio da função f tivesse sido o intervalo fechado $[0, 1]$, concluiríamos que a função não é contração. De fato, supondo o contrário, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \alpha \cdot |x - y|$ para todo $x, y \in [0, 1]$. Assim, se x, y forem distintos, tem-se

$$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| \leq \alpha \Leftrightarrow \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right| \leq \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \alpha \forall x \neq y.$$

Tomando $x \rightarrow 0^+$ e $y \rightarrow 0^+$, segue que $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \rightarrow +\infty$, uma contradição.

Neste momento, apresentaremos o teorema mais importante deste trabalho, o Teorema do Ponto fixo de Banach (T.P.F.B). Ele não só nos fornece condições suficientes para garantir a existência de um ponto fixo para uma função, bem como um processo iterativo para determinar tal ponto, através de aproximações sucessivas. Utilizamos o T.P.F.B, na elaboração de um *programa* (com auxílio do software MATLAB) que encontra os zeros da função por meio do ponto fixo. Nesse sentido, procuramos de todas as maneiras deixá-lo bastante compreensível. A imagem a seguir é um resumo do resultado principal deste trabalho.



Teorema 3.7. (Ponto Fixo de Banach): *Sejam F um espaço métrico completo e $f : F \rightarrow F$ uma contração. Então, existe único $x \in F$ tal que $f(x) = x$, isto é, f possui um único ponto fixo.*

Demonstração: Escolha qualquer $x_0 \in F$ e considere a sequência (x_n) em F definida por

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots \quad (3.1)$$

Mostraremos que a sequência (x_n) é de Cauchy. Para isso, como f é uma contração, segue que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1),$$

como também

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_2, x_3) \leq \alpha^2 d(x_0, x_1).$$

Dessa forma, segue por indução que, para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se que $d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m d(x_0, x_1)$.

Para $n > m$, temos pela desigualdade triangular a seguinte afirmação:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n). \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) + \alpha^{m+1} d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{n-1} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Colocando $d(x_0, x_1)$ em evidência, obtemos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_0, x_1) \cdot (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}).$$

Da mesma forma, colocando α^m em evidência, segue que

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \cdot (1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-m-1}) \cdot d(x_0, x_1). \quad (3.2)$$

Podemos observar que $(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-m-1})$ é a soma de $n - m - 1$ termos de uma progressão geométrica de razão α e primeiro termo 1, e essa soma é denotada pela expressão $\sum_{j=0}^{n-m-1} \alpha^j =$

$\frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha}$. Assim, $(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-m-1}) = \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha}$, o que torna a equação (3.2) em

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \cdot \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \cdot d(x_0, x_1).$$

Como $0 < \alpha < 1$, segue que $0 \leq 1 - \alpha^{n-m} \leq 1$ e, conseqüentemente,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} \cdot d(x_0, x_1).$$

Pelo Exemplo 6 em [11], capítulo 3, página 27, segue que $\alpha^m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \right) = d(x_0, x_1) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} = 0.$$

Note que $0 < \alpha < 1$ e $d(x_0, x_1)$ são fixos, então, para m suficientemente grande e $n > m$, $d(x_m, x_n)$ torna-se arbitrariamente pequeno. Concluimos que a sequência (x_n) é de Cauchy em F . Como F é um espaço métrico completo, temos que (x_n) converge, ou seja, existe $x \in F$ tal que $\lim x_n = x$. Mostraremos agora que x é um ponto fixo da aplicação f . Segue da desigualdade triangular e do fato de f ser contração, temos que

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, f(x)) = d(x, x_m) + d(f(x_{m-1}), f(x)) \leq \\ &d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x). \end{aligned}$$

Tomando $m \rightarrow \infty$, tem-se $d(x, f(x)) \leq 0$. Como a distância é sempre um número não negativo, segue daí que $d(x, f(x)) = 0$. Logo, necessariamente, $f(x) = x$. Isso mostra que o ponto fixo existe. Agora, provaremos que o ponto fixo é único. Para isso, suponha que exista, além de x , outro ponto fixo y de forma que $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Então,

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Em outras palavras, uma vez que $0 < \alpha < 1$,

$$0 \leq (1 - \alpha)d(x, y) \leq 0.$$

Logo, como $\alpha \neq 1$, temos $d(x, y) = 0$, ou seja, $x = y$. Portanto, x é o único ponto fixo da aplicação f , e o teorema está provado. \square

Não podemos deixar de falar algo de suma relevância neste momento. Além da conclusão do T.P.F.B, sua demonstração também é rica em informações interessantes. As iteradas da função f definidas em **qualquer** ponto de seu domínio formam uma sequência de pontos que converge para o ponto fixo de f (veja esta definição em (3.1)). Este método será aplicado adiante para se obter exemplos e resultados sobre certas funções.

Sobre o T.P.F.B, é importante observar a presença de duas hipóteses que são condições suficientes para sua demonstração. Veremos alguns exemplos que mostrarão precisamente que o teorema fica prejudicado com a falta de qualquer uma delas.

A primeira hipótese do T.P.F.B é que o espaço métrico é completo. Se a retirarmos, será que o teorema ainda é válido? Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 3.8. Consideremos o espaço métrico $M = (0, 1)$, o qual não é completo (veja o Exemplo 2.52) e seja a função $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Apesar de f ser uma contração, ela não possui pontos fixos.

De fato, note que é fácil visualizar que f é uma contração, pois

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2} \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in M.$$

Note que f não possui pontos fixos no intervalo $(0, 1)$, pois

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x \Rightarrow \frac{x + 1}{2} = \frac{2x}{2} \Rightarrow x + 1 = 2x \Rightarrow 2x - x = 1 \Rightarrow x = 1.$$

Dessa forma, mesmo havendo uma contração, é impossível concluir o Teorema do Ponto Fixo de Banach quando o espaço métrico em questão não é completo. Observe a seguir o gráfico desta função.

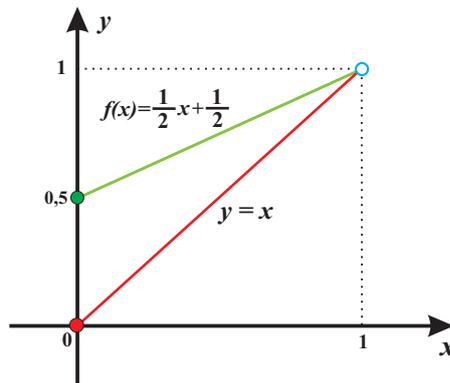


Figura 3.2: Gráfico da função f do Exemplo 3.8.

A outra condição no T.P.F.B é que a aplicação f tem que ser uma contração definida num espaço métrico completo. Mostraremos dois casos em que a aplicação não é contração.

Exemplo 3.9. Sejam $M = \mathbb{R}$ um espaço métrico completo com a métrica usual e a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3$. Neste caso, f não é uma contração.

Notamos facilmente que f não é uma contração, mas neste exemplo perdemos a unicidade do ponto fixo de f . De fato, pela Definição 3.4, temos

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 - 3 = x \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Assim, obtemos duas raízes reais, a saber,

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ e } \frac{1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Logo, f não é uma contração, pois, segundo o T.P.F.B, se f fosse contração, como \mathbb{R} é um espaço métrico completo (ver a Proposição 2.50), teríamos apenas um ponto fixo.

Exemplo 3.10. Sejam $M = \mathbb{R}$ um espaço métrico completo com a métrica usual e a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 3$. Neste caso, f não é uma contração.

A função $f(x) = x^2 + 3$ não é uma contração no domínio de f , pois se f fosse uma contração teria um único ponto fixo, mas pela definição tem-se

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 + 3 = x \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

Observe que a função não possui soluções reais. Logo, f não tem nenhum ponto fixo.

Vamos analisar geometricamente os dois exemplos acima, em que no primeiro a função possui dois pontos fixos, e no segundo, nenhum.

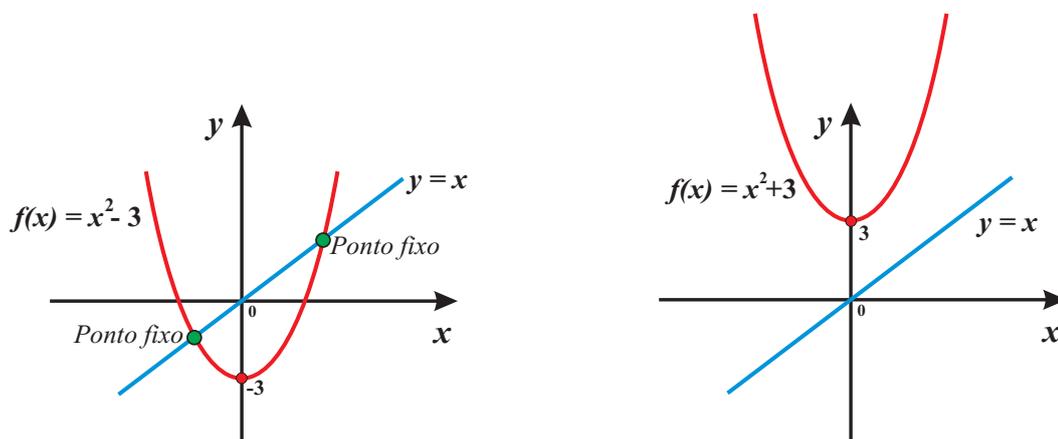


Figura 3.3: Gráficos das funções dos Exemplos 3.9 e 3.10.

Curiosidade: *Ponto Fixo de Banach aplicado à raiz quadrada de um número real positivo.*

Utilizando uma calculadora, faça a seguinte experiência. Escreva na calculadora qualquer número real positivo e , em seguida, extraia a raiz quadrada do número escolhido. Através do processo de iterações, repita este processo n vezes, ou seja, com o resultado da primeira iteração, aperte a tecla raiz quadrada várias vezes. Observa-se que irá parar no número 1. Este fenômeno se dá pelo fato de que 1 é um ponto fixo da função raiz quadrada. Matematicamente falando, dado qualquer $1 \leq b \in \mathbb{R}$, denota-se a sequência $x_n = \sqrt{x_{n-1}}$ com $n \geq 2$. Com isto, é possível mostrar que o $\lim x_n = 1$.

Realizando a experiência: Seja $x_1 = 8$. Extraíndo a raiz quadrada e reiterando, temos:

$$\begin{array}{lll} x_1 = \sqrt{8} \cong 2,83 & x_4 = \sqrt{1,29} \cong 1,14 & x_7 = \sqrt{1,03} \cong 1,01 \\ x_2 = \sqrt{2,83} \cong 1,68 & x_5 = \sqrt{1,14} \cong 1,06 & x_8 = \sqrt{1,01} \cong 1,00 \\ x_3 = \sqrt{1,68} \cong 1,29 & x_6 = \sqrt{1,06} \cong 1,03 & x_9 = \sqrt{1,00} \cong 1,00 \end{array}$$

Portanto, o número 1 é um ponto fixo da raiz quadrada (veja o Exemplo 3.5).

Os exemplos a seguir são, provavelmente, os exemplos mais importantes deste capítulo, tendo em vista seu elo com a veracidade do T.P.F.B. Os mesmos ajudarão na compreensão do teorema em questão.

Exemplo 3.11. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = \lambda e^{-x}$ com $0 < \lambda < 1$. Aqui, olharemos o intervalo $[0, 1]$ como um espaço métrico completo, onde a métrica utilizada é

a métrica padrão de \mathbb{R} , isto é, $d(x, y) = |x - y|$. A função possui pontos fixos? Se sim, Quantos deles existem?

Primeiramente, como o intervalo $[0, 1]$ é um espaço métrico completo (veja Exemplo 2.51), provaremos que f é uma contração, ou seja, provaremos que, dados $x < y$ números no intervalo $[0, 1]$, vale que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad (3.3)$$

para algum $0 < \alpha < 1$. Para isso, utilizando o Teorema do Valor Médio (observe o Teorema 3 nos Anexos), existe um $c \in (x, y)$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y).$$

Assim,

$$|\lambda e^{-x} - \lambda e^{-y}| = |-\lambda e^{-c}| \cdot |x - y| = \lambda e^{-c} \cdot |x - y| \leq \lambda |x - y|,$$

pois $e^{-c} = \frac{1}{e^c} \leq 1$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Assim,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda \cdot |x - y|.$$

Considerando $\alpha = \lambda$, temos que f é uma contração. Segue do T.P.F.B que a função $f(x) = \lambda e^{-x}$ possui um único ponto fixo, visto que o intervalo $[0, 1]$ é um espaço métrico completo. Vamos exemplificar, tomando um valor numérico para λ . Aqui, utilizaremos as iteradas da demonstração do T.P.F.B. Perceba o quanto esta demonstração é rica em informações. Considere $x_0 = 0,5 \in [0, 1]$ como valor inicial e $\lambda = \frac{1}{4}$. Aplicando as iterações, tem-se

$$x_1 = f(0,5) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,5} = 0,1516326649$$

$$x_2 = f(0,1516326649) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,1516326649} = 0,2148259688$$

$$x_3 = f(0,2148259688) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2148259688} = 0,2016704557$$

$$x_4 = f(0,2016704557) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2016704557} = 0,2043410603$$

$$x_5 = f(0,2043410603) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2043410603} = 0,2037960741$$

$$x_6 = f(0,2037960741) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2037960741} = 0,2039071705$$

$$x_7 = f(0,2039071705) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2039071705} = 0,2038845184$$

$$x_8 = f(0,2038845184) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2038845184} = 0,2038891368$$

$$x_9 = f(0,2038891368) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2038891368} = 0,2038881952$$

$$x_{10} = f(\mathbf{0,2038881952}) = \frac{1}{4} \cdot e^{-0,2038881952} = \mathbf{0,2038881372}.$$

Observe que, à medida que fazemos mais iterações, a sequência (x_n) se aproximará do ponto fixo da função f . Com as dez iterações realizadas, encontramos aproximadamente o ponto fixo $x \cong 0,2038881$. Denota-se geometricamente o ponto fixo de f no gráfico abaixo.

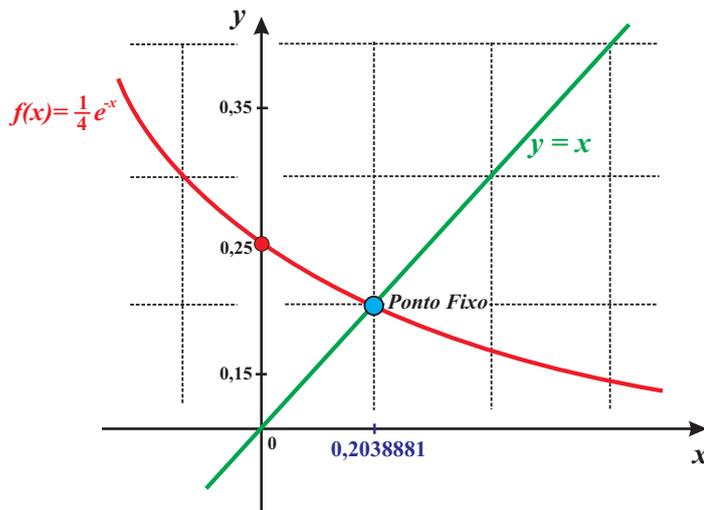


Figura 3.4: Ponto fixo da função f do Exemplo 3.11.

Exemplo 3.12. Seja $M = \mathbb{R}$ o espaço métrico dos números reais com a métrica usual e seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lambda \cdot \operatorname{tg}^{-1}(x)$ com $0 < \lambda < 1$. A função f possui pontos fixos? Quantos deles existem?

Vamos mostrar primeiro que f é uma contração. Mais especificamente, mostraremos que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$, tem-se

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y). \tag{3.4}$$

Para isso, utiliza-se o Teorema do Valor Médio (observe o Teorema 3 nos Anexos) para garantir a existência de um número $c \in (x, y)$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(c) \cdot (x - y).$$

Assim,

$$|f(x) - f(y)| = |\lambda \cdot \operatorname{tg}^{-1}(x) - \lambda \cdot \operatorname{tg}^{-1}(y)| = \lambda \cdot |\operatorname{tg}^{-1}(x) - \operatorname{tg}^{-1}(y)| \leq \lambda \cdot |x - y|,$$

já que $f'(c) = \frac{\lambda}{1+c^2} \leq \lambda \leq 1$. Concluímos que f é uma contração e, pelo T.P.F.B, a função $f(x) = \lambda \cdot \operatorname{tg}^{-1}(x)$ possui um único ponto fixo, uma vez que \mathbb{R} é um espaço métrico completo (veja a Proposição 2.50). Para fixar ideias, considere o valor inicial $x_0 = 0,5$ e seja $\lambda = \frac{1}{5}$. Seguem as seguintes iterações:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= f(0,5) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,5) = 0,0927295218 \\
 x_2 &= f(0,0927295218) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0927295218) = 0,0184930196 \\
 x_3 &= f(0,0184930196) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0184930196) = 0,0036981823 \\
 x_4 &= f(0,0036981823) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0036981823) = 0,0007396330 \\
 x_5 &= f(0,0007396330) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0007396330) = 0,0001479265 \\
 x_6 &= f(0,0001479265) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0001479265) = 0,0000295853 \\
 x_7 &= f(0,0000295853) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000295853) = 0,0000059170 \\
 x_8 &= f(0,0000059170) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000059170) = 0,0000011834 \\
 x_9 &= f(0,0000011834) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000011834) = 0,0000002366 \\
 x_{10} &= f(0,0000002366) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000002366) = 0,0000000473 \\
 x_{11} &= f(0,0000000473) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000000473) = 0,0000000094 \\
 x_{12} &= f(0,0000000094) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000000094) = 0,0000000018 \\
 x_{13} &= f(0,0000000018) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000000018) = 0,0000000003 \\
 x_{14} &= f(0,0000000003) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0,0000000003) = 0,0000000000 \\
 x_{15} &= f(\mathbf{0}) = \frac{1}{5} \cdot \operatorname{tg}^{-1}(0) = \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Note que, na décima quinta iteração, o valor de x_{14} e x_{15} são aproximadamente 0. O gráfico abaixo, ilustra com precisão esse ponto fixo.

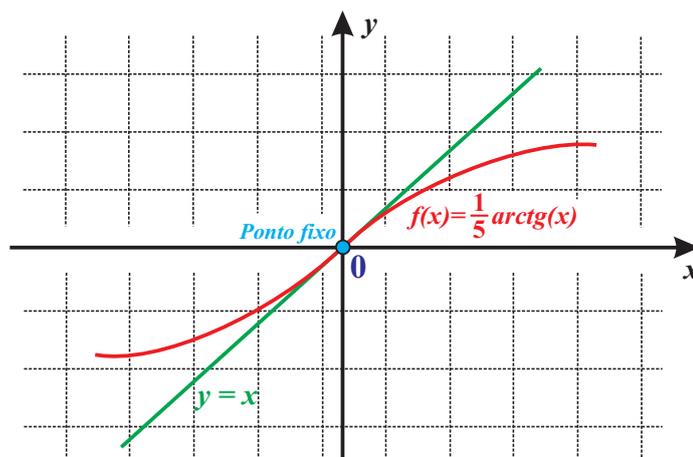


Figura 3.5: Ponto fixo da função f do Exemplo 3.12.

Agora, apresentaremos um exemplo que está relacionado com o nosso cotidiano. Este exemplo foi parafraseado de [4], capítulo 1, páginas 1, 2 e 3. O trabalho original pode ser encontrado na Revista Gazeta de Matemática, janeiro 2002 - número 142, Portugal.

Exemplo 3.13. Certo dia, um aluno chamado Eduardo Dias do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Campos Brasil teve a seguinte inquietação: Eduardo tinha uma calculadora científica, mas não sabia usá-la de maneira adequada. Após realizar a atividade de matemática proposta pela professora, Eduardo e alguns colegas da turma foram brincar com a sua calculadora (que estava em radianos, por coincidência). Os mesmos efetuaram algumas operações. Cansado da brincadeira, Eduardo pega a sua calculadora científica e digita aleatoriamente o número 18 e, em seguida, pressiona a tecla “cos”, obtendo como resposta 0,660316. Achando estranho o resultado obtido, ele resolve pressionar a tecla “cos” novamente e encontra 0,789798. Dessa forma, ele repetiu mais uma vez, e outra, reiteradamente. Assim, obteve as seguintes soluções:

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = \cos(18) = 0,660316 & x_8 = \cos(0,731931) = 0,743884 \\
 x_2 = \cos(0,660316) = 0,789798 & x_9 = \cos(0,743884) = 0,735843 \\
 x_3 = \cos(0,789798) = 0,703988 & x_{10} = \cos(0,735843) = 0,741264 \\
 x_4 = \cos(0,703988) = 0,762266 & x_{11} = \cos(0,741264) = 0,737615 \\
 x_5 = \cos(0,762266) = 0,723272 & x_{12} = \cos(0,737615) = 0,740074 \\
 x_6 = \cos(0,723272) = 0,749643 & x_{13} = \cos(0,740074) = 0,738418 \\
 x_7 = \cos(0,749643) = 0,731931 & x_{14} = \cos(0,738418) = 0,739534 \\
 & x_{15} = \cos(0,739534) = 0,738782 \\
 & x_{16} = \cos(0,738782) = 0,739288
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_{17} = \cos(0,739288) = 0,738947 & x_{24} = \cos(0,739089) = 0,739082 \\
x_{18} = \cos(0,738947) = 0,739177 & x_{25} = \cos(0,739082) = 0,739086 \\
x_{19} = \cos(0,739177) = 0,739022 & x_{26} = \cos(0,739086) = 0,739083 \\
x_{20} = \cos(0,739022) = 0,739127 & x_{27} = \cos(0,739083) = 0,739084 \\
x_{21} = \cos(0,739127) = 0,739056 & x_{28} = \cos(0,739084) = 0,739085 \\
x_{22} = \cos(0,739056) = 0,739104 & x_{29} = \cos(0,739085) = 0,739085 \\
x_{23} = \cos(0,739104) = 0,739089 & x_{30} = \cos(\mathbf{0,739085}) = \mathbf{0,739085}.
\end{array}$$

Após pressionar 30 vezes, Eduardo ficou muito confuso, e não entendeu por que a sua calculadora parou nesse valor, e por mais que ele pressionava a tecla “cos”, permanecia a mesma solução. Será que a calculadora está com problemas? Por que isso acontece? Por que é que, depois de 28 iterações o valor continua o mesmo? Afrito e sem chegar em nenhuma conclusão, Eduardo se direciona para sua professora e questiona sobre o ocorrido. A professora impressionada com a inquietação do seu aluno, responde calmamente: A calculadora parou, porque a função cosseno é uma contração e, como \mathbb{R} é um espaço métrico completo, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$ (ponto fixo). E concluiu dizendo que esse assunto está relacionado a uma matemática mais avançada, em especial ao famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach. E, por fim, depois de ter sua dúvida dirimida, Eduardo mostrou a sua descoberta para os amigos da classe.

Assim como Eduardo, outras pessoas podem ter essa inquietação. A explicação da professora está correta, porém sucinta. Dessa forma, fundamentaremos a sua explanação, mostrando que a função cosseno pode ser estudada sobre o ponto de vista do T.P.F.B.

Apenas para fixar ideias, consideremos na reta real a função $f(x) = \lambda \cdot \cos(x)$ com $\lambda < 1$. Sabemos que a reta real é um espaço métrico completo (observe a Proposição 2.50), com isto, basta verificarmos que f é uma contração, ou seja,

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| = |\lambda \cdot \cos(x) - \lambda \cdot \cos(y)| = \\
&= \lambda \cdot |\cos(x) - \cos(y)| = \lambda \cdot \left| \int_y^x \text{sen}(t) dt \right| \leq \lambda \cdot \int_y^x |\text{sen}(t)| dt.
\end{aligned}$$

Como $|\text{sen}(t)| \leq 1$, segue que

$$\lambda \cdot \int_y^x |\text{sen}(t)| dt \leq \lambda \cdot \int_y^x dt = \lambda \cdot (x - y) \leq \lambda \cdot |x - y| = \lambda \cdot d(x, y).$$

Logo,

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y).$$

Portanto, f é uma contração e, pelo T.P.F.B a função admite um único ponto fixo. Como Eduardo encontrou esse ponto fixo acima, por meio de $x_n = \cos(\cos(\cos(\dots \cos(x_0) \dots)))$, observe o gráfico desta função.

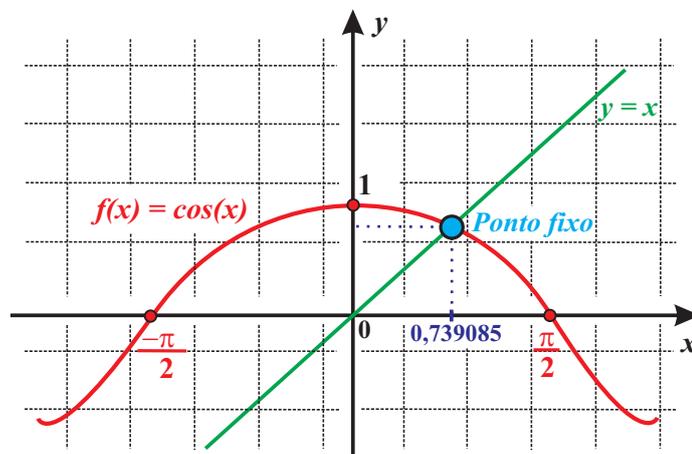


Figura 3.6: Ponto fixo da função cosseno.

3.3 O Método de Newton-Raphson

Nesta seção, veremos uma aplicação no campo do Cálculo Numérico, conhecida como o famoso método de Newton-Raphson. Essa aplicação está sob o ponto de vista do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que se preocupa com a determinação dos zeros de funções reais. O mesmo é um dos métodos numéricos mais eficientes e conhecidos para encontrar as raízes de uma função. Para isso, escolhe-se uma aproximação inicial e, depois, calcula-se a equação da reta tangente da função nesse ponto inicial, ou seja, encontraremos a derivada da função e, em seguida, calcularemos a interseção dela com o eixo das abscissas, com intuito de estimar de forma eficiente algum zero de uma função. Este método, conhecido também como Método das Tangentes, é uma particularidade do método das aproximações sucessivas.

Primeiramente, para essa aplicação, apresentaremos todos os conceitos necessários com vários exemplos, buscando mostrar a importância da escolha do ponto inicial na definição da sequência de Newton. Uma boa escolha do ponto inicial assegura a convergência da sequência e, conseqüentemente, a determinação do zero da função.

Nesse sentido, usamos o *Software* MATLAB e elaboramos um *programa* de acordo com os algoritmos estabelecidos abaixo. O programa tem como objetivo mostrar como funciona na prática o método de Newton-Raphson em relação ao T.P.F.B, apresentando os zeros, os pontos fixos e os gráficos das funções definidas. O MATLAB é uma linguagem de programação apropriada ao desenvolvimento de aplicativos de natureza técnica e é um software interativo de alta performance voltado para o Cálculo Numérico.

O método de Newton-Raphson, basicamente, diz que: Dada uma função f contínua no intervalo $[a, b]$, onde existe uma única raiz, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.

Interpretação Geométrica

Nos preocuparemos agora em apresentar geometricamente este método. Considere x_0 um ponto dentro do intervalo onde se sabe que a função f tem uma raiz. Ora, a equação da reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Encontrando o ponto x_1 de interseção desta reta com o eixo das abscissas, tem-se que

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Lembre-se que estamos supondo que $f'(x_0) \neq 0$. Se continuarmos fazendo este processo indutivamente, temos que o ponto x_{n+1} é obtido traçando-se a tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_n, f(x_n))$ e obtendo, a partir desta reta, sua interseção com o eixo das abscissas. Observe o gráfico abaixo para uma melhor compreensão.

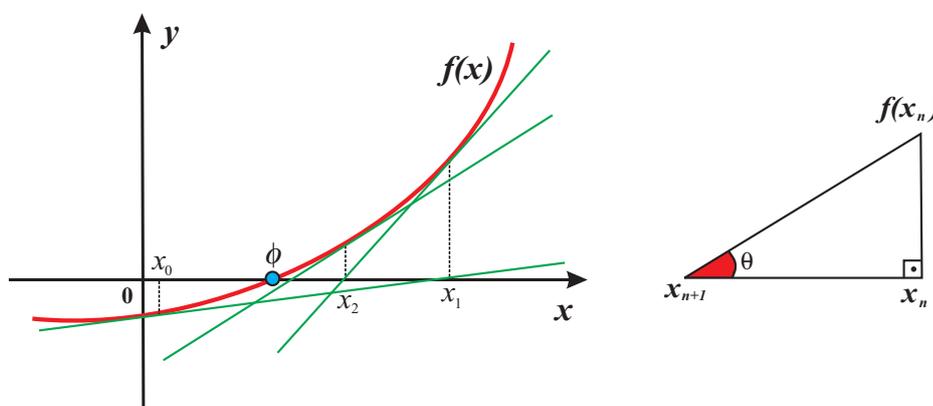


Figura 3.7: Interpretação gráfica do método de Newton-Raphson.

Analisando o gráfico acima, podemos falar algebricamente que

$$\operatorname{tg}(\theta) = f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.5)$$

Existem muitos resultados sobre a convergência da sequência (x_n) construída acima. Aqui, não daremos ênfase a eles por questão de completude. O fato é que, caso (x_n) convirja, temos da equação (3.5) que o ponto para onde ela converge é o zero da função f .

A seguir, daremos uma maneira de trazer à tona o T.P.F.B aplicado a este método. Transformaremos o problema de encontrar o zero de uma função em um problema de encontrar ponto fixo de outra função.

Dada uma equação $f(x) = 0$, note que, se $g_1(x) = x + f(x)$, então pontos fixos de g_1 são zeros de f . Mas a função $g_2(x) = x + 5f(x)$ também possui esta propriedade. Vamos considerar uma forma mais geral para esta classe de funções e estudá-la sob o ponto de vista do T.P.F.B. Seja g a função dada por

$$g(x) = x + A(x) \cdot f(x), \quad (3.6)$$

onde A é uma função a ser determinada de maneira que as iteradas de g aplicadas a um ponto específico convirja adequadamente. É possível mostrar que isso ocorre quando $g'(\phi) = 0$, em que ϕ é o zero procurado da função f (veja [6], capítulo 1). Pela regra do produto para funções de uma variável, tem-se

$$g'(x) = 1 + A'(x) \cdot f(x) + A(x) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(\phi) = 1 + A'(\phi) \cdot f(\phi) + A(\phi) \cdot f'(\phi).$$

Como $f(\phi) = 0 = g'(\phi)$, obtemos

$$A(\phi) = \frac{-1}{f'(\phi)}.$$

Escolhemos, então, a função A como sendo $A(x) = \frac{-1}{f'(x)}$. Assim, substituindo na equação (3.6), temos

$$g(x) = x - \left(\frac{f(x)}{f'(x)} \right).$$

A partir de g , procura-se seu ponto fixo para, assim, obter-se o zero de f .

Observação 3.14. De acordo com [6], o método de Newton-Raphson pode ser deduzido por séries de Taylor. Caso a aproximação inicial x_0 não esteja suficientemente próxima da raiz real, há poucos motivos para suspeitar que o método convergirá para a raiz. Porém, em alguns casos, encontraremos a raiz da função mesmo não escolhendo uma boa aproximação inicial. Isso pode ser verificado no Teorema 3.16, o qual apenas enunciaremos. Este resultado mostra a importância da escolha de x_0 .

Exemplo 3.15. Usando o Método de Newton-Raphson, determinaremos um valor aproximado para $\sqrt{3}$.

Ora, como $x = \sqrt{3}$, tem-se $x^2 = 3$ e, assim, obter um valor aproximado para $\sqrt{3}$ significa determinar o zero positivo de $f(x) = x^2 - 3$. As iterações são $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ com $f'(x) = 2x$. Começando com $x_0 = 1$, temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \left(\frac{1^2 - 3}{2 \cdot 1} \right) = 1 - \left(\frac{-2}{2} \right) = 2;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \left(\frac{2^2 - 3}{2 \cdot 2} \right) = 2 - \left(\frac{1}{4} \right) = 1,75 = \frac{7}{4};$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,75 - \left(\frac{1,75^2 - 3}{2 \cdot 1,75} \right) = 1,732142857 = \frac{97}{56};$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,732142857 - \left(\frac{1,732142857^2 - 3}{2 \cdot 1,732142857} \right) = 1,73205081 = \frac{18817}{10864}.$$

Percebemos que, na quarta iteração, já conseguimos uma aproximação para o ponto fixo da sequência com precisão de sete casas decimais para $\sqrt{3}$, ou seja, aproximação $x = 1,73205081$.

Teorema 3.16. *Seja $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \phi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\phi) \neq 0$, existirá um intervalo $U \subseteq I$ contendo a raiz ϕ , tal que se $x_0 \in U$, a sequência (x_n) gerada pela fórmula recursiva*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

convergir para a raiz.

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrada em [6], capítulo 2, páginas 66 e 67. □

Algoritmo do método de Newton-Raphson

Neste momento, mostraremos as ferramentas que utilizamos na elaboração do programa com auxílio do software MATLAB, isto é, o algoritmo do método de Newton-Raphson, para determinar uma solução para $f(x) = 0$, dada a derivada de f e uma aproximação inicial p_0 . Para isso, devemos obedecer alguns passos.

ENTRADA: Aproximação inicial p_0 , precisão ou tolerância (ϕ) e o número máximo de iterações n_0 .

SAÍDA: Solução aproximada p ou mensagem de “solução não encontrada”.

Passo 1: Faça $i = 1$.

Passo 2: Enquanto $i \leq n_0$, execute os passos 3 a 6.

Passo 3: Faça $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$. (calcula p_i)

Passo 4: Se $|p - p_0| < \phi$, então SAÍDA (P); (Procedimento concluído com sucesso.) e PARE.

Passo 5: Faça $i = i + 1$.

Passo 6: Faça $p_0 = p$. (Atualiza p_0).

Passo 7: SAÍDA (Solução não encontrada após n_0 iterações.) e PARE.

Outros critérios de parada que podem ser utilizados:

- i) $|p_n - p_{n-1}| < \phi$;
- ii) $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \phi$, com $p_n \neq 0$;
- iii) $|f(p_n)| < \phi$.

Agora, abordaremos alguns exemplos não triviais que serão solucionados pelo programa denominado “NewtonRA”, elaborado com o algoritmo apresentado acima. Vamos mostrar o zero da função f , o ponto fixo da função g e seus respectivos gráficos.

Exemplo 3.17. Usando o método de Newton-Raphson, vamos determinar um valor aproximado do zero da função $f(x) = x + 1 - \tan(x)$ com ponto inicial $x_0 = 1,1$ e precisão $\xi = 0,0001$. E em seguida, os gráficos das funções f e g com os extremos do intervalo $1 \leq x \leq 2$.

```
>> NewtonRA
```

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

```
Ingresse o valor inicial: 1.1
```

```
Ingresse a tolerância: 0.000001
```

```
Ingresse o número máximo de interações: 30
```

```
Ingresse a função f(x): x+1-tan(x)
```

```
função = x-tan(x)+1
```

```
derivada = -tan(x)^2
```

```
função g(x) = x + (x - tan(x) + 1)/tan(x)^2
```

```
Aproximações para o ponto fixo de g(x) =
```

```
1.1000000000000000
```

```
1.135033812277287
```

```
1.132287593800870
```

```
1.132267726299738
```

```
1.132267725272885 (Ponto fixo de g e zero de f)
```

```
Aproximações dos zeros da função f(x) =
```

```
0.453596121425577
```

```
0.012667262006370
```

```
0.000090338235821
```

```
0.000000004668656
```

```
0.000000000000000
```

```
Iterações realizadas: 4
```

FAREMOS OS GRÁFICOS

```
Ingresse os extremos do intervalo
```

```
Ingresse extremo inferior: 1
```

```
Ingresse extremo superior: 2
```

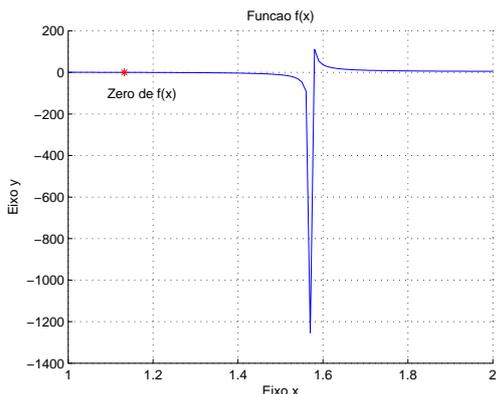


Figura 3.8: Zero da função f .

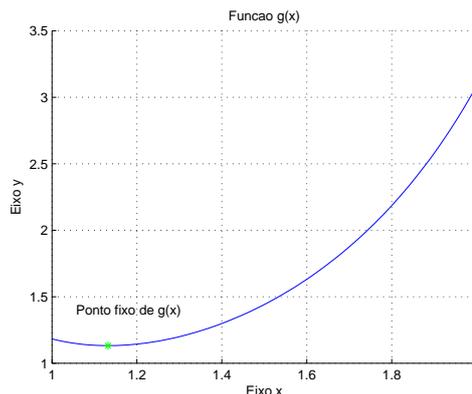


Figura 3.9: Ponto fixo da função g .

Exemplo 3.18. Seja a função $f(x) = \log(x - 1) + e^{-x} + \sin(x - 1) = 0$ com ponto inicial $x_0 = 1,3$ e a tolerância $\xi = 0,0000001$. Utilizando o método de Newton-Raphson, vamos encontrar a raiz da função f , o ponto fixo da função g e os seus respectivos gráficos, com os extremos do intervalo $1 \leq x \leq 2$.

```
>> NewtonRA
```

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

```
Ingresse o valor inicial: 1.3
```

```
Ingresse a tolerância: 0.0000001
```

```
Ingresse o número máximo de interações: 30
```

```
Ingresse a função f(x): log(x-1)+exp(-x)+sin(x-1)
```

```
função = exp(-x) + log(x-1) + sin(x-1)
```

```
derivada = cos(x-1) - exp(-x) + 1/(x-1)
```

```
função g = x-(exp(-x)+log(x-1)+sin(x-1))/(cos(x-1)-exp(-x)+1/(x-1))
```

```
Aproximações para o ponto fixo de g(x) =
```

```
1.3000000000000000
```

```
1.458341371728611
```

```
1.495256324454855
```

```
1.496464446041776
```

```
1.496465627502275
```

```
1.496465627503402 (Ponto fixo de g e zero de f)
```

```
Aproximações dos zeros da função f(x) =
```

```
0.267498828624587
```

```
-0.105057952401666
```

```
-0.003231498399788
```

```
-0.000003154020560
```

```
-0.0000000000003008
```

0.0000000000000000

Iterações realizadas: 5

FAREMOS OS GRÁFICOS

Ingresse os extremos do intervalo

Ingresse extremo inferior: 1

Ingresse extremo superior: 2

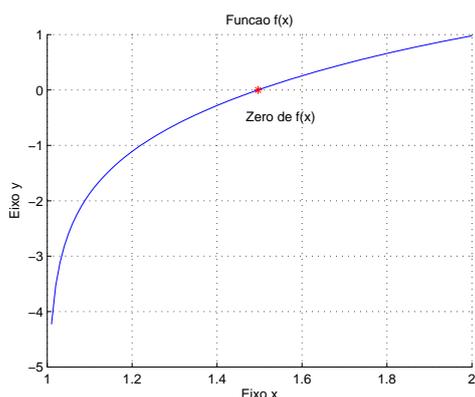


Figura 3.10: Zero da função f .

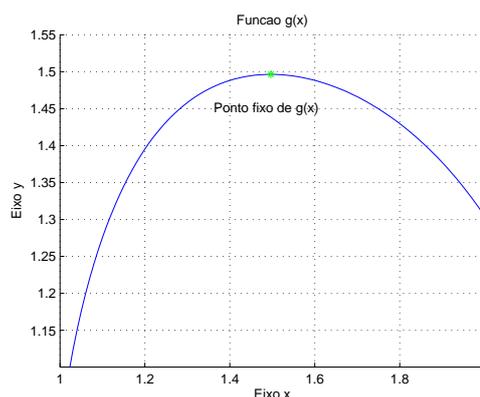


Figura 3.11: Ponto fixo da função g .

Exemplo 3.19. Seja a função $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2 \cos(x) - 6$ com ponto inicial $x_0 = 1$ e a tolerância $\xi = 0,0000001$. Utilizando o método de Newton-Raphson, vamos encontrar a raiz da função f , o ponto fixo da função g e os seus respectivos gráficos, com os extremos do intervalo $1 \leq x \leq 2$.

>> NewtonRA

MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Ingresse o valor inicial: 1

Ingresse a tolerância: 0.0000001

Ingresse o número máximo de interações: 30

Ingresse a função $f(x)$: $\exp(x) + 2.^{-x} + 2 * \cos(x) - 6$

função = $2 * \cos(x) + \exp(x) + 1/2^x - 6$

derivada = $\exp(x) - 2 * \sin(x) - 1/2^x * \log(2)$

função $g(x) = x - (2 * \cos(x) + \exp(x) + 1/2^x - 6) / (\exp(x) - 2 * \sin(x) - 1/2^x * \log(2))$

Aproximações para o ponto fixo de $g(x) =$

1.0000000000000000

3.469798010511002

2.726126469177673

2.197294484225278

1.914273084214328

1.834995796653369

1.829409874081574

1.829383602512459

1.829383601933849 (Ponto fixo de g e zero de f)

Aproximações dos zeros da função $f(x) =$

0.540302305868140

24.32726430422784

7.594884418029755

2.046052215529679

0.373787036693264

0.023126949761534

0.000107757581836

0.000000002373169

0.000000000000003

Iterações realizadas: 8

FAREMOS OS GRÁFICOS

Ingresse os extremos do intervalo

Ingresse extremo inferior: 1

Ingresse extremo superior: 2

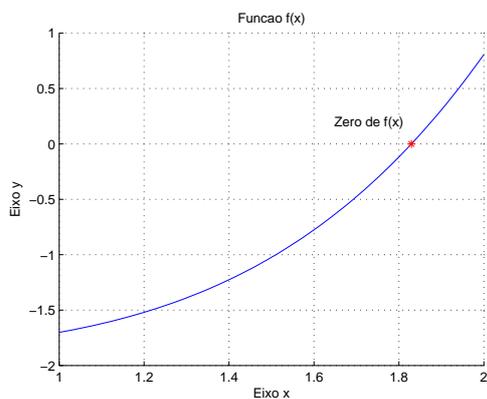


Figura 3.12: Zero da função f .

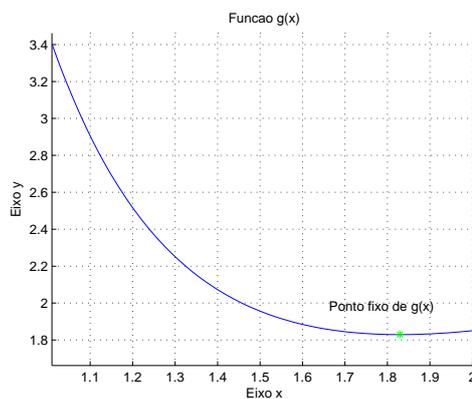


Figura 3.13: Ponto fixo da função g .

Capítulo 4

Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach no que se refere ao Teorema da Função Implícita (TFI) e uma interessante aplicação na área da informática que envolve a utilização do famoso buscador de páginas na internet, o “Google”.

A princípio, faremos alguns resultados preliminares com intuito de objetivar as aplicações propostas. Para a demonstração do TFI, definiremos diferenciabilidade, matriz jacobiana e função de classe C^1 . Posteriormente, enunciaremos o Teorema da Função Implícita cuja demonstração é consequência do Teorema de Função Inversa. Os mesmos são umas das ferramentas mais importantes da análise, posto que suas aplicações são diversas. O TFI tem aplicações interessantes que faremos de forma sucinta neste capítulo. Basicamente, este teorema nos fornece uma maneira de colocar algumas variáveis de uma equação em função das demais. Você conseguiria afirmar que, na equação $y + \ln(y^2 + 1) + x^3 = 8$, y está em função de x ?

Aqui, devemos ressaltar que vamos fazer um capítulo mais sucinto do que se espera quando se fala de um teorema de tamanho relevância. Admitiremos muitos resultados, mas não deixaremos de referenciar suas demonstrações para o leitor curioso. A ideia primordial deste capítulo é mostrar uma possibilidade de aplicação do T.P.F.B nas funções vetoriais e na informática. Por isso, vamos assumir que o leitor esteja familiarizado com conceitos da Álgebra Linear e do Cálculo de funções de várias variáveis. Para informações mais gerais sobre estas áreas, veja [7] e [20].

4.1 Diferenciabilidade

O objetivo desta seção é destacar vários conceitos e resultados de aplicações diferenciáveis, para podermos demonstrar o Teorema da Função Implícita.

De maneira intuitiva, se uma função é dita diferenciável, então ela pode ser aproximada lo-

calmente por uma função linear. Com isso, para verificarmos se qualquer função é diferenciável, recorreremos para as definições subsequentes.

Definição 4.1. Uma aplicação $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Neste caso, dizemos que T é a derivada de f no ponto a e denotamos algumas vezes $T = f'(a)$. Em outras palavras, uma aplicação f é diferenciável no ponto a quando, para pequenos valores de v , o acréscimo $f(a + v) - f(a)$ se aproxima da função linear $T \cdot v$. Considere que $f = (f_1, \dots, f_n)$, onde f_i 's são as funções coordenadas de f .

Vamos analisar a aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Temos que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v) \quad \forall v \text{ com } a + v \in U.$$

Ora, fazendo $v = tv$ com $t \in \mathbb{R}$ não nulo suficientemente pequeno, obtemos

$$\begin{aligned} f(a + tv) - f(a) &= T \cdot tv + r(t \cdot v) \Rightarrow \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\ &= \frac{T \cdot tv + r(t \cdot v)}{t} \Rightarrow \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T \cdot v \pm \frac{r(t \cdot v)}{|t \cdot v|} \cdot |v|. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $t \rightarrow 0$ e, lembrando que

$$\frac{\partial f(a)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot v) - f(a)}{t},$$

Fazendo $v = e_i$, com $i = 1, 2, \dots, m$, segue da Definição 4.1, que

$$\begin{aligned} T \cdot e_1 &= \frac{\partial f(a)}{\partial e_1} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} \right), \\ &\vdots \\ T \cdot e_m &= \frac{\partial f(a)}{\partial e_m} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_m} = \left(\frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \right). \end{aligned}$$

Portanto, se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto a , sendo T sua derivada, então a matriz de T na base canônica é

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.2. Sejam $f(x, y) = (x^2 + y^2, x)$ e $a = (1, 2)$. Vamos mostrar que f é diferenciável no ponto a e, além disso, sua derivada é a matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a Definição 4.1 para $v = (\alpha_1, \alpha_2)$, temos

$$f((1, 2) + (\alpha_1, \alpha_2)) - f(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + r(v) \Rightarrow$$

$$f(1 + \alpha_1, 2 + \alpha_2) - (5, 1) - (2\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_1) = r(v).$$

Vamos mostrar que $\frac{r(v)}{|v|} \rightarrow 0$ quando $v \rightarrow 0$. Temos

$$\frac{r(v)}{|v|} = \frac{((1 + \alpha_1)^2 + (2 + \alpha_2)^2, 1 + \alpha_1) - (5, 1) - (2\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} =$$

$$\frac{(1 + 2\alpha_1 + \alpha_1^2 + 4 + 4\alpha_2 + \alpha_2^2, 1 + \alpha_1) - (5, 1) - (2\alpha_1 + 4\alpha_2, \alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} =$$

$$\frac{(5 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2, 1) - (5, 1)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2, 0)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} = (\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, 0) \rightarrow (0, 0).$$

quando $v = (\alpha_1, \alpha_2) \rightarrow 0$. Portanto, a função f é diferenciável no ponto $a = (1, 2)$, e sua derivada é T .

Definição 4.3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. As derivadas parciais das funções coordenadas f_i de f em a formam uma matriz que tem $\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ como entradas, a saber,

$$\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

esta matriz é chamada de *Matriz Jacobiana* de f no ponto a .

Definição 4.4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável em a , o determinante

$$D(Jf(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_m} \end{vmatrix}.$$

É chamado Jacobiano de f no ponto a . Isto é, o Jacobiano é o determinante da Jacobiana.

Uma regra importante é a derivação da composição de duas funções diferenciáveis, denominada regra da cadeia. Enunciaremos e daremos a referência para se encontrar a sua demonstração.

Teorema 4.5. (*Regra da Cadeia*). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto a , com $f(U) \subset V$, e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável no ponto $f(a)$. Então, $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.*

Demonstração: A prova deste resultado pode ser encontrado em [12], volume 2, página 256. □

A próxima definição aparecerá como hipótese no Teorema da Função Implícita.

Definição 4.6. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Dizemos que $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 em U se as derivadas parciais de suas funções coordenadas, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$, existem e são contínuas em U .*

4.2 Teorema da Função Implícita

O objetivo desta seção é apresentar o Teorema da Função Implícita, mostrando para o leitor a sua forma simples e a sua forma geral. Até aqui, construímos um corpo teórico suficiente para demonstrar este teorema. Nos textos de análise, uma maneira usual em que a demonstração deste resultado é apresentada é prová-lo independentemente ou demonstrá-lo a partir do Teorema da Função Inversa. Sendo assim, utilizaremos o Teorema da Função Inversa como hipótese para demonstrarmos o Teorema da Função Implícita.

Como o TFI pode ser desmonstrado pelo Teorema da Função Inversa, enunciaremos este último, mas não o demonstraremos. O mesmo é um dos resultados mais importantes do cálculo e um dos fundamentais no estudo da análise de funções de várias variáveis. Ele afirma, a grosso modo, que, se uma aplicação possui a derivada com determinante não nulo, então esta função é uma bijeção local. Em outras palavras, se a derivada de uma função é inversível, a própria função é, pelo menos localmente.

Em matemática, se f é uma aplicação que relaciona os elementos do conjunto C (domínio) com elementos do conjunto D (imagem) através de alguma regra, é possível algumas vezes definir a aplicação f^{-1} que realiza o caminho de volta, isto é, de D em C . Nesse caso, f^{-1} será dita *aplicação inversa* ou recíproca de f .

Antes de enunciar o teorema, lembramos novamente ao leitor que o mesmo não é objetivo deste trabalho. Segue o enunciado abaixo.

Teorema 4.7. (*Função Inversa*): *Seja $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 no conjunto aberto W . Se o determinante de $f'(a)$ for bijetivo, para $a \in W$ e $b = f(a)$, então*

- i) Existem U e V abertos do \mathbb{R}^n com $a \in U$ e $b \in V$ tais que $f : U \rightarrow V$ é bijeção;
- ii) Existe uma função $h : V \rightarrow U$ de classe C^1 tal que $f^{-1} = h$.

Demonstração: A prova deste resultado está disponível em [13], páginas 88 e 89. \square

Neste momento, vamos relatar o famoso Teorema da Função Implícita. O termo *Função Implícita* é utilizado para designar funções definidas por expressões da forma $f(x, y) = 0$, em que f é uma expressão em x e y .

Uma função é denominada *implícita* se o valor de y é obtido de x resolvendo uma equação no formato $f(x, y) = 0$, e que y é função de x (ou vice-versa), mas que não se pode ver explicitamente a regra que define esta função. Caso contrário, teremos uma função explícita, em que $y = f(x)$ para uma variável, isto é, fornece uma regra para determinação do valor da função y (saída) em termos do valor x (entrada).

Uma motivação de estudar esse teorema é considerar em particular a equação da circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$, pois podemos colocar a variável y de forma explícita como função da variável x , fazendo, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Mais precisamente, $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $\alpha(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$, então α está implícita na equação de circunferência.

Em muitos casos, uma equação do tipo $f(x, y) = c$ define implicitamente uma função $y = \alpha(x)$ apenas localmente. A forma mais simples do Teorema da Função Implícita afirma que, se f é diferenciável e se (a, b) é um ponto em que $\frac{\partial f}{\partial y}$ não se anula, então y está em função de x em uma região contendo este ponto. Sendo assim, podemos enunciar a forma mais simples do teorema.

Teorema 4.8. *Suponha que f seja uma função de classe C^1 sobre um aberto $A \times B$ do plano \mathbb{R}^2 contendo o ponto (a, b) . Suponha ainda que*

$$f(a, b) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

Então, existem um intervalo $U = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < h\} \subset A$ e $V = \{y \in \mathbb{R} : |y-b| < k\} \subset B$ e uma única função $\alpha : U \rightarrow V$ de classe C^1 satisfazendo $f(x, \alpha(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Além disso,

$$\alpha'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$

Exemplo 4.9. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y + \ln(y^2 + 1) + x^3 - 8$. Se fizermos $f(x, y) = 0$, encontraremos a equação apresentada na introdução deste capítulo. Desafiamos o leitor a isolar a variável y desta equação. O fato intrigante é que isso não é possível explicitamente. Por outro lado, considerando o ponto $(2, 0)$, note que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + \frac{2y}{y^2 + 1}$,

de tal forma que $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = 1 \neq 0$. O Teorema 4.8, portanto, nos fornece $y = \xi(x)$ em um intervalo em torno de $x_0 = 2$. Observe que, apesar de y não ser dada explicitamente em função de x , localmente, ela é dada implicitamente.

Agora, como já estamos familiarizados com o Teorema da Função Implícita em sua forma mais simples, provaremos tal teorema em sua forma geral para espaços euclidianos. Como já foi dito, a demonstração do TFI que daremos se baseará no Teorema da Função Inversa, e, neste teorema, o T.P.F.B entra de maneira decisiva. Por esta razão, dizemos no início que o TFI é uma aplicação do T.P.F.B. Eis o enunciado e a sua demonstração.

Teorema 4.10. (Função Implícita): *Seja $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 . Suponha que $f(x_0, y_0) = 0$ e*

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \quad (4.1)$$

Então, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^k$ e $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ função de classe C^1 tais que

i) $x_0 \in W$ e $\phi(x_0) = y_0$.

ii) $f(x, \phi(x)) = 0$, para todo $x \in W$.

Demonstração: *Seja $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ definida por*

$$g(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Então, g é de classe C^1 (veja o Teorema 5 nos Anexos), e a matriz jacobiana de g em (x_0, y_0) é dada por

$$g'(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Por hipótese, então, tem-se

$$\det g'(x_0, y_0) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Assim, pelo Teorema 4.7, segue que existem abertos U e $V = g(U)$ tais que $(x_0, y_0) \in U$ e $g(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in V$ e a função $g : U \rightarrow V$ é bijeção diferenciável cuja inversa $h : V \rightarrow U$ é também diferenciável. Ora, se denotarmos as variáveis de V como (z, w) , temos que h pode ser representada por

$$h(z, w) = (h_1(z, w), h_2(z, w)) \in U. \quad (4.2)$$

Por h ser a inversa de g , segue que

$$(z, w) = g(h(z, w)) = g(h_1(z, w), h_2(z, w)) = (h_1(z, w), f(h_1(z, w), h_2(z, w))).$$

Ou seja, $h_1(z, w) = z$ e $w = f(z, h_2(z, w))$ seja qual for o par $(z, w) \in V$. Sem perder a generalidade, podemos chamar $z = x$, já que $h_1(z, w) = z$ e vale (4.2). Assim, note que

$$w = f(x, h_2(x, w)) \quad \forall (x, w) \in V. \tag{4.3}$$

Considere agora a função $\phi(x) = h_2(x, 0)$ definida no conjunto $\Omega \subset V$ que contém o ponto $(x_0, 0)$ e é aberto em \mathbb{R}^k . Observe que ϕ é também diferenciável, já que h_2 o é, e temos que

$$\phi(x_0) = h_2(x_0, 0) = y_0,$$

pois vale que

$$(x_0, y_0) = h(g(x_0, y_0)) = h(x_0, f(x_0, y_0)) = h(x_0, 0) = (h_1(x_0, 0), h_2(x_0, 0)) = (x_0, h_2(x_0, 0)).$$

Isso mostra a letra a). A letra b), por sua vez, segue desta última equação e de (4.3). Mais precisamente,

$$f(x, \phi(x)) = f(x, h_2(x, 0)) = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Fazendo $W := \Omega$, concluímos a demonstração do teorema. □

O Teorema da Função Implícita garante, em certas condições, que as variáveis $y \in \mathbb{R}^m$ são funções de $x \in \mathbb{R}^k$ (ϕ no teorema), isso localmente.

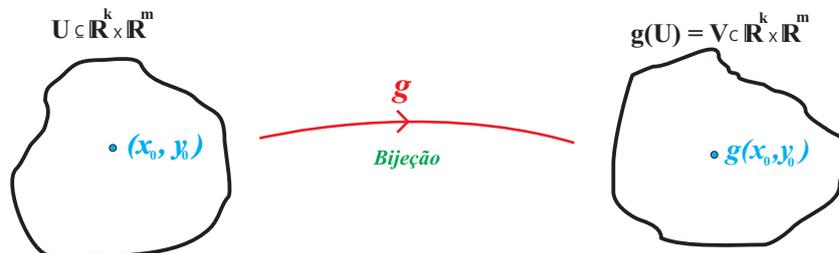


Figura 4.1: Restrição de g ao aberto U .

Mostraremos com uma aplicação a importância do TFI. Essa aplicação está voltada à área da matemática pura. Ressaltamos que o teorema possui aplicabilidade em outras áreas, tais como: Economia, Nutrição, Química, Física e Biologia.

Aplicação: A equação

$$y = \int_0^x e^{-\text{sen}(t+y)} dt$$

determina y como função de x , $y = \xi(x)$, definida em um intervalo $(-\delta, \delta)$ tal que $\delta > 0$. Além do mais, é possível calcular $\xi'(x)$ para $x \in (-\delta, \delta)$.

De fato, definiremos a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = y - \int_0^x e^{-\text{sen}(t+y)} dt,$$

onde g é de classe C^1 (veja o Teorema 6 nos Anexos). Assim, derivando pela a regra da cadeia para funções de uma variável (veja [20], páginas 182 e 183), temos

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1 - \int_0^x (-\cos(t + y) \cdot e^{-\text{sen}(t+y)}) dt.$$

Agora, resolvemos a integral definida, obtendo

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 1 + \int_0^x (\cos(t + y) \cdot e^{-\text{sen}(t+y)}) dt = 1 + e^{-\text{sen}(x+y)} - e^{-\text{sen}(y)}.$$

Seja $(x, y) = (0, 0)$, e note que

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 1 + e^{-\text{sen}(0+0)} - e^{-\text{sen}(0)} = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, segue que existe um intervalo $(-\delta, \delta)$ contendo 0 para algum $\delta > 0$, onde y é dada por $\xi : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $y = \xi(x)$, tal que $g(x, \xi(x)) = 0$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$ com $\xi(0) = 0$. Logo, pela regra da cadeia (veja [20], páginas 182 e 183), tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \xi(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, \xi(x)) \cdot \xi'(x) = 0.$$

Então, isolando $\xi'(x)$, temos

$$\xi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \xi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Como

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, \xi(x)) = 1 + e^{-\text{sen}(x+\xi(x))} - e^{-\text{sen}(\xi(x))}.$$

E

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, \xi(x)) = -e^{-\text{sen}(x+\xi(x))}.$$

Temos,

$$\xi'(x) = \frac{-e^{-\text{sen}(x+\xi(x))}}{1 + e^{-\text{sen}(x+\xi(x))} - e^{-\text{sen}(\xi(x))}}.$$

□

4.3 O Buscador de Internet: Google

Esta seção tem por finalidade apresentar a matemática usada no buscador de páginas na internet: “Google”. A mesma está baseada em [4] e numa palestra apresentada no Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC da Universidade de São Paulo (USP - São Carlos) por Thiago J. Fonseca no dia 16/08/2012. Mostraremos sucintamente o contexto histórico da criação desse navegador.

As evoluções científicas e tecnológicas advindas do avanço da informática, precisamente da internet, são infundáveis. A facilidade de encontrar uma informação com o simples clicar de um botão tornou muito ágil e prático a construção e a disseminação do conhecimento. Porém, nem sempre foi tão fácil assim. Atualmente, a internet contém inúmeras páginas, nas quais, ao efetuarmos uma busca, procuramos por informações de forma rápida e precisa. As ferramentas que facilitaram tais pesquisas na internet foram os motores de busca, dos quais destacamos o mais eficiente: “Google”.

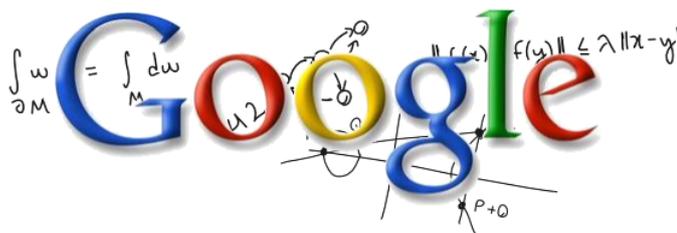


Figura 4.2: Buscador de internet: Google.

Para você ter uma ideia, ao pesquisar no Google, a sua ordem de pesquisa é enviada para mais de 1.000.000 de servidores no mundo inteiro, processando mais de 1.000.000.000 de pesquisas, gerando mais de 20 Petabytes por dia, equivale a dizer $20 \cdot 10^{15}$ bytes. Por exemplo, queremos cozinhar um prato de “bacalhau”, porém não sabemos a receita. Dessa forma, procuramos na internet, especificamente no Google, a receita do prato. Nessa altura, percebemos que existem mais de 500.000 páginas relacionadas com o tema bacalhau. Seguramente que muitas destas páginas não são interessantes e seria impossível lê-las todas até a hora do jantar. Mas, como por “magia”, normalmente encontramos a receita do prato nas primeiras sugestões do Google. Mas como é que o Google sabe quais são as páginas mais interessantes sobre o bacalhau? Isso é magia ou Matemática? Parece mágica, mas é Matemática!

Tudo começou em meados à década de 1990, em que a internet foi criada dentro do European Organization for Nuclear Research - CERN, e rapidamente começa a se tornar popular no meio acadêmico. No início, parecia mais um dos diversos sites de busca existentes na época, precisamente em 1996, quando Larry Page e Sergey Brin começaram juntos um trabalho de pesquisa, com o intuito de criar um sistema de busca mais eficaz do que os que existiam. Os mesmos faziam parte do programa de doutorado da Universidade de Stanford na Califórnia

- Estados Unidos. Esta nova tecnologia chamava-se *PageRank*, onde a relevância de um site era determinada pelo número de páginas, bem como pela importância delas, que ligavam de volta para o site original. Os autores nomearam a sua nova ferramenta de *BackRub*. Assim, diferentemente dos sistemas existentes, os quais apenas procuravam registros em um banco de dados pré-cadastrados, o BackRub, com alguns algoritmos, contava os links que se dirigiam às páginas e os interpretava como votos para essas páginas. Com isso, quanto mais links um site recebia, mais importante ele se tornava no que se refere aos resultados de uma pesquisa.

Eventualmente, a palavra “Google” foi um trocadilho (erro ortográfico) feito com um termo matemático “Googol”, número formado pelo dígito um seguido de cem dígitos zeros, que foi criado para indicar a quantidade de informação que o motor de busca podia processar. Inicialmente, com o domínio “www.google.stanford.edu”, o Google funcionava apenas no site da Universidade de Stanford. Vivenciando o êxito do BackRub, no dia 15 de setembro de 1997, o Google foi registrado em sua versão pública, e a empresa foi constituída em 4 de setembro de 1998. Sua sede ficava na garagem de uma amiga na Califórnia.

É importante observar que, de acordo com os dados da “Experian Hitwise”, ferramenta líder de inteligência digital, no final do ano de 2015, os buscadores de internet mais acessados no Brasil foram:

Google Brasil: 93,74%

Google.com: 2,42%

Ask Brasil: 1,57%

Bing Brasil: 1,28%

Yahoo.com: 0,54%

Yahoo! Brasil: 0,37%

Bing.com: 0,05%

Google Reino Unido: 0,01%

Google França: 0,004%

Google Canadá: 0,003%

Sabemos o que um buscador faz, mas como ele funciona? O funcionamento de um buscador desempenha dois critérios, a saber:

- 1) **Matching:** O algoritmo busca, dentre todas as páginas da Web, aquelas que contêm as palavras ou frases digitadas.
- 2) **Ranking:** O algoritmo seleciona quais, dentre as páginas encontradas no primeiro passo, são as mais relevantes e ordena o resultado.

O segredo do sucesso do Google é a segunda etapa, pois ele se diferencia dos demais buscadores no que se refere à ordenação das páginas encontradas. As técnicas usadas na maioria dos buscadores são direcionadas ao conteúdo das páginas, isto é, analisa a proximidade das palavras procuradas, o que não garante o sucesso da pesquisa. Observe a ilustração abaixo.

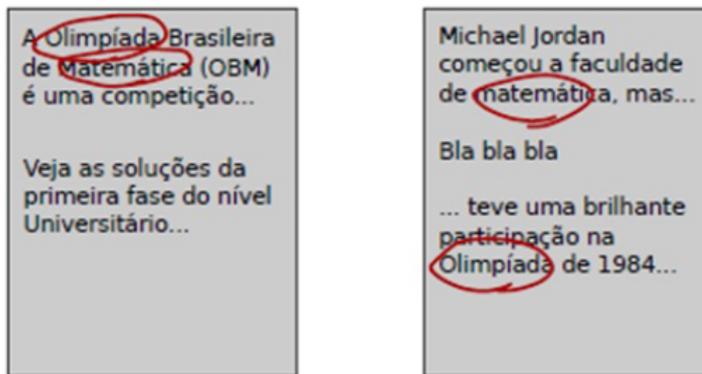


Figura 4.3: Ordenação de páginas.

A Figura 4.3 mostra duas páginas de pesquisa sobre as palavras “Olimpíada Matemática”. A imagem da esquerda apresenta uma página sobre a OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), o que é provavelmente uma das páginas requeridas. A página da direita, por sua vez, apesar de ter encontrado as duas palavras pesquisadas, tem uma grande chance de não fazer parte das páginas procuradas.

Usando a estrutura da Web, os autores perceberam que, para determinar a importância das páginas, teriam que inovar o PageRank. Sendo assim, as páginas se conectam por meio de links ou hyperlinks. A ideia do buscador é considerar a importância de cada página com as somas das importâncias das páginas que são ligadas a ela, dividida pelo número de links que saem delas, ou seja, em partes iguais, cada página empresta a sua importância para as páginas que ela aponta. Então, quando uma página é apontada por páginas importantes, ela deve ser importante. Podemos pensar como os nós de um grafos e as arestas como os links, na Figura 4.4 abaixo.

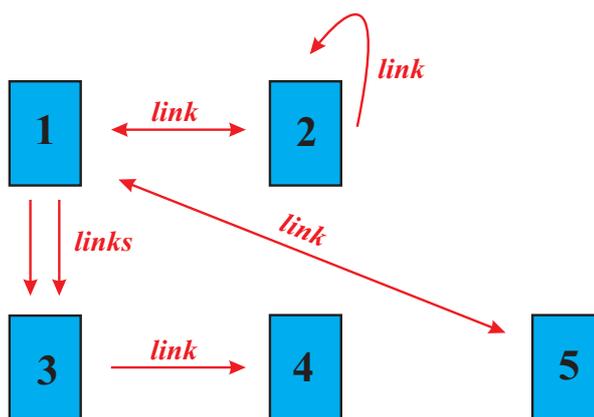


Figura 4.4: Conexão de páginas.

Será que há uma única ou várias ordenações de páginas na Web submetendo-se a essa democracia? Responder esse tipo de questão não é fácil, mas para garantir a possibilidade do projeto dos criadores do Google, usaremos o T.P.F.B.

Seja F um grafo direcionado com nós $1, 2, \dots, n$. O objetivo é que, para cada nó i , atribua-

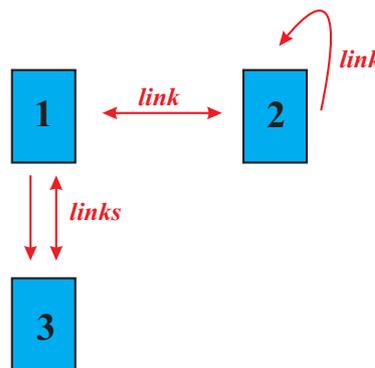
mos um número real x_i tal que traduza a importância (no contexto da Web) do nó i . Quando j é um nó que possui uma aresta apontando para i , denotaremos de *link* para i e consideraremos $j \rightarrow i$. O número de links saindo de j será chamado ℓ_j . Se uma página recebe muitos links, ela deve ser relevante! Como exemplo, na Figura 4.4, veja que $\ell_1 = 4$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 1$, $\ell_4 = 0$ e $\ell_5 = 1$. Também tem-se, na mesma figura, que o número $1 \rightarrow 2$ é 1, o número $1 \rightarrow 3$ é 2 e o número $2 \rightarrow 2$ é 1.

Existem algumas maneiras de definir a importância de uma página. Uma delas é considerar o sistema linear de ordem $n \times n$, a saber,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m_{11}}{\ell_1} x_1 + \frac{m_{12}}{\ell_2} x_2 + \dots + \frac{m_{1n}}{\ell_n} x_n \\ x_2 = \frac{m_{21}}{\ell_1} x_1 + \frac{m_{22}}{\ell_2} x_2 + \dots + \frac{m_{2n}}{\ell_n} x_n \\ \vdots \\ x_n = \frac{m_{n1}}{\ell_1} x_1 + \frac{m_{n2}}{\ell_2} x_2 + \dots + \frac{m_{nn}}{\ell_n} x_n \end{cases}$$

onde m_{ij} é o número de links $j \rightarrow i$, o qual pode ser zero. Usando um jargão mais matemático, se $A = (a_{ij})$ com $a_{ij} = \frac{m_{ij}}{\ell_j}$, então podemos ver $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como uma transformação linear e a relevância $x = [x_1, \dots, x_n]$ é um autovetor do autovalor 1. Ou, equivalentemente, $Ax = x$, isto é, x é um *ponto fixo* de A .

Exemplificaremos esta situação para fixar ideias. Suponha que a seguinte figura seja um grafo de páginas (nós) como resposta a uma pesquisa.



Nesta situação, $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = 2$ e $\ell_3 = 1$. Os valores de m_{ij} são como no sistema a seguir.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{0}{3} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{1} x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{0}{1} x_3 \\ x_3 = \frac{2}{3} x_1 + \frac{0}{2} x_2 + \frac{0}{1} x_3 \end{cases}$$

Este sistema de equações lineares é equivalente à equação matricial $A \cdot x = x$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]$. Um cálculo simples mostra que uma solução desta equação é $x = [3 \ 2 \ 2]$ e, portanto, neste exemplo, a página 1 possui maior relevância. Claramente, há outras soluções ($x = [6 \ 4 \ 4]$, por exemplo), o que mostra que este modelo de equações lineares ainda não é adequado. Para encontrar um modelo melhor do que este e que sirva para qualquer situação, utiliza-se a teoria de probabilidade. Por vários motivos, interpreta-se a_{ij} como a probabilidade de o internauta sair do vértice (página) j e chegar no vértice i . Aqui, está uma parte delicada desta aplicação, pois envolve alguns conceitos probabilísticos, os quais tirarão o foco deste trabalho. Caso o leitor queira se aprofundar neste interessante problema, consulte, por exemplo, [4]. Além disso, modela-se o problema acrescentando um fator probabilístico $0 < p < 1$. Por meio de vários experimentos, o Google decidiu usar $p = 0,15$ e, com isso, a aplicação que indica o percurso do internauta num grafo de n vértices é dada por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto p \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix} + (1-p) \cdot \begin{bmatrix} \frac{m_{11}}{\ell_1} & \frac{m_{12}}{\ell_2} & \cdots & \frac{m_{1n}}{\ell_n} \\ \frac{m_{21}}{\ell_1} & \frac{m_{22}}{\ell_2} & \cdots & \frac{m_{2n}}{\ell_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{m_{n1}}{\ell_1} & \frac{m_{n2}}{\ell_2} & \cdots & \frac{m_{nn}}{\ell_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

que vamos denotar sinteticamente como $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $y \mapsto p \cdot e + (1-p) \cdot Ay$, onde

$$e = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}.$$

Mostremos agora que a aplicação $y \mapsto p \cdot e + (1-p) \cdot Ay$ é uma contração (veja Definição 3.4). Assim, considere $y, z \in \mathbb{R}^n$. Note que, pela definição dos valores m_{ij} e ℓ_j , segue que

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{m_{ij}}{\ell_j} = \frac{m_{1j} + m_{2j} + \dots + m_{nj}}{\ell_j} = \frac{\ell_j}{\ell_j} = 1.$$

Dito isto,

$$\begin{aligned} \|W(y) - W(z)\| &= \|(1-p) \cdot A(y-z)\| = (1-p) \cdot \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot |y_i - z_i| \right) = \\ &= (1-p) \cdot \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \cdot |y_i - z_i| = (1-p) \cdot \sum_{j=1}^n |y_i - z_i| = (1-p) \cdot \|y - z\|. \end{aligned}$$

Como $1 - p = 0,85$ é menor que 1 e maior que 0, segue que W é uma contração e, portanto, a aplicação W possui um único ponto fixo, digamos $x \in \mathbb{R}^n$, visto que o espaço métrico \mathbb{R}^n é completo (veja Teorema 2 nos Anexos). Assim, o T.P.F.B garante que a relevância de cada página está bem definida.

Capítulo 5

Considerações Finais

A Matemática tem avançado significativamente no último século, e um resultado relevante neste avanço está relacionado ao Teorema do Ponto Fixo de Banach (T.P.F.B), que fornece hipóteses suficientes para que uma função f possua um ponto fixo, isto é, existe um x no domínio da função f tal que $f(x) = x$. Sua demonstração está baseada na utilização das iteradas da função contração aplicada em qualquer ponto do domínio dela. É possível mostrar também que este ponto fixo é único.

Este trabalho teve como objetivo expor tópicos da Análise Matemática com auxílio da Álgebra Linear e do Cálculo. Nesse sentido, enunciamos e demonstramos cuidadosamente o Teorema da Função Implícita, como aplicação do T.P.F.B, cuja tese garante que a equação $f(x, y) = 0$ fornece y como função de x . A base necessária para a demonstração do tal teorema foram conteúdos relacionados à análise nos espaços euclidianos \mathbb{R}^n , espaços métricos e o T.P.F.B.

Por meio de situações contextualizadas de maneira simples, apresentamos conceitos restritos da matemática pura, por exemplo, o T.P.F.B, que podem e devem ser abordados adequadamente no Ensino Médio, desenvolvendo novos horizontes e possibilidades para aplicações de tais conceitos na sociedade atual.

A resolução de equações e funções é uma atividade realizada desde a antiguidade. A história da matemática registra que, na Mesopotâmia, já se usavam técnicas algébricas para aproximações de raízes. Dessa forma, os métodos numéricos são um conjunto de técnicas pelas quais os problemas matemáticos são formulados de modo que possam ser resolvidos com operações aritméticas. Neste trabalho, elaboramos um *programa* (com auxílio do software MATLAB) sobre o método de Newton-Raphson, relacionado com T.P.F.B, que encontra a raiz de uma função por aproximações numéricas.

Como outra aplicação do T.P.F.B, mostramos o funcionamento do famoso buscador de internet, o “Google”. Atualmente, a internet está cada vez mais presente no cotidiano das pessoas e, por este motivo, é interessante o estudo do algoritmo PageRank, por ser um dos principais

responsáveis pela qualidade das respostas dadas pelo Google ao efetuarmos uma pesquisa na internet.

Com este trabalho, tive a oportunidade de estudar conceitos mais abstratos e mais gerais do que vistos na minha graduação de Licenciatura em Matemática. Os cursos de Topologia e Espaços Métricos não fizeram parte da minha formação e, por isso, foi muito interessante conhecê-los, mesmo sendo em nível introdutório. Assim, esperamos que este trabalho seja uma fonte inspiradora e norteadora de novas monografias que seguirão essa linha de pesquisa e que o mesmo seja compartilhado com toda a comunidade acadêmica da Universidade Federal do Tocantins, Campus de Araguaína.

Finalmente, e como comentário pessoal, o presente trabalho foi muito importante como complementação da minha formação, sendo uma experiência valiosa no desenvolvimento de um trabalho autônomo. Ele despertou em mim o desejo de aprofundar meus conhecimentos na Matemática, em especial, na Análise. Acredito que estou mais preparado para uma pós-graduação.

Referências

- [1] ALBUQUERQUE, Philipe Thadeo Lima Ferreira. **Ponto Fixo: Uma Introdução no Ensino Médio**. São José do Rio Preto, Unesp, 2013. 69f. Dissertação Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - São José do Rio Preto, 2013.
- [2] ANDRADE, Doherty. **O Teorema da Função Inversa e da Função Implícita**. Disponível em: <http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivos_pdf/inversa.pdf>. Acesso em: 15 de jul. 2017.
- [3] ARAÚJO, Gustavo da Silva. **O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach e Aplicações**. João Pessoa, UFPB, 2011. Disponível em: <<http://rei.biblioteca.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/366/1/GSA08072013.pdf>>. Acesso em: 15 de jul. 2017.
- [4] BARROS, Cícero Demétrio Vieira de. **O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações**. João Pessoa, UFPB, 2013. 45f. Dissertação Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal da Paraíba - João Pessoa, 2013.
- [5] BOLDRINI, José Luís [et all]. **Álgebra Linear**. 3^a ed. São Paulo: Harbra, 1986.
- [6] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 8.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- [7] COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2013.
- [8] DUARTE, Isabella Silva. **Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach**. Campina Grande, UEPB, 2014, 54f. Monografia (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba - Campina Grande, 2014.
- [9] GONÇALVES, Mirian Buss; GONÇALVES, Daniel. **Elementos da Análise**. 2. ed. Santa Catarina: UFSC, 2012.

- [10] KRANTZ, S. G.; PARKS, H. R. **The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications**. Birkhäuser Boston: 2th printing, 2003. Disponível em: <<http://www.springer.com/us/book/9781461200598>>. Acesso em: 15 de jul. de 2017.
- [11] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de uma variável**. vol. 1. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [12] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**. vol. 2. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.
- [13] LIMA, Elon Lages. **Análise no Espaço \mathbb{R}^n** . Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
- [14] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol. 1. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [15] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol. 2. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.
- [16] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2013.
- [17] MACIEL, Aldo Bezerra; LIMA, Osmundo Alves. **Introdução à Análise Real**. 22. ed. Campina Grande: EDUEP, 2005.
- [18] MENDES, Alex Fernandes. **O Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach**. Campina Grande, UEPB, 2014. 37f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba - Paraíba, 2014.
- [19] ROBERTSON, E.; O'CONNOR, J. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em: <www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>. Acesso em: 15 de jul. 2017.
- [20] STEWART, James. **Cálculo Vol. I e II**; Editora Cengage, 2009.
- [21] WILBERSTAEDT, Jeison Marion. **Diferenciabilidade e o Teorema da Função Implícita em Espaços de Banach**. Santa Catarina, UFST, 2000. 47f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina - Santa Catarina, 2010.

Anexos

Neste anexo, mostraremos alguns resultados e definições complementares de Álgebra Linear e Análise que foram utilizados no desenvolvimento do trabalho. Salientamos que esses conceitos não serão demonstrados. Deixaremos essa tarefa a cargo do leitor.

Teorema 1. *Uma matriz quadrada A admite uma inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$.*

Sugestão: Veja o Teorema 3.5.5, na página 76, em [5].

Para mostrar que a reta é um espaço métrico completo no Exemplo 2.50, utilizamos os seguintes resultados.

Lema 1. *Sejam A e B subconjuntos da reta limitados. Se $A \subset B$, então $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$.*

Lema 2. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Lema 3. *Se $(x_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência que converge para $a \in \mathbb{R}$, então (x_n) converge para a .*

Sugestão: A demonstração dos Lemas 1, 2 e 3 é encontrada em [14], capítulo 1 e 2.

Teorema 2. *O espaço métrico \mathbb{R}^n munido com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.*

Sugestão: A demonstração deste fato é uma aplicação repetida do Teorema 2.50.

No capítulo 3, usamos o Teorema de Valor Médio e o Teorema do Valor Intermediário, respectivamente.

Teorema 3. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe um real $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sugestão: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [14], capítulo 8, página 272.

Teorema 4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = d$.*

Sugestão: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4], capítulo 1, páginas 26 e 27.

Para demonstrar o Teorema da Função Implícita, utilizamos os teoremas de diferenciabilidade abaixo.

Teorema 5. *A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto.*

Teorema 6. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então, f é diferenciável se, e somente se, as funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f possuem derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração: A prova dos Teoremas 5 e 6 encontram-se em [12], volume 2, páginas 246 e 247.