UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNO COSTA SANTOS

NÚMEROS EQUILIBRADOS ARITMÉTICOS E GEOMÉTRICOS UMA ABORDAGEM NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ARRAIAS-TO
2021

BRUNO COSTA SANTOS

NÚMEROS EQUILIBRADOS ARITMÉTICOS E GEOMÉTRICOS UMA ABORDAGEM NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Monografia apresentada à UFT − Universidade Federal do Tocantins − Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor para obtenção de título de Licenciada em Matemática, sob orientação do Prof. Dr.Eudes Antonio da Costa .

Orientador: Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa.

ARRAIAS-TO
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S237n Santos , Bruno Costa.

NÚMEROS EQUILIBRADOS ARITMÉTICOS E GEOMÉTRICOS UMA ABORDAGEM NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS. / Bruno Costa Santos . – Arraias, TO, 2021.

47 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2021.

Orientador: Eudes Antonio da Costa

1. Número Equilibrado . 2. Média Aritmética e Geométrica . 3. Desigualdade das Médias . 4. Aplicação soma e produto. I. Título

CDD 510

À meus pais em nome de toda minha família,
pelo apoio e todo incentivo recebido.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço A Deus pelo dom da vida e por guiar meus passos até aqui, permitindo a realização de um sonho e por ter me dado saúde para a realização do curso e deste trabalho.

Aos meus pais Rildo Barbosa e Maronilde Rodrigues, que são meu exemplo de força e dedicação, que me deram total apoio na realização do curso e deram força nos momentos mais complicados.

Aos meus queridos irmãos Carlos e Nicolly por me apoiarem a seguir em frente mesmo com todas as dificuldades

A minha família querida, minhas tias e tio. Zenobio, Tatiana, Anadele, Juliana, Eugenia, Ediele, Marice e Helina pelo carinho e incentivo constante nesta fase da minha vida.

Em nome de Ezequiel, Luan, gabriel e Geanne agradeço aos meus amigos de Campos Belos-GO

E em nome de Tatiane Tavares, Camila Chaves, Deyfila da Silva, Juliana Barcelos, Pedro Florencio, Fernanda Vanconselo, Gabriel e agradeço aos amigos que tive a honra de conhecer em Arraias-TO, que estavam comigo nas dificuldades e alegrias.

À comunidade Acadêmica, que me recebeu tão bem e que sem dúvidas contribuiu muito nesse processo.

Ao orientador desta pesquisa, Prof. Dr Eudes Antonio da Costa, que sempre realizou seu trabalho com excelência e que além de professor tornou-se uma amigo.

Em nome dos professores Dr. Eudes Antonio da Costa, Dra. Keidna Cristiane, Dra. Gisele Detomazi quero agradecer aos demais professores que foram responsáveis pelo meu crescimento intelectual e até mesmo pessoal.

A banca examinadora composta pelos Profesores Dr. Alex Dantas e Dr.Thiago Cavalcante que tanto contribuíram para o aperfeiçoamento do trabalho.

A Universidade Federal do Tocantins por me conceder essa oportunidade de realizar um sonho.

"Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir. "

Friedrich Nietzsche.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar algumas propriedades da classe de números Equilibrados Aritméticos e a partir destes resultados estender para os números Equilibrados Geométricos, para isso, utilizamos noções e conceitos de Análise Combinatória dando ênfase nos seguintes conteúdos Arranjo, Permutação, Fatorial, Permutação com Repetição, Média Aritmética e Geométrica e a Desigualdade das Médias, temos por intuito apresentar resultados gerais relativos às propriedades, bem como enumerar ou contar para alguns casos particulares utilizando noção do Principio Multiplicativo e os Princípios da Contagem Possibilitando um mecanismo mais fluido para obter a contagem de Números Aritmético e Geométricos, e a partir desta concepção apresentar problemas relacionados a assuntos fundamentais no desenvolvimento da pesquisa, elaborando no decorrer dos processos vinculados a classes de números Equilibrados, como também será apresentado problemas dos respectivos bancos de questões OBMEP/OBM que abordem assuntos relacionados ao conteúdo apresentado conteúdos preliminares com a finalidade de contribuir no entendimento e desenvolvimento da temática relacionada ao trabalho, a proposta encontra-se no campo da Metodologia de Resolução de Problemas, sendo ela utilizada como meio de sistematização de conceitos referentes aos números Equilibrados, exaltando a importância da problematização.

Palavras-chave: Números Equilibrados; Média Aritmética ; Média Geométrico.

ABSTRACT

This work aims to present some properties of the class of Arithmetic Balanced numbers and from these results extend to Geometric Balanced numbers, for that, we use notions and concepts of Combinatorial Analysis emphasizing the following contents Arrangement, Permutation, Factorial, Permutation with Repetition, Arithmetic and Geometric Means and the Inequality of Means, we intend to present general results related to the properties, as well as to enumerate or count for some particular cases using the notion of the Multiplicative Principle and the Counting Principles Enabling a more fluid mechanism to obtain the counting of Arithmetic and Geometric Numbers, and from this conception, present problems related to fundamental issues in the development of the research, elaborating during the processes linked to classes of Balanced Numbers, as well as problems of the respective question banks OBMEP/OBM will be presented that address issues related to the content presented in preliminary content in order to contribute to the understanding and development of work-related themes, the proposal is in the field of Problem Solving Methodology, and it is used as a means of systematizing concepts related to Balanced numbers , exalting the importance of problematization.

Keywords:Balanced Numbers; Mean; Arithmetic Mean Geometric.

SUMÁRIO

1 Introdução

Historicamente a Matemática surge como parte da vida diária do homem, e por meio da necessidade humana vem a desenvolver, em determinado momento deixou de ser uma mera ferramenta de contagem ou medida para um meio de entender ou explicar os fenômenos que nos cerca, como também, estudar e sistematizar conceitos e propriedades dos números (inteiros, racionais, reais e naturais) desse modo as novas descobertas dentro do campo Matemático buscam sempre uma ideia que satisfaça não apenas um caso isolado mas um todo. Assentado nesta necessidade e curiosidade de sistematizar um conhecimento adquirido este trabalho ira apresentar respectivas definições e conceitos sobre a classe de número Equilibrado que pode ser consultada no Banco de Questões da OBMEP, um Número inteiro positivo a é Equilibrado pela Média Aritmética sempre que um de seus algarismos for a Média Aritmética dos demais, a partir desta definição foi possível estender nosso campo de estudo, assim abordando os números Equilibrados por meio da Média Geométrica sua definição consiste, dado um número inteiro positivo a é Equilibrado sempre que um dos seus algarismos for a Média Geométrica dos demais, a partir dessas definições é possível apresentar resultados no desenvolvimento do trabalho.

Ao utilizar problemas como objeto que incita a construção do conhecimento Matemático, foi possível encontrar trabalhos que partem da mesma proposta apresentada por exemplo Gomes(2020) e Silva, C,(2020), que utiliza como a metodologia de resolução de Problemas relacionadas a questões olímpicas.

É possível por meio do Banco de Questões da Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas-OBMEP, desenvolver discussões referente a ideia de trabalhar problemas e suas respectivas soluções, tendo uma experiencia a pesquisa e sistematização do conhecimento. Partindo desta ideia apresento o problema motivador retirado da OBMEP, generalizado e estudado no Trabalho Números Equilibrados pela Média Aritmética.

Problema 1.0.1. *(OBMEP 2008) Quantos números Equilibrados existem com 3 algarismos?*

O Primeiro contato com o problema 1.0.1 foi no trabalho Carvalho e Costa(2019) em que é apresentado uma resolução por meio da contagem utilizando permutação de algarismos, em seguida surge a intenção de estudar esta resolução, e estende-la para quantificar os números Aritméticos para mais de 3 algarismos, assim como dizia Polya(1995 p.5) “uma grande descoberta resolve um grande problema, mas ha sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema”. Quando aborda uma questão por uma nova ótica possibilita encontrar novos resultados.

Ao propor esta questão e outros resultados do trabalho Costa e Santos (2020), temos uma resolução que difere da apresentada no Banco de Questões da OBMEP e a disponibilizada em Carvalho e Costa (2020). Também se encontra no Banco de Questões (2014) mais um problema que trata de forma direta a classe de números Equilibrados pela Média Aritmética sendo eles:

Problema 1.0.2. *(OBMEP 2014) a) Encontre os três menores números Equilibrados com 4 algarismos. b) Quantos são os números Equilibrados, com 4 algarismos, menores que 2014 ?*

Com a listagem em Costa e Santos (2020) tornou possível solucionar estas questões. Diante dos resultados obtidos e das soluções proposta partimos para um novo desafio, de estender o conceito para número Equilibrado Geométrico, a partir dos resultados colhidos referente aos números Equilibrados Aritméticos, buscamos neste trabalho responder algumas perguntas referentes a essa classe de números Equilibrados Geométricos, sendo uma delas; Um números inteiro positivo g com todos algarismos iguais são números Equilibrados Geométricos? Outro ponto, se adaptarmos as questões acima, de forma que esteja referindo a nova classe de números estudada, estes problemas propostos tem solução.

Portamos por intento apresentar resultados gerais, como também enumerá-los para ate 4 algarismos, é importante ressaltar que a classe de números Equilibrados Geométricos não há publicações, logo os resultados que buscamos mostrar, são inéditos. Para podermos chegar ao esperado será necessário o estudo de conteúdos diversos na Matemática, serão eles no campo da Análise Combinatória estudando de forma direcional Permutação e Permutação com Repetição, dando enfase ao estudo das Médias Aritmética e Geométrica sendo ambas fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, abordando amplamente a desigualdade da Médias pois ela possibilita analisar de forma direta a relação entre essas duas classes de números Equilibrados.

Nesta perspectiva, o processo visa a construção e reconstrução do conhecimento, trabalhando a interdisciplinaridade dentro do campo Matemático, estudando assuntos como: Fatoração, Médias Aritmética e Geométrica como também a desigualdade das Médias, tudo relacionado a Matemática Básica.

A proposta está no campo da Metodologia de Resolução de Problemas, sendo ela utilizada como meio de sistematização de conceitos referentes aos números Equilibrados, exaltando a importância da problematização.

A presente pesquisa esta dividida em 4 capítulos. No Capítulo 1, apresentamos. uma introdução, com as questões motivadoras abordando de forma sutil, a construção de todo trabalho. O Capítulo 2, apresenta o conteúdo preliminar, possibilitando o desenvolvimento da pesquisa, dando enfase as Médias Aritmética e Geométrica com um cuidado maior na desigualdade da Médias, no campo da Análise Combinatória tem um foco nos conceitos de permutação, pois essa ferramenta torna o processo de contagem mais simples e dinâmico.

No Capítulo 3, o cerne do trabalho, aborda os resultados obtidos da nova classe de números estudadas, como também apresenta a contagem dos números Geométricos até 4 algarismos, assim possibilitando a resolução das questões apresentadas anteriormente dentro dessa nova classe.

Já no Capítulo 4, o último, será destinado a questões propostas do banco de questão da OBMEP/OBM, problemas elaborados pelo autor buscando que futuros leitores compreendam toda a construção do trabalho como também o uso das ferramentas disponibilizadas no Capitulo 2.

2 Conteudos Preliminares

Nestas notas indico o conjunto dos números inteiros positivos, p, e o conjunto dos números naturais considerando o zero $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$. Para maiores detalhes relacionado a este capitulo podem ser consultados as seguintes referências, Morgado e Carvalho(2013), Silva(2019), Samuel(1977), Heffez(2004), Kleber(2020) e Lima(1991).

Neste Capítulo será apresentado a teoria necessária para a resolução das questões como também material para compreender a classe de números Equilibrados, apresentado no capítulo seguintes, sempre que for necessário, faremos referências aos resultados aqui mostrados.

Axioma 2.0.1. ***(Axioma de Indução)*** *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*
i)$0 \in S$.
ii)S *é fechado com respeito sucessão, ou seja,para todo* n, $n \in S$ *vai implicar que* $s(n) \in S$.
Então, $S = \mathbb{N}$.
Se $A \subset \mathbb{N}$ *e* $a \in \mathbb{N}$, *usaremos a seguir a seguinte notação:* $a + A = \{a + x; x \in A\}$. *É imediato verificar que* $a + \mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}; m > a\}$. *Segue-se, do Axioma de Indução, o seguinte importante instrumento para mostrar outros resultados.*

Teorema 2.0.1. ***(Princípio de Indução Matemática)***. *Seja* $a \in \mathbb{N}$ *e seja* $p(n)$ *uma sentença aberta em* $n \in \mathbb{N}$. *Suponha que,*
(i) $p(a)$ *é verdade, e que*
(ii) Para todo $n \geq a$, $p(n)$ *em que* $p(n+1)$ *é verdade, logo,* $p(n)$ *é verdade para todo* $n \geq a$.

Prova: Seja $V = \{n \in \mathbb{N}; p(n)\}$; ou seja, V é o subconjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ para os quais $p(n)$ é verdade. E considere $S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\}$. Veja que verifica trivialmente $a + S \subset V$. Como, pela condição (i), detemos que $a + 0 = a \in V$, segue-se que $0 \in S$. Por outro lado, uma vez que $m \in S$, então $a + m \in V$ e, por (ii), temos que $s(a+m) \in V$; logo $s(m) \in S$. Assim, pelo Axioma de Indução, constamos que $S = \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V,$$

o que garante o resultado. ∎

É preciso que o leitor note que, para provar que $p(n)$ em que $p(n+1)$ é verdade para todo n, o que se faz é mostrar que, se $p(n)$ é verdade para algum n, então $p(n+1)$ é verdade, já que a implicação é verdade sempre que $p(n)$ é falso. Isto pode gerar alguma confusão, pois poder-se pensar que estamos usando a tese do teorema para provar o teorema, o que não é o caso, pois a tese é que $p(n)$ é verdade para todo $n \geq a$

Teorema 2.0.2. ***(Propriedade da Boa Ordem)***. *Todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{N}$ *possui um menor elemento.*

Prova: A demonstração será feita por redução ao absurdo. Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e suponha, por absurdo, que S não possui um menor elemento. Queremos mostrar que S é vazio, conduzindo a uma contradição. Considere o conjunto T, complementar de S em M. Queremos, portanto, mostrar que $T = \mathbb{N}$.

Defina o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{N}; n > k\}$, e considere a sentença aberta $p(n) : I_n \subset T$. Como $n > 0$ para todo n, segue-se que $0 \in T$, pois, caso contrário, 0 seria um menor elemento de S. Logo, $p(0)$ é verdade. Suponha agora que $p(n)$ seja verdade. Sempre que $n+1 \in S$, como nenhum elemento de I_n está em S, teríamos que $n+1$ é um menor elemento de S, o que não é permitido. Logo, $n+1 \in T$, seguindo daí que $T_{n+1} = I_n \cup (n+1) \subset T$, o que prova que, para qualquer $n, I_n \subset T$; portanto, $\mathbb{N} \subset T \subset \mathbb{N}$ e, consequentemente, $T = \mathbb{N}$.

■

2.1 Média

Os conceitos apresentados a seguir podem ser encontrados em Morgado e Carvalho (2013), como também em Silva(2019).

Esta seção é dedicada ao estudo das Médias, logo este trabalho tem por objetivo revisar assuntos referente as Médias Aritméticas e Geométricas como também, estudar a desigualdade das Médias.

Com o decorrer do tempo torna-se cada vez mais perceptível, que o conceito de Média não esta limita apenas a área de estatística. No dia a dia é visível a sua relevância, visando que todos estão propensos a utilizá-la de forma natural, um ótimo exemplo que retrata essa realidade é o estudante que a utiliza para analisar seu rendimento médio em relação as suas notas, a divisão das contas de casa com o pessoal, logo fica evidente que nos apropriamos do uso da Média de forma inconsciente sendo assim uma ideia fundamental no dia a dia.

A Média Aritmética da lista de n números inteiros positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor x tal que $x_1 + x_2 + ... + x_n = x + x + ... + x = nx$. Assim temos a seguinte

Definição 2.1.1. *Uma lista de* n *números reais da seguinte forma* $x_1, x_2, ..., x_n$, *a Média Aritmética* x *e definida por:*

$$x = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i \tag{2.1}$$

Exemplo 2.1.1. *Queremos determinar a Média Aritmética entre os números* $13, 17, 21, 36$ *e* 50.

Veja que para chegarmos a resolução, $x = \dfrac{13+15+21+36+50}{5} = \dfrac{125}{5} = 25$. *Assim, a Média Aritmética é* 25.

Exemplo 2.1.2. *(OBMEP 2019)Sabendo que a Média Aritmética de* 5 *inteiros positivos distintos é igual a* 11. *Descobrir qual é o maior valor possível de um número dessa lista?*

Como a Média dos 5 *inteiros é* 11, *a soma deles é* $5 \cdot 11 = 55$. *Como todos são inteiros positivos distintos, a soma de quatro deles é pelo menos* $1+2+3+4 = 10$. *Portanto, o quinto elemento é no máximo* $55 - 10 = 45$. *Assim, o maior valor possível de um número dessa lista é* 45 *e um exemplo em que isso acontece é com a lista* $1, 2, 3, 4, 45$.

A característica a ser considerada for o produto dos elementos da lista, obteremos a Média Geométrica.

Definição 2.1.2. *A Média Geométrica dos* n *números inteiros positivo* $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ *é um valor positivo* g *tal que* $x_1x_2x_3\cdots x_n = g\cdots g = g^n$, *assim a Média Geométrica é representada por:*

$$G = \sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n} = (\Pi_{i=0}^{n} x_i)^{1/n} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.1.3. *Vamos determinar a Média Geométrica entre os números 3, 3, 9, 9 e 81. Veja que* $\sqrt[5]{3\cdot 3\cdot 9\cdot 9\cdot 81} = \sqrt[5]{59049} = 9$, *assim concluímos que a Média Geométrica é* 9

2.2 Desigualdade entre as Médias Aritmética e Geométrica

Para demostrar a desigualdade primeiramente devemos apresentar três *Lemas* auxiliares, os quais consideram para quaisquer números reais.

Lema 2.2.1. *Sejam* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ *positivos, tais que:* $x + y = a + b$, *sempre que* $x \geq a$ *e* $y \geq b$, *então* $x = a$ *e* $y = b$.

Prova: Como $x + y = a + b$ então $(x-a)+(y-b) = 0$. Como $x \geq a$ e $y \geq b$, temos que $x - a \geq 0$ e $y - b \geq 0$. Portanto, $0 \leq x - a \leq (x-a)+(y-b) = 0$ implica $x - a = 0$ dessa forma obtemos $x = a$. Ja por outro lado, $0 \leq y - b \leq (x-a)+(y-b) = 0$, de modo que $y - b = 0$, por consequência $y = b$.

■

Lema 2.2.2. *Dada uma lista de* n *termos* $a_1, a_2, ..., a_n$, *se* $G = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, *então:*

$$G = \sqrt[n+r]{a_1 a_2 ... a_n \underbrace{GG...G}_{r \ vezes}} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + \overbrace{G + G + ... + G}^{}_{r \ vezes}}{n + r} .$$

Prova: Como $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, assim, $G^n = a_1 a_2 ... a_n$, e $nG = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Então, $\sqrt[n+r]{a_1 a_2 ... a_n G^r} = \sqrt[n+r]{G^n G^r}$. Disto, obtém que.

$$G = \frac{(n+r)G}{n+r} = \frac{(n+r)G}{n+r} = \frac{nG + rG}{n+r} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n+r} .$$

■

O terceiro e último Lema, tem a seguinte proposta, mostrar que a Média Geométrica não muda, se colocarmos mais termos na lista de elementos, sendo estes iguais a sua Média.

Lema 2.2.3. *Seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Pondo $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, considere a lista aumentada $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2m}$, com $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2m} = G$. Então:*

$$M_g(2m) = \sqrt[2m]{a_1 a_2 ... a_{2m}} = G = M_g(n) .$$

Prova: Como $G = \sqrt[2m]{a_1 a_2 ... a_n}$, então $a_1 a_2 \cdots a_n = G^n$. Logo,

$$G = \sqrt[2m]{a_1 a_2 ... a_n \ \underbrace{GG...G}_{2m-n \, vezes}} = \sqrt[2m]{G^n G^{2m-n}} = G.$$

■

A partir dos lemas apresentado será possível mostrar a veracidade da seguinte.

Teorema 2.2.1. *Se $a_1 a_2 ... a_n$ são números reais positivos, com $n \geq 2$, então:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

ou seja, $M_g(a_1, a_2, ..., a_n) \leq M_a(a_1, a_2, ..., a_n)$. Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Prova: Provaremos de forma inicial o caso $n = 2$. Apresentamos, $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0$. Logo, $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$. Portanto, $M_a = \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} = M_g$. E ainda, se $M_a = M_g$, então, $\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2}$, o que acarreta que, $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0$, assim obtemos $a_1 = a_2$.

Vamos demonstrar agora por indução o resultado para $m = 2^k < n$, com $n \geq 3$, desse modo vale o resultado para n. Dado um número natural $n \geq 3$, suponha que o resultado vale para todo $m = 2^k < n$ e seja $a_1, a_2, ..., a_n$ uma lista de n números reais positivos. Existe um número natural k tal que $m = 2^k < n \leq 2^k + 1 = 2m$, ou seja, $m < n \leq 2m$.

Colocando $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, considere a quantidade de elementos com $2m$ números $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2m}$, com $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2m} = G$. Pelo *Lema* 2.2.3 , na Média Geométrica a quantidade de elementos inseridos não altera, ou seja, $M_g(2m) = M_g(n) = G$.

Sejam ainda $M_a(n) = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$, a Média Aritmética dos n números e Média Aritmética com os novos elementos inseridos $2m$ números e $M_a(2m)$. Então

$$M_a(2m) = \frac{a_1 + ... + a_{2m}}{2m} = \frac{a_1 + a_2 ... + a_n + (2m - n)G}{2m} = \frac{nM_a(n) + (2m - n)G}{2m} \ .$$

Por hipótese, a desigualdade vale para $m = 2^k$, logo $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m}$, bem como, $\dfrac{a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m}}{m} \geq \sqrt[n]{a_{m+1} a_{m+2} ... a_{2m}}$.

Portanto, $M_a(2m) \geq \frac{\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m} + \sqrt[m]{a_{m+1} a_{m+2} ... a_{2m}}}{2}$. Assim pelo caso $m = 2$

$$\frac{\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m} \ + \ \sqrt[m]{a_{m+1} a_{m+2} ... a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1 ... a_m} \ \sqrt[m]{a_{m+1} ... a_{2m}}}$$
$$= \sqrt{\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m}} = \sqrt[2m]{a_1 ... a_{2m}}$$

$$= M_g(2m) = G \ .$$

Esta igualdade é válida devido o Lema 2.2.3. Portanto,

$$\frac{nM_a + (2m - n)G}{2m} = M_a(2m) \geq G \ .$$

Deste modo, $M_a(a) \geq G = M_g(n)$. Agora suponha que $M_a(n) = M_g(n)$. Pelo Lema 2.2.2, obtemos o seguinte

$$M_g(2m) = \sqrt[2m]{a_1 ... a_n a_{n+1} ... a_{2m}} = \frac{a_1 + ... + a_n + a_{n+1} + ... + a_{2m}}{2m} = M_a(2m) \ .$$

Como, $M_a(2m) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1 + ... + a_m}{m} + \dfrac{a_{m+1} + ... + a_{2m}}{m}\right)$

$$\geq \frac{\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m} \ + \ \sqrt[m]{a_{m+1} a_{m+2} ... a_{2m}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[m]{a_1 ... a_m} \ \sqrt[m]{a_{m+1} ... a_{2m}}} = M_a(2m) \ .$$

Desse modo, $M_a(2m) = M_g(2m)$, então

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+...+a_m}{m}+\frac{a_{m+1}+...+a_{2m}}{m}\right)=\frac{\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}\ +\ \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}}{2}\ .$$

$$=\sqrt{\sqrt[m]{a_1...a_m}\ \sqrt[m]{a_{m+1}...a_{2m}}}\ .$$

Veja bem pela igualdade acima e pelo *Lema* 2.2.1 obtemos o seguinte,

$$\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}=\frac{a_1+a-2+...+a_m}{m}\ \text{, e }\ \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}=\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_{2m}}{m}\ .$$

Como o caso da igualdade vale para m por hipótese, então

$$a_1=a_2=...=a_m\ \ e\ \ a_{m+1}=a_{m+2}=...=a_{2m}\quad (3.1)$$

Das igualdades apresentadas, como o caso da igualdade vale para $m=2$,

$$\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}=\ \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}\qquad\qquad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), obtemos o seguinte: $a_1=\ \sqrt[m]{a_1a_2...a_m}=\ \sqrt[m]{a_{m+1}a_{m+2}...a_{2m}}$. Logo, $a_1=a_2=...=a_m=a_m+1=...=a_{2m}$. Em particular temos, $a_1=a_2=...=a_n$.

Agora, podemos usar o Principio da Boa Ordenação2.0.2, para mostrar que o resultado vale para todo $n\geq 2$. Suponha que o resultado é falso para algum número natural e seja $n\geq 3$ o menor número natural tal que o resultado é falso. Então o resultado vale para todo $m=2^k<n$. Pelo que mostramos, valendo o resultado para $m=2^k<n$, o resultado valeria para n, o que não ocorre. Portanto, o resultado vale para todo $n\geq 2$.

■

O caso mais relevante para o trabalho, sendo os elementos sendo iguais, então as Médias Aritmética e Geométrica destes elementos dados são iguais, sera mostrado a seguir.

Proposição 2.2.1. *Dado um número natural n, considere n termos iguais $a_1=a_2=\cdots=a_n$ então $M_a=M_g$.*

Prova: Dado um número natural n, considere n termos $a_1,a_2,\cdots,a_n$ então $M_a=M_g$. Supondo que $a_1=a_2=...=a_n$, logo, $M_a(n)=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=$, desse forma trazemos o seguinte. $\dfrac{na_1}{n}=a_1=\sqrt[n]{(a_1)^n}=\sqrt{a_1a_2...a_n}=M_g(n)$. Portanto, $m_g(n)\leq M_a(n)$ e a igualdade vale se, somente se, $a_1=a_2=...=a_n$.

■

Exemplo 2.2.1. *(OBM 2001) Mostre que* $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$ *para quaisquer números reais positivos* a, b *e* c*.*

Para chegarmos a resposta observe que basta desenvolver o produto $(a+b)(a+c) = a^2 + ac + ab + bc = bc + a(a+b+c)$*. Desse modo pela desigualdade* $MA - MG$*, obtemos:* $\dfrac{bc+a(a+b+c)}{2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$*. A desigualdade ocorre se, somente se,* $bc+a(a+b+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$*, ou seja,* $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$

2.3 Análise Combinatória

Todo o conteúdo apresentado e estudado nesta seção pode ser encontrado em, Morgado é Carvalho (2013) , Iezzi(1977) e Kleber (2020)

E nesta seção vamos apresentar alguns tópicos relacionados a Análise Combinatória. Este conteúdo é fundamental para o desenvolvimento do trabalho para a realização das contagem que serão apresentadas nos próximos capítulos, por meio das ferramentas fornecem das pelo conteúdo estudo possibilita a contagem de termos de uma forma mais simples. Tendo em vista que é um meio para obter uma contagem quando tratamos com valores grandes, as ferramentas a serem utilizadas são o arranjo, permutação, fatorial e por fim permutação com repetições .

2.3.1 Princípio Fundamental da Contagem

Teorema 2.3.1. ***(Princípio Multiplicativo)*** *Um acontecimento* A *pode ocorrer de* m *maneiras diferentes e se, para cada uma das* m *maneiras possíveis de ocorrências de* A*, um segundo acontecimento* B *pode ocorrer de* n *maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o acontecimento* A *seguido do acontecimento* B *é* $m \cdot n$*.*

Prova: Sendo: $a_1, a_2, \cdots, a_m$ as m maneiras de ocorrências de A, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ as n maneiras de ocorrências de B. Pensaremos da seguinte forma. Considerando cada possibilidade um par ordenado (a_i, b_j). Em que representa as maneiras de ocorrer A e b_j as maneiras de ocorrer B. Lembrando que, $i = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $j = \{1, 2, \ldots, n\}$. Agora, fixemos o primeiro termo do par, sendo ele o a_1 e vamos variar o segundo de b_1 até o b_n. E repetiremos este processo para cada a_i.

A seguir, apresentam-se os pares ordenados formados.

$$\text{m linhas} \begin{cases} (a_1,b_1),(a_1,b_2),\cdots,(a_1,b_n). \text{ Implica que, n pares} \\ (a_2,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_2,b_n). \text{ Implica que, n pares} \\ \quad . \qquad . \quad \cdots \quad . \\ (a_m,b_1),(a_m,b_2),\cdots,(a_m,b_n). \text{ Implica que, n pares} \end{cases}.$$

Se adicionarmos todas as possibilidades, temos que a cada linha, gera n pares diferentes. Como temos m linhas, ficaremos com: $n+n+\cdots+n = m\cdot n$

■

O Principio da Contagem, ele é dividido em duas partes, Sendo que primeira é uma extensão do Princípio Multiplicativo e a segunda nos encaminhará para as fórmulas que desejamos apresentar, isto é, arranjos, permutações e combinações.

Teorema 2.3.2. ***(Principio da Contagem Parte A)****. Seja*
$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n1}\}$ *maneiras de ocorrer* A *é* n_a
$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_{n2}\}$ *maneiras de ocorrer* B *é* n_b
$Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_{nr}\}$ *maneiras de ocorrer* Z *é* n_z

Dispomos que o número de r-uplas ordenadas (sequências de r elementos) do tipo $(a_i, b_j, \cdots, z_p)$ *em que* $a_i \in A,\ b_j \in B,\ z_p \in Z$ *é* $n_a \cdots n_b \cdots n_r$

Prova: Para o primeiro termo, temos que $r = 2$, pois caso r seja 1, não formaríamos pares ordenados, então o número de possibilidades seria dado apenas pela contagem dos termos. E para $r = 2$, caímos nos Princípio Multiplicativo, 2.3.1. Supondo agora que ela é válida para o inteiro $(r-1)$. Neste caso, tomemos as sequências de $(r-1)$ elementos $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$. Pela hipótese de indução, existem: $n\cdot n\cdot\ldots\cdot n_{r-1}$ sequências e n_r elementos pertencentes a Z. Cada sequência $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ consiste de uma sequência $(a_i, b_j, \ldots, w_k)$ e um elemento $z_p \in Z$. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, o número de sequências do tipo $(a_i, b_j, \ldots, w_k, z_p)$ é $(n_a n_b n_{r-1})\cdot n_r = n_a\cdot n_b\cdot\ldots\cdot n_{r-1}\cdot n_r$.

Assim, segue-se então que o teorema é valido para todo $r \geq 2$. ■

Teorema 2.3.3. ***Princípio Fundamental da Contagem Parte B*** *Consideremos um conjunto* A *com* $m(m \geq 2)$ *elementos. Então o número de r-uplas ordenadas formadas com elementos distintos dois a dois de* A *é* $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(r-1)]$*. Ou seja,* $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$*, o número de sequências do tipo* $(a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_k)$ *com*

$$\begin{cases} a_i \in A \quad \textit{para todo, } i \in \{1,2,3,\cdots,m\} \\ a_i \neq a_p \ \textit{ para } \ i \neq p \end{cases}$$

e dessa forma $m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(r-1)]$

Prova: A demonstração é feita de forma análoga ao Princípio Fundamental da Contagem Parte A 2.3.2, utilizando-se o Princípio da Indução Finita, 2.0.1 ∎

2.3.2 Arranjo

Arranjo é o conceito que conta o número de maneiras de selecionar objetos, ordenadamente, de m objetos distintos disponíveis ou seja M um conjunto com m elementos, isto é $M = a_1, a_2, ..., a_m$. Chamamos de arranjo dos m elementos tomados r a $r(1 \leq r \leq m)$ a qualquer r-upla (sequencia de r elementos) formada com elementos de M todos distintos.

Seja $M = a_1, a_2, ..., a_m$. e indiquemos por $A_{m,r}$ o número de arranjos dos m elementos tomados r a r. Cada arranjo é uma sequencia de r elementos, em que cada elemento pertence a M, são todos distintos.

$$\underbrace{-, -, -, ..., -}_{r \quad elementos}$$

Pelo Principio Fundamental da Contagem o número de arranjo $A_{m,r}$ será

$$A_{m,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot [m-(r-1)]}_{r \quad fatores} \ .$$

Lembrando, sempre que $r = 1$, torna-se evidente que $A_{m,r} = m$. Veja de acordo a definição de arranjo, constamos o seguinte, que necessariamente $1 \leq r \leq m$.

Exemplo 2.3.1. *Para determinarmos os números de* 2 *algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos* 1, 2, 3 *e* 4.

Veja que, para o algarismo das dezenas apresenta 4 *opções e, para o algarismo da unidade* 3*, desse modo temos* $4 \cdot 3 = 12$*, e portanto encerramos* 12 *números.*

Exemplo 2.3.2. *(OBMEP 2009)Veja que um torneio de futebol com* 57 *times será disputado com as seguintes regras:*

- *Nenhum jogo pode terminar empatado.*
- *O time que perder duas partidas será eliminado.*
- *O torneio termina quando sobrar apenas um time, que será o campeão.*

Então se o time campeão perder uma vez, teremos quantas partidas disputadas no torneio?

Dessa forma vamos imaginar que o torneio acabou. Para os 56 *times que foram eliminados após perder* 2 *partidas cada um, contamos* $56 \cdot 2 = 112$ *derrotas. Como o campeão perdeu uma vez, o número total de derrotas foi* $112 + 1 = 113$*. Além disso, como não* *houve empates, em cada partida um time ganhou e o outro perdeu; logo, o número total de derrotas é igual ao número total de partidas.*

2.3.3 Permutações

A permutação é um caso isolado do arranjo, foi de grande relevância no decorrer dos estudos direcionados a realizar a contagem neste projeto. Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$. Chamamos de permutação dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e indiquemos por P_m o número de permutações dos m elementos M. Temos :

$$P_m = A_{m,m},$$
$$P_m = m(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot[m-(m-1)]$$

$$P_m = m(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\ .$$

Visando que caso $m = 1$ fica explicito $P_1 = 1$

Exemplo 2.3.3. *Desejamos mostrar a quantidade de anagramas da palavra DEUS.*

Usando a formula de permutação, $P_4 = 4(4-1)\cdot(4-2)\cdot[4-(4-1)] = 24$. *assim, a palavra Deus tem ao todo* 24 *anagramas.*

Exemplo 2.3.4. *(OBMEP 2011)considere os algarismos dados* $1,4,6$ *e* 8 *pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Vamos mostrar a soma de todos esses números?*

Veja com os números $1,4,6$ *e* 8 *podem-se formar* $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ *números de três algarismos distintos, pois temos* 4 *possibilidades para escolher a centena, depois* 3 *possibilidades para escolher a dezena e por fim* 2 *possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos* $6,4,2$ *e* 1*, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e* $\frac{24}{4} = 6$ *; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como* $6\cdot(8+6+4+1) = 114$*, a soma desses* 24 *números será* $114 + 10\cdot 114 + 100\cdot 114 = 111\cdot 114 = 12654$*.*

A fim de simplificar as formulas apresentadas anteriormente sendo elas de arranjo e permutação, sendo assim temos por definição de fatorial. Seja m um número inteiro não negativo ($m \in \mathbb{N}$) definimos fatorial de m (e indicamos $m!$) através da relação:

$$\begin{cases} m! = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \quad para \;\; m \geq 2 \\ 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

A definição de 0! sera justificada a seguir. Desse modo e possível perceber que:

$$m! = m\cdot\underbrace{(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{(m-1)!}.$$

Então; $\dfrac{m!}{m} = (m-1)!$. Tendo em vista, quando $n = 1$ vamos obter, $\dfrac{1!}{1} = (1-1)!$, logo: $1 = 0!$.

Como foi citado acima, por meio da noção de fatorial torna-se possível simplificar as formulas para arranjo e permutação. De fato: $P_m = (m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2.\cdot 1 = m!$

$$A_{m,r} = (m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-r+1) =$$

$$= (m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-r+1)\cdot\frac{(m-1)\cdot(m-r-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(m-1)\cdot(m-r-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\frac{m!}{(m-r)!}.$$

Em particular $\begin{cases} P_1 = 1 \\ 1! = 1 \end{cases}$ E a fórmula $P_m = m!$ é valida para todo, $m \in \mathbb{N}^*$. E ainda temos; Em particular $\begin{cases} A_{m,1} = m \text{ para todo, } m \in \mathbb{N}^* \\ \dfrac{m!}{(m-1)!} = m, \text{ para qualquer, } m \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

E a fórmula $A_{m,1} = \dfrac{m!}{(m-1)!}$ é valida para quaisquer $m \in \mathbb{N}^*$, para todo $r \in \mathbb{N}^*$ com $r \leq m$.

Usando fatorial podemos resolver a questões acima de forma mais simples e, pratica e possível resolver os seguintes problemas de forma mais simples.

Exemplo 2.3.5. *A quantidade de anagramas da a palavra DEUS, usando fatorial temos* $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ *anagramas.*

Exemplo 2.3.6. *A quantidade de números de* 2 *algarismos diferentes que podemos escrever com os algarismos* $1, 2, 3$ *e* 4.

Veja bem, $A_{4,2} = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!} = 12$. *Assim, a quantidade que podemos escrever são* 12.

Exemplo 2.3.7. *(OBMEP 2006) Queremos determinar qual é a quantidade de números menores que* 10000 *tais que o produto de seu algarismos seja* 100*? Por exemplo,* 455 *é um destes números, porque* $4\cdot 5\cdot 5 = 100$.

Pela decomposição em fatores primos, temos que $100 = 5\cdot 5\cdot 2\cdot 2$. *Assim, devemos usar esses algarismos da decomposição ou uma combinação dos mesmos. Com* 1 *ou* 2 *algarismo não existe nenhum número com a propriedade desejada. Com três algarismos temos que usar os valores* $5,5,4$ *onde teremos usando uma permutação com repetição,* $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ *números. Com* 4 *algarismos temos duas opções de escolha:* $5,5,2,2$ *ou* $5,5,4,1$*, donde teremos, respectivamente, as quantidades* $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ *números e* $P_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ *números. Com* 5 *algarismos não existe combinação possível, pois os mesmos devem ser menores que* 10.000*. Portanto, a quantidade desejada é* $3+6+12 = 21$ *números.*

Usando a permutação com repetição é possível contar quantos anagramas são formados por palavras do tipo OVO, PAPAI, RAPADURA entre outras, veja bem a palavra RAPADURA caso usarmos a permutação simples obtemos 8!, mas temos letras repetidas e consequentemente obteremos anagramas iguais, a letra A por exemplo aparece três vezes, logo podendo permutar entre si 3! maneiras, se considerarmos a permutação com 8 letras estaríamos contanto o mesmo anagrama 3! e para a para a letra R que aparece duas vezes tem raciocínio similar referente a A, caso haja mais letra que se repetem seguiria a mesma lógica. Portanto, podemos afirmar que o número de anagramas da palavra Rapadura é dado por $\dfrac{8!}{3!2!}$, e podemos chamar esse problema de permutação de elementos repetidos.

Consideremos a palavra OVO e procuremos seus anagramas. Vamos indicar por O^* o segundo O. Obtemos então: $OVO^*_{(1)}$ $OO^*V_{(2)}$ $VOO^*_{(3)}$ $VO^*O_{(4)}$ $O^*VO_{(5)}$ $O^*OV_{(6)}$. Notemos que as permutações : (1) e (5) são iguais, bem (2) e (6), e (3) e (4) são iguais.

E possível perceber que não temos $3! = 6$ permutações diferentes, mas apenas 3 sendo elas as seguintes: OVO, OOV, VOO.

Fica evidente a redução na quantidade de permutações, mas este fato acontece por termos duas letras iguais O e O nos elementos que devem ser permutados. Agora vamos calcular quando no processo de permutação existe elementos repetidos.

Considere n elementos dos quais n_1 são iguais a a_1: $\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{n_1}$ e n_2 são iguais a a_2 : $\underbrace{a_2, a_2, ..., a_2}_{n_2}$; e os demais elementos são distintos de $a_1 e a_2$. Notação que representa é

$P_n^{n_1,n_2}$ o número de permutações, nestas condições.

Cada permutação dos n elementos é uma o n-upla ordenada de elementos em que devem figurar n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e os $n-n_1-n_2$ elementos restantes. Façamos o seguinte raciocínio. Das n posições que existe na permutação, vamos escolher $n-n_2$ lugares para colocar todos elementos,com exceções dos iguais a a_2. Existe $\binom{n}{n-n_2}$ modos de escolher esses lugares. Para cada uma dessas escolhas, existirão $P_{n-n_2}^{n_1}$ modos em que os $n-n_2$ elementos podem ser permutados. Ao todo existirão,

$$\binom{n}{n-n_2} \cdot P_{n-n_2}^{n_1} = \frac{n!}{(n-n_2)!n_2!} \cdot \frac{(n-n_2)!}{n_1} = \frac{n!}{n_1!n_2!},$$

formas de arranjo na permutação, todos os elementos, com exceção de a_2.

Uma vez arranjado estes elementos na permutação, as posições dos elementos repetidos a_2 ficam determinados por uma única forma pelos lugares restantes. Logo existirão $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ permutações com n_1 elementos iguais a a_1 e n_2 elementos iguais a a_2. Isto é :

$$P_n^{n_1,n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!} \ .$$

Considerando n elementos dos quais temos $(n_1, n_2...n_r)$ são iguais respectivamente $(a_1, a_2, ..., a_r)$ utilizando o raciocínio apresentado, podemos calcular o número de permutações nas seguinte condição $P_n^{n_1,n_2,...,a_r}$ através da formula:

$$P_n^{n_1,n_2,...,a_r} = \frac{n!}{n_1!, n_2!, ..., a_r!}.$$

É fácil ver que a um caso particular $n_1 = n_2 = ... = a_r = 1$ obtemos $P_n^{1,1,...,1} = n!$. que é o número de permutações de n elementos distintos.

Exemplo 2.3.8. *(OBMEP 2015)Veja bem, em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Élvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?*

Dentre os 5 *participantes, temos para os dois premiados, um total de* $P_5^2 = 10$ *combinações possíveis para escolher dois participantes entre os* 5 *disponíveis. Agora, cada um desses participantes pode receber cada um, três medalhas. Logo, o total de maneiras que pode ter acontecido essa premiação é* $10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$.

3 Números Equilibrados

Neste capitulo vamos abordar a classe de números Equilibrados, apresentando seus respectivos resultados. Consideraremos o conjunto dos números inteiros positivos (naturais) denotado por $Z_+ = \{0,1,2,3,\ldots\}$, e por conveniência diremos apenas a é um número (natural). Considerem a um número ainda no sistema posicional decimal (base 10), ou seja, um número com $k+1$ algarismos, e escrito na forma $a = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$, isto é, $a = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, em que $a_i \in D = \{0,1,\cdots,8,9\}$ é um algarismo. Uma definição de importância para ambas as classes e a de números permutado obtido pela permutação de algarismos.

Definição 3.0.1. *Dado um número a com $k+1$ algarismos, considere o número a' com $k+1$ algarismo da forma $a' = a'_k a'_{k-1} \ldots a'_1 a'_0$, obtido de a permutando (trocando a posição de) seus algarismos, isto é, $a'_j \quad (0 \leq j \leq k)$ é igual a algum $a_i \quad (0 \leq i \leq k)$. Dizemos que a' é um número permutado de a*

Por exemplo, os números 132, 213, 231, 312, 321 são permutações obtidas do número 123. assim, vamos indicar a' sendo quaisquer número inteiro obtido de a permutando seus algarismos.

3.1 Números Equilibrados Aritméticos

Os números Equilibrados surgem de problemas propostos pelo banco de questões da OBMEP, e buscamos generalizar e compreender como comporta esta classe, inicialmente vamos falar dos números Aritméticos e os seus respectivos resultados.

Definição 3.1.1. *Um número a é Equilibrado pela Média Aritmética sempre que um dos seus algarismos é Média Aritmética dos demais, ou seja, para algum a_i apresentamos;*

$$M_{a_i}(a) = \frac{(a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) - a_i}{k} = a_i \ . \tag{3.1}$$

E $a^{(i)}$ indica a posição do algarismo que é Média Aritmética dos demais. Por simplicidade e conveniência diremos apenas que a é Aritmético.

Exemplo 3.1.1. *1. Veja que $a^{(1)} = 456$ é Aritmético, pois $5 = M_5(456) = \frac{4+6}{2}$.*

2. O número $a = 0 = 00\cdots0$ é Aritmético para qualquer quantidade de algarismos.

Para simplificar a definição vamos utilizar a aplicação soma, lembramos que a *soma de algarismos* do número a, é obtido pela adição dos algarismos deste número. Formalmente temos que

Definição 3.1.2. *A* aplicação soma de algarismos S *é uma aplicação que a cada* $a \in Z_+$ *na forma.*$a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$, *com* $k \in N$, *associa ao número natural* s *dado por*

$$S(a) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 := s \ .$$

Segue da Definição 3.1.2 que $S(2020) = 2+0+2+0 = 4$. Enquanto $S(1234567123) = 1+2+3+4+5+6+7+1+2+3 = 34$.

Exemplo 3.1.2. *(OBMEP 2019) Mostre qual é a soma dos algarismos do número* $\sqrt{1111111111 - 22222}$ *?*

Veja bem $\sqrt{1111111111 - 22222} = \sqrt{1111088889} = 33333$. *Agora basta aplicar a soma de algarismos,* $s(33333) = 3+3+3+3+3 = 15$

Na Definição 3.2.1 podemos reescrever a equação (3.1) usando a aplicação soma dos algarismos, ou seja

$$M_{a_i}(a) = \frac{S(a) - a_i}{k}$$

sendo $k+1$ a quantidades de algarismos de a .

Exemplo 3.1.3. *O número* $a = 567$ *é Aritmético pois* $S(567) = 5+6+7 = 18$ *e* $M_6(567) = \frac{18-6}{2} = 6$.

Exemplo 3.1.4. *O número* $a = 5012$ *e Aritmético com* $k+1 = 4$ *o numero Geométrico é* $M_{a_i}(a) = \frac{S(a)-a_i}{k}$ *temos* $M_{a_i}(a) = 8 - a_i = 3a_i$,*dessa forma obtemos* $8 = 4a_i$,*assim* $a_i = 2$

Apresentamos esse estudo sobre algumas propriedades relevantes, sendo elas para sistematizar e induzir um caminho que facilite não só na resolução das questões, como também, obter a contagem de números Aritméticos.

Proposição 3.1.1. *Um número inteiro positivo* $a \neq 0$ *com seus* $k+1$ *algarismos iguais a* $x \in D$ *é um número Aritmético.*

Prova: Temos que a tem todos seus $k+1$ algarismos $a_k = a_{k-}1 = \cdots = a_1 = a_0 = x$, assim $S(a) = (k+1) \cdot x$ donde obtemos que para todo a_i,

$$M_{a_i}(a) = \frac{S(a) - x}{k} = x, \ \text{para } i = \{0, 1, \ldots, n\} \ .$$

■

Exemplo 3.1.5. *Segue da Proposição 3.3.1 que todo número formado pela repetição de um algarismo é Aritmético. Assim o número* $a = \underbrace{33\cdots3}_{2021 \ vezes}$ *é Aritmético.*

Como na definição 3.0.1,em que a' é um número permutado de a, temos a seguinte resultado.

Proposição 3.1.2. *Sempre que a é um número Aritmético então a' também é.*

Prova: Temos que a é um número Aritmético , vamos fixar que $a_0 = M_{a_0}(a)$ e a' é uma permutação de a, logo não altera o valor, nem a quantidade, dos algarismos apenas a posição entre eles, assim

$$M_{a_0}(a) = \frac{S(a) - a_0}{n} = a_0 \ .$$

Portanto toda permutação de a também é um número Aritmético. ∎

Exemplo 3.1.6. *Dado $a = 456$, segue da Proposição 3.1.2 que todo número a' obtido pela permutação dos algarismos do número a é Aritmético. Assim $456, 465, 546, 564, 645$ e 654 são números Aritmético.*

Em seguida apresentaremos dois resultados que mostra formas de obter novos números Aritmético.

Proposição 3.1.3. *Dado o número $b = a_k a_{k-1} \cdots a_1$, com k algarismos, considere $s = \frac{S(b)}{k}$. Se $s \in Z_+$ então $a = 10 \cdot b + s$ e a' são números Aritméticos com $k+1$-algarismos.*

Prova: Temos que $s = \frac{S(b)}{k}$, assim tomando $s(b) = m$, veja que $s = \frac{m}{k}$ logo para todo $s \in \mathbb{Z}_+$, para $0 < s \leq 9$ obteremos um a e a' e números Aritméticos . ∎

Exemplo 3.1.7.
1. *Dado o número $b = 2020$, temos $S(b) = 4$, assim $s = 1$ donde obtemos que $a = 20201$ e qualquer número a' obtido pela permutação dos algarismos do número a é Aritmético.*
2. *Para o número $b = 2021$, como $S(b) = \frac{5}{2} \notin Z_+$ não é possível obter um número Aritmético da forma $a = 10 \cdot b + s$.*

Proposição 3.1.4. *Dado o número Aritmético $c^{(i)} = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ com $k+1$ algarismos e $k \leq i \leq 0$. Então $a = a^{(0)} = 10 \cdot c + a_i$ e a' são números Aritméticos com $k+2$ algarismos.*

Prova: Sem perda de generalidade considere $c^{(0)}$ um número Aritmético com $k+1$ algarismos, façamos $a = 10 \cdot c + a_0$. Note que $S(c) = (k+1)a_0$, assim

$$M_{a_0}(a) = \frac{S(c) - a_0}{k+1} = \frac{S(a)}{k+1} = a_0 \ .$$

Portanto a e a' são números Aritmético. ∎

Exemplo 3.1.8. *No Exemplo 3.1.1 temos que o número $c^{(1)} = 456$ com 3 algarismo é Aritmético, assim $a = 4565$ e toda permutação a' são números Aritmético com 4 algarismos.*

Proposição 3.1.5. *Dado um número a Aritmético com $k+1$ algarismos, Aritmético, então o número $\underbrace{nn\cdots n}_{i\ vezes}$ é também Aritmético, em que nn é a justaposição dos algarismos de n.*

Prova: Tomemos a Aritmético com $k+1$ algarismos e a_0 o algarismo Aritmético, assim $S(a) = s = (k+1)a_0$. Para algum natural $i \geq 1$ fixado, considere $b = \underbrace{nn\cdots n}_{i \text{ vezes}}$, assim

$$\begin{aligned} A_0(b) &= \left[\tfrac{S(b)-a_0}{i\cdot(k+1)-1}\right] = \left[\tfrac{s^i-a_0}{i\cdot(k+1)-1}\right] \\ &= \left[\tfrac{(k+1)a_0^i-a_0}{(k+1)-1}\right] = a_0\ . \end{aligned}$$

Em que obtemos b (e b') é Aritmético, como desejado.

■

3.2 Números Equilibrados Geométricos

Devido os estudo sobre números Equilibrados, estendemos o conceito para números Equilibrados Geométricos, tendo como definição.

Definição 3.2.1. *O número n é Equilibrado pela Média Geométrica sempre que um dos seus algarismos é a Média Geométrica dos demais, ou seja, para algum a_j apresentamos*

$$G_j(n) = \left[\frac{1}{a_j}(a_k \cdot a_{k-1} \cdot \cdots \cdot a_1 \cdot a_0)\right]^{1/k} = a_j\ . \tag{3.2}$$

Por simplicidade e conveniência, como no caso de números Equilibrados Aritméticos diremos que g é um número Geométrico e a_j é o algarismo Geométrico. Em ambos os casos, utilizaremos a notação $g^{(j)}$ para indicar que o número g é Equilibrado Geométrico; e que o algarismo a_j, $j \in \{0, \ldots, k\}$ é Geométrico, isto é, corresponde à Média Geométrica dos demais algarismos

Exemplo 3.2.1. *Veja que número $g^{(0)} = 193$ é Geométrico, pois $3 = G_0(193) = (\frac{1}{3}\cdot 1 \cdot 9 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1\cdot 9} = 3$.*

De forma similar e usado um meio para sistematizar as ideias simplificando a expressão algébrica mostrada acima, vamos usar produto de algarismos.

Definição 3.2.2. *O* produto de algarismos *P é uma aplicação que a cada número $n \in Z_+$ com $k+1$ algarismos, ou seja, na forma $a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0$, com $k \in \mathbb{N}$, associa ao número natural m dado por,*

$$P(n) = (a_k \cdot a_{k-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0) =: m\ .$$

Bem como, segue da Definição que para $g = 193$ *temos* $P(g) = 1 \cdot 9 \cdot 3 = 27$ *e* $g = 193$ *é Geométrico, enquanto que para* $n = 7352$ *obtemos* $P(7352) = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 210$*. Já* $P(2021) = 0$.

Exemplo 3.2.2. *(OBMEP 2007) Considere* $P(n)$ *o produto dos algarismos do número* n*. Por exemplo:*$P(58) = 5 \cdot 8 = 40$ *e* $P(319) = 3 \cdot 1 \cdot 9 = 27$.

(a) Os números naturais menores que 1000 *cujo produto de seus algarismos é* 12*, ou seja os números naturais* $n < 1000$ *tais que* $P(n) = 12$.

Como $12 = 2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$*, devemos utilizar os algarismos* $1, 2, 3, 4$ *e* 6 *cujos produtos sejam* 12*. Assim temos:* • *números com* 2 *algarismos:* $26, 62, 34, 43$ • *números com* 3 *algarismos: com os algarismos* $1, 2$ *e* $6 : 126, 162, 216, 261, 612, 621$ *com os algarismos* $1, 3$ *e* $4 : 134, 143, 314, 341, 413, 431$ *com os algarismos* $2, 2e3 : 223, 232, 322$.

(b) Os números naturais menores que 199 que satisfazem $P(n) = 0$*, Ou seja, tem o produto de seus algarismos igual a* 0 *.*

Se $P(n) = 0$*, então o produto de seus algarismos é igual a zero, logo pelo menos um dos algarismos do número* n *é zero. Temos* 19 *números com zero só nas unidades,* 9 *números com zero só nas dezenas e ainda o número* 100*, totalizando* 29 *números:* $0, 10, 20, ..., 90, 110, ..., 190.0$ *somente nas unidades.* $0, 10, 20, ..., 90, 110, ..., 190.$ 0 *somente nas dezenas.*

(c) Quais números naturais menores que 200 *satisfazem a desigualdade* $37 < P(n) < 45$*?*

Queremos encontrar os números menores do que 200*, cujo produto de seus algarismos seja maior do que* 37 *e menor do que* 45*. Em primeiro lugar, note que não existem números cujo produto de seus algarismos sejam* $38, 39, 41, 43$ *e* 44 *porque esses números não podem ser escritos como produto de dois ou três algarismos. Restam, então:* 40 *e* 42*. Vejamos as possibilidades: números menores do que* 200 *cujo produto dos algarismos é* $40 : 58, 85, 158$ *e* 185 *números menores do que* 200 *cujo produto dos algarismos é* $42 : 67, 76, 167$ *e* 176

(d) Dentre os números de 1 *a* 250*, qual o número cujo produto de seus algarismos é o maior. O número é* $249 = 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$.

Dado o número n com $k+1$ algarismos e fazendo $P(n) = m$ podemos reescrever a equação (3.2) usando a aplicação produto e obtemos

$$G_j(n) = \left[\frac{m}{a_j}\right]^{1/k} . \tag{3.3}$$

Aqui vamos apresentar as propriedades dos números Geométricos. Um primeiro resultado, que segue diretamente da Definição 3.2.2 e Equação (3.3), é

Proposição 3.2.1. *Seja g número, com $k+1$ algarismos. Se g for Geométrico e a_0 é o algarismo Geométrico então $P(g) = a_0^{k+1}$*

Temos que a_0 é o número Geométrico de g logo por definição podemos fixar a base e posso reescrever g da seguinte forma a_0^{k+1}.

Proposição 3.2.2. *Seja g número Geométrico com $k+1$ algarismos, e n qualquer natural e a_0 é o algarismo Geométrico então $P(g)^n = ({a_0}^{k+1})^n$.*

Proposição 3.2.3. *Quando n é um número (Aritmético ou Geométrico) com $k+1$ algarismos então n' também o é.*

Prova: Tomemos g um número Geométrico, vamos fixar que $a_0 = G_{a_0}(g)$ e g' é uma permutação de g, logo não altera o valor do produto $P(g)$, nem a quantidade de algarismos, altera apenas a posição entre eles. Admita que $g'_{j_0} = a_0$ assim

$$G_{j_0}(g') = \left[\frac{m}{a_0}\right]^{1/k} = G_0(g) = a_0 \ .$$

Portanto, toda permutação de g também é um número Geometrico. ∎

Exemplo 3.2.3. *Segue da Proposição 3.2.3 que todo número g' obtido pela permutação dos algarismos do número g é Geométrico, assim. No Exemplo 3.2.1 vimos que $g^{(0)} = 193$ é um número Geométrico, então também o são $g^{(0)} = 193$, $g^{(0)} = 913$, $g^{(1)} = 139$, $g^{(1)} = 931$, $g^{(2)} = 319$ e $g^{(2)} = 391$.*

De forma similar aos números Aritméticos, também é possível mostrar que podemos obter outros ou novos números Geométrico, o que nos garante que a quantidade de números Geométrico é infinita.

Proposição 3.2.4. *Dado um número $g = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ com $k \geq 1$ algarismos, considere $m = P(n)^{1/k}$. Se $0 \neq m \in D$ então $g = 10 \cdot n + m$ é um número Geométrico com $k+1$ algarismos.*

Prova: Basta observar que

$$G_0(g) = \left[\frac{P(g)}{m}\right]^{1/k} = m \ .$$

∎

Exemplo 3.2.4. *Dado o número* $n = 214$*, temos* $P(n) = 8$*, assim* $m = 2$*. E obtemos que* $g^{(0)} = 2142$ *e qualquer número* g' *obtido pela permutação dos algarismos do número* g *é Geométrico.*

Proposição 3.2.5. *Dado um número* g *Geométrico com* $k+1$ *algarismos, em que* a_0 *é o algarismo Geométrico então todo número da forma* $a \cdot 10^n + \underbrace{a_0 a_0 \cdots a_0}_{n \text{ vezes}}$*, é também um número Geométrico.*

Prova: Por hipótese temos que que g tem $k+1$ algarismos, como g é Geométrico então $P(g) = m = a_0^{k+1}$. Consideremos $b = g \cdot 10^n + \underbrace{a_0 a_0 \cdots a_0}_{n\text{vezes}}$. Para quaisquer naturais k e n, veja que

$$\begin{aligned} G_0(b) &= \left[\frac{P(b)}{a_0}\right]^{1/[k+n]} = \left[\frac{P(a) \cdot a_0^n}{a_0}\right]^{1/[k+n]} \\ &= \left[\frac{m \cdot a_0^n}{a_0}\right]^{1/k+n} = \left[a_0^{k+n}\right]^{1/k+n} = a_0 \ . \end{aligned}$$

E assim, $P(b) = a_0^{(k+n)+1}$. em que obtemos b (e b') é Geométrico, como desejado. ■

Exemplo 3.2.5. *Veja que* $g = 3193$ *é um número Geométrico, pois* $G_0(g) = G_0(3193) = 3$*. Considere* $n = 2$*, assim* $b = 319333$ *é Geométrico.*

Proposição 3.2.6. *Dado um número* g *Geométrico com* $k+1$ *algarismos, então o número* $\underbrace{nn \cdots n}_{j \text{ vezes}}$ *é também Geométrico, em que* nn *é a justaposição dos algarismos de* n*.*

Prova: Tomemos g Geométrico com $k+1$ algarismos e a_0 o algarismo Geométrico, assim $P(g) = m = a_0^{k+1}$. Para algum natural $j \geq 1$ fixado, considere $b = \underbrace{nn \cdots n}_{j \text{ vezes}}$, assim

$$\begin{aligned} G_0(b) &= \left[\frac{P(b)}{a_0}\right]^{1/[j \cdot (k+1) - 1]} = \left[\frac{m^j}{a_0}\right]^{1/[j \cdot (k+1) - 1]} \\ &= \left[\frac{(a_0^{k+1})^j}{a_0}\right]^{1/[j \cdot (k+1) - 1]} = a_0 \ . \end{aligned}$$

Em que obtemos b (e b') é Geométrico, como desejado. ■

Exemplo 3.2.6. *Veja que* $g = 142$ *é um número Geométrico, pois* $G_0(g) = G_0(142) = 2$*. Considere* $n = 3$*, assim* $b = 142142142$ *é Geométrico.*

Proposição 3.2.7. *Sejam* g *um número Geométrico com* $k+1$ *algarismos e* a_0 *o algarismo Geométrico. Se* $a_0 \in \{1, 5, 7, 8, 9\}$ *então* g *possui seus* $k+1$ *algarismos iguais a* a_0*.*

Prova: Segue da Proposição 3.2.1 que $P(g) = m = a_0^{k+1}$, sendo a_0 o algarismo Geométrico então o produto dos algarismos restantes é $\frac{m}{a_0} = a_0^k$, como $a_0 \in \{1, 5, 7, 8, 9\}$ o resultado segue. ■

3.3 Número Aritmético e Geométrico

No Exemplo 3.2.1 observamos que números $n = \underbrace{22\cdots 2}_{2021 \text{ vezes}}$ ou $m = \underbrace{55\ldots 5}_{2021 \text{ vezes}}$ são Aritmético e Geométrico. Tal fato pode ser generalizado pelo seguinte resultado

Proposição 3.3.1. *Todo número $n \neq 0$ que possui seus $k+1$ algarismos iguais a $a_o \in D$, em que $a_0 \neq 0$, é um número Aritmético e Geométrico.*

Prova: Temos que todos os algarismos de n são iguais a $0 \neq a_0 \in D$. Agora basta observar que $m = P(n) = {a_0}^{(k+1)}$, assim,

$$G_j(n) = \left[\frac{m}{a_0}\right]^{1/k} = \sqrt[k]{{a_0}^k} = a_0, \text{ para } j = 0, 1, \ldots, k\ .$$

■

Proposição 3.3.2. *Um número n é do tipo Aritmético e Geométrico ao mesmo tempo, se e somente se, todos os seus algarismos forem iguais.*

Prova: Este resultado decorre imediatamente do resultado conhecido como **Desigualdade das Médias** que esta demostrado no capitulo 2 Teorema 2.2.1. ■ .

3.4 Número Aritmético

Para executar a contagem usamos os conteúdos referente a Análise combinatória. Uma observação para o caso dos números Equilibrados que tem pelo menos um dos seus algarismos iguais a zero, por exemplo o número $a = 5102$ o número permutado de a e igual a $a' = 0512$, logo não é Equilibrado, pois $a = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$, tem que ter $a_k \neq 0$.

3.4.1 Número Aritméticos com 2 algarismos

Veja que apenas os número $a = xx$ com algarismos repetidos é um número Equilibrado, visto que devemos ter $x = \frac{x}{1}$, com $x \in D$.

Obtemos que exitem 9 números Aritmético com 2 algarismos.

3.4.2 Número Aritméticos com 3 algarismos

Agora dado a um número Aritmético com 3 algarismos, isto é, $a = a_2 a_1 a_0$, então temos $k = 2$, isso implica que que $S(a) = 3a_0$, ou seja, $S(a)$ é múltiplo de 3 e $1 \leq M_{a_0}(a) \leq 9$. Assim para $a_0 = 1$

1. Caso $a_0 = 1$ então $S(a) = 3$,Assim $M_1(a) = 2$. em que obtemos que $a = 201$ ou $a = 111$, e suas permutações, e total $5 = 4 + 1$ números Aritmético.

2. Caso $a_0 = 2$ então $S(a) = 6$, assim $M_2(a) = 4$. Portanto $a = 402$, $a = 312$ ou $a = 222$, e suas permutações, totalizando $11 = 4+6+1$ números Aritmético.

3. Caso $a_0 = 3$ então $S(a) = 9$, assim $M_3(a) = 6$. Portanto $a = 603$, $a = 513$, $a = 423$ ou $a = 333$, e suas permutações, totalizando $17 = 4+6+6+1$ números Aritmético.

4. Caso $a_0 = 4$ então $S(a) = 12$, assim $M_4(a) = 8$. Portanto $a = 804$, $a = 714$, $a = 624$, $a = 534$ ou $a = 444$, e suas permutações, e um total de $23 = 4+6+6+6+1$ números Aritmético.

5. Caso $a_0 = 5$ então $S(a) = 15$, assim $M_5(a) = 10$. Portanto $a = 915$, $a = 825$, $a = 735$, $a = 645$, ou $a = 555$, e suas permutações, e um total de $25 = 4 \cdot 3! + 1$ números Aritmético.

6. Caso $a_0 = 6$ então $S(a) = 18$, assim $M_6(a) = 12$. Portanto $a = 936$, $a = 846$, $a = 756$ ou $a = 666$, e suas permutações, totalizando $19 = 3 \cdot 3! + 1$ números Aritmético.

7. Caso $a_0 = 7$ então $S(a) = 21$, assim $M_7(a) = 14$. Portanto $a = 957$, $a = 867$ ou $a = 777$, e suas permutações, totalizando $13 = 2 \cdot 3! + 1$ números Aritmético.

8. Caso $a_0 = 8$ então $S(a) = 24$, assim $M_8(a) = 16$, Portanto $a = 978$ ou $a = 888$, e suas permutações, totalizando $7 = 6+1$ números Aritmético.

9. Caso $a_0 = 9$ então $S(a) = 27$, assim $M_9(a) = 18$, Portanto $a = 999$ é Aritmético.

3.4.3 Números Aritméticos com 4 algarismos

Seja a um número Aritmético com 4 algarismos, isto é, $a = a_3a_2a_1a_0$, então temos $k = 3$, isso implica que que $S(a) = 4a_0$ é múltiplo de 4 e $1 \leq M_{a_0}(a) \leq 9$. Denotemos por $M_{a_0}(a)$ o numerador da fração $M_{a_0}(a)$.

1. Caso $a_0 = 1$ então $S(a) = 4$, $M_1(a) = 3$, donde obtemos que $a = 3001$, $a = 2101$ ou $a = 1111$, e suas permutações, totalizando $13 = 6+6+1$ números Aritmético.

2. Caso $a_0 = 2$ então $S(a) = 8$, assim $M_2(a) = 6$. Portanto $a = 6002$, $a = 5102$, $a = 4202$, $a = 4112$, $a = 3302$, $a = 3212$ ou $a = 2222$, e suas permutações, totalizando $55 = 6+18+9+12+9+12+1$ números Aritmético.

3. Caso $a_0 = 3$ então $S(a) = 12$, assim $M_3(a) = 9$. Portanto $a = 9003$, $a = 8103$, $a = 7203$, $a = 7113$, $a = 6303$, $a = 6213$, $a = 5403$, $a = 5313$, $a = 5223$, $a = 4413$, ou $a = 3333$, e suas permutações, totalizando $130 = 6+18+18+12+9+24+18+12+12+12+1$ números Aritmético.

4. Caso $a_0 = 4$ então $S(a) = 16$, assim $M_4(a) = 12$. Portanto $a = 9304$, $a = 9214$, $a = 8404$, $a = 8314$, $a = 8224$, $a = 7504$, $a = 7414$, $a = 7324$, $a = 6604$, $a = 6514$, $a = 6424$, $a = 6334$ ou $a = 4444$, e suas permutações, totalizando $199 = 18+24+9+24+12+18+12+24+9+24+12+12+1$ números Aritmético.

5. Caso $a_0 = 5$ então $S(a) = 20$, assim $M_5(a) = 15$. Portanto $a = 9605$, $a = 9515$, $a = 9425$, $a = 9335$, $a = 8705$, $a = 8615$, $a = 8525$, $a = 8435$ ou $a = 555$, e suas permutações, totalizando $145 = 18+12+24+12+18+24+12+24+1$ números Aritmético.

6. Caso $a_0 = 6$ então $S(a) = 24$, assim $M_6(a) = 18$. Portanto $a = 9906$, $a = 9816$, $a = 9726$, $a = 9636$, $a = 9546$, $a = 8826$, $a = 8736$, $a = 8646$, $a = 8556$, $a = 7346$, $a = 7656$, ou $a = 6666$, e suas permutações, totalizando $142 = 9+24+24+12+24+12+24+12+12+24+12+1$ números Aritmético.

7. Caso $a_0 = 7$ então $S(a) = 28$, assim $M_7(a) = 21$. Portanto $a = 9937$, $a = 9847$, $a = 9757$, $a = 9667$, $a = 8857$, $a = 8767$ ou $a = 7777$, e suas permutações, totalizando $97 = 12+24+12+12+12+12+1$ números Aritmético.

8. Caso $a_0 = 8$ então $S(a) = 32$, assim $M_8(a) = 24$. Portanto $a = 9968$, $a = 9878$ ou $a = 8888$, e suas permutações, totalizando $25 = 12+12++1$ números Aritmético.

9. Caso $a_0 = 9$ então $S(a) = 32$, assim $M_9(a) = 27$, e $a = 9999$ é o número Aritmético.

3.5 Número Geométrico

De forma análoga aos números Aritméticos vamos apresentar alguns números Geométricos, utilizando os conteúdos preliminares para executar as respectivas contagens. Uma observação todos os algarismos de um número Geométricos dever ser diferentes de zero.

3.5.1 Números Geométricos com 3 algarismos

Dado o número Geométrico g com 3 algarismos, isto é, $g = a_2a_1a_0$ então $k = 2$ e $P(a) = {a_0}^3$, ou seja $1 \leq G_{a_0}(g) \leq 9$. Assim,

1. Para $a_0 = 1$ então $P(g) = 1$ e $G_2(g) = 1$, em que obtemos $g = 111$.

2. Se $a_0 = 2$ então $P(g) = 8$ e $G_2(g) = 4$, em que obtemos $g = 222$ ou $g = 412$.

3. Para $a_0 = 3$ temos $P(g) = 27$ e $G_3(g) = 9$, em que obtemos $g = 333$ ou $g = 913$.

4. Se $a_0 = 4$ então $P(g) = 64$ e $G_4(g) = 16$, em que obtemos $g = 444$ ou $g = 284$.

5. Para $a_0 = 6$ temos $P(g) = 216$ e $G_6(g) = 36$, em que obtemos $g = 666$ ou $g = 946$.

6. Para $a_0 = 5, 7, 8$ ou 9 temos, respectivamente, $g = 555$, $g = 777$, $g = 888$ ou $g = 999$.

Veja que o número $g = 412$ tem 6 permutações, o mesmo vale para os números $913, 284$ e 964. Assim, considerando todas as permutações, obtemos 33 números Geométricos com 3 algarismos. Dessa forma estendendo o problema 1.0.1 chegamos a conclusão que temos 33 números Geométricos com 3 algarismos

3.5.2 Números Geométricos com 4 algarismos

Dado g um número Geométrico com 4 algarismos, isto é, $g = a_3a_2a_1a_0$, e temos $k = 3$, $P(g) = {a_0}^4$, e $1 \leq G_{a_0}(g) \leq 9$.

1. Para $a_0 = 1$ então $P(g) = 1$ e $G_2(g) = 1$, em que obtemos $g = 1111$.
2. Para $a_0 = 2$ temos $P(g) = 16$, $G_2(g) = 8$, em que obtemos $g = 2222$, $g = 4122$ ou $g = 8112$.
3. Para a_0=3 então $P(g) = 81$, $G_3(g) = 27$, e obtemos $g = 3333$ ou $g = 9313$.
4. Para $a_0 = 4$ temos $P(g) = 256$, $G_4(g) = 64$, em que obtemos $g = 4444$, $g = 8814$ ou $g = 2844$.
5. Para a_0=6 temos $P(g) = 1296$, $G_6(g) = 216$, em que obtemos $g = 6666$, $g = 9466$ ou $g = 9386$.
6. Para $a_0 = 5, 7, 8$ ou 9 temos, respectivamente, $g = 5555$, $g = 7777$, $g = 8888$ ou $g = 9999$.

Veja que o número $g = 8112$ tem 12 permutações, o mesmo vale para os números $4122, 9313, 8814, 2844$ e 9466. Enquanto que o número $g = 9386$ tem 12 permutações. Assim, considerando as permutações, obtemos 105 números Geométricos com 4 algarismos.

Por meio dos números Geométricos apresentados logo acima e possível resolver as questões anunciadas na introdução considerando a classe de números Geométricos responda 1.0.1, 1.0.2. Encontre os três menores números Equilibrados com 4 algarismos e quantos são os números Equilibrados, com 4 algarismos, menores que 2014 ?. Para questão 1 temos ao todo 33 números Geométricos, para questão 2, os três menores números são $1111, 1128$ e 1224. respondendo a alternativa b temos 13 números menores que 2014.

4 Problemas

Nesta seção será destinada a alguns problemas relacionados aos assuntos abordados no trabalho, essas atividades foram retiradas de revistas nacionais, outros problemas apresentados pelo autor. Aqui utilizaremos o método de resolução do Polia(1995), tendo com o intuito abordar o assunto número Equilibrado e correlatos. No trabalho de Alvarenga(2008) sobre o raciocínio lógico e as ideias inesperadas na resolução de problemas matemáticos, a autora da enfase que:

> A resolução de um problema, para Polya (1995), envolve, primeiramente, a identificação do problema, ou seja, a compreensão do mesmo, depois a elaboração de um plano para solucioná-lo, posteriormente, a execução deste plano (neste momento há a mobilização de conhecimentos e estratégias) sendo que só então o aluno chegará à solução proposta. Por último ao retrospecto, à verificação de sua resposta e reflexão acerca dos procedimentos adotados para concluí-lo. (ALVARENGA, 2008, p. 24)

É perceptível que a autora tem uma visão de Polya em relação as etapas estabelecidas para resolução de problemas, Polya(1995) as etapas são divididas em 4 fases, para os estudantes terem exito na resolução de algum problema a serem seguidas por estudantes para a resolução de um problema são: Compreender o problema, mesclando apenas o essencial para sua resolução. Estabelecer um plano, tendo em mente os passos a serem seguidos para obtenção dos resultados. Executar o plano, pondo em prática tudo que se foi planejado na fase anterior. Fazer uma retrospectiva sobre os resultados encontrados tentando encontrar possíveis erros ou incoerências, com essa metodologia apresentamos a resolução seguindo os passos de Polya(1995).

4.1 Número Equilibrado

Problema 4.1.1. *Dado o numero* 35162133 *a partir desse número obtemos quantos números Aritméticos ?*

Resolução: O problema quer que determinemos a quantidade de permutações que conseguiremos a partir do número 35162133. Para a solução basta usarmos permutação com repetição. Assim $P_n^{n_1,n_2,\ldots,a_r} = \dfrac{n!}{n_1!,n_2!,\ldots,a_r!}$. Dessa forma, $P_8^{2,3} = \dfrac{8!}{2!3!} = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot2 = 3.360$

•

Problema 4.1.2. *A Média Aritmética de* 4 *algarismos de um número a Aritmético é* 3*. Se dois algarismos são iguais a* 5 *e* 3 *encontre o número Aritmético a.*

Resolução: O problema nos propõem encontrar um numero a sendo dado 2 de 4 algarismos, ele nos induz a utilizar de forma direta a definição, ou seja para solução; $M_{(a)} = \dfrac{S(a)-a_i}{k}$. Agora basta substituir os valores e desenvolver o problema e determinar o par ordenado que satisfaça as condições estabelecidas. Como, $\dfrac{x_1+x_2+3+5-3}{3} = 3$, obtém que $x_1+x_2 = 9-5$. Dessa forma encontramos a seguinte equação com duas variáveis, $x_1+x_2 = 4$. Para satisfazer a equação os pares inteiros positivos são os seguintes: $(4,0),(1,3)$ e $(2,2)$, Assim tem os números Aritmético, $4053, 1353, 2253$ e suas respectivas permutações. •

Problema 4.1.3. *Quantos números Aritméticos de* 3 *algarismos é divisível por* 18 *?*

Resolução: Para compreender este problema basta conhecer algumas propriedades relacionadas ao que é pedido, logo esses números devem ser par e a soma dos seus algarismos devem ser 9 ou 18, de inicio podemos representar um número de 3 algarismos da seguinte forma $a_0a_1a_2$. Assim podemos representá-los, $M_{(a)} = \dfrac{a_0+a_1+a_2-a_1}{2}$, desse modo temos, $a_1 = \dfrac{a_0+a_2}{2} = 2a_1 = a_0+a_2$. utilizando as propriedades referente aos números que são divisíveis por 18, ou seja, pares e multiplos. Temos 3 condições para valores possíveis, primeira condição $a_0+a_2 = 2a_1$, segunda $a_0+a_2 = 9-a_1$ ou $a_0+a_2 = 18-a_1$ e a última condição $a_0a_1a_2$ é par. Logo pelas condições apresentadas, $2a_1 = 9-a_1$ implica $3a_1 = 9$ Assim, $a_1 = 3$ $2a_1 = 18-a_1$ por conseguinte $3a_1 = 9$ logo, $a_1 = 6$. $a_0+a_2 = 2\cdot 3$ implica $a_0+a_2 = 6$. Desta maneira os valores que satisfaz as condições e a equação são os seguintes $234, 432, 630$. Consequentemente $a_0+a_2 = 2\cdot 6$, obtemos, $a_0+a_2 = 12$. Assim, os valores que satisfaz as condições e a equação são os seguintes $468, 864, 666$. Logo temos, 6 números Aritmético que são divisíveis por 18 revisando o desenvolvimento da questão de fato esta correta a resolução.

•

Problema 4.1.4. *Dado um número Aritmético a da forma $a = a_0a_1...a_9$. Sabendo que pelo menos* 9 *elementos a_i são distintos sendo* 5 *valores impar e* 4 *pares. Quantos números Aritmético são impares, quantos são pares e qual quantidade temos ao todo?*

Resolução: Dado um número $a = a_0a_1...a_9$ que um dos seus algarismo desconhecido ou seja temos que determinar quem é a, o outro ponto o enunciado informa que temos 9 algarismos distintos de 10, e por meio das permutações resolvermos essa segunda parte da questão. Primeiro vamos descobrir de qual número estamos tratando, dessa forma possível número $a = 123456789a_9$ com $1 \leq a_9 \leq 9$ agora basta usar a definição de número Aritmético para determinarmos a_9 . Sabemos que $M_{i(a)} = \dfrac{S(a)-a_i}{k}$, como a_i e desconhecido vamos considerar $k+1$, $a_i = \dfrac{S(a)}{k+1}$. Substituindo obtemos o seguinte, $a_i = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+a_9}{10} = \dfrac{45+a_9}{10}$. Como $1 \leq a_9 \leq 9$ varia entre esses valores e estamos a procura de um número inteiro, logo $a_9 = 5$, assim $a_i = 5$ então

$S(a) = 50$, dessa forma um número Aritmético é 1234567895.
Agora vamos abordar a segunda parte do problema que diz respeito a quantidade de números equilibrados impares e pares.

Temos que as permutações do número 1234567895 é par se último algarismo $a_9 \in \{2,4,6,8\}$, fixando vamos permutar os demais $\dfrac{9!}{2!} \cdot 4 = 725.760$ e para acharmos os números impares vamos fixar os seguintes valores para $a_9 \in \{1,3,5,7,9,\}$, basta agora permutar$\dfrac{9!}{2!} \cdot 4 = 725.760$. quando $a_9 = 5$ vamos ter os nove algarismos distintos $9! = 362.880$ logo temos 1.088.640. Assim, os números Aritmeticos. Pares são ao todo 725.760, impares são1.088.640 concluimos um total = 1.814.400 números Aritmeticos. Revisando a nossa resolução vemos que os dados são coerentes e que o plano foi bem executado, portanto a resposta obtida é válida. •

Problema 4.1.5. *Dado um numero $n = 98366$, temos $g = 10n + m$ é um número Geométrico, determine o número m, para $1 \leq m \leq 9$.*

Resolução: Nesta questão vamos procurar um m que esta entre $1 \leq m \leq 9$ de tal forma que g seja um número equilibrado, vamos usar uma a seguinte proposição, "dado um número $n = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ com $k \geq 1$ algarismos, considere $s = \frac{S(b)}{k}$ e $m = P(n)^{1/k}$. Se $0 \neq m \in D$ então $g = 10 \cdot n + m$ é um número Geométrico com $k+1$ algarismos ". então vamos substituir os valores dados a expressão. $m = [P(n)]^{1/(k)} = P(9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6)^{1/5} = 7.776^{1/5} = 6$, Assim obtemos $m = 6$. Dessa forma o Número Geometrico g procurado é $983660 + 6 = 983666$ •

Problema 4.1.6. *Quantos números Geométricos com 5 algarismo é múltiplo de 3 tendo pelo menos um dos seus algarismos igual a 6 ?*

Resolução: Todo número Geométrico que pode ser escrito como $3q$, como um dos seus algarismo igual a 6 ira satisfazer o que se pede. Vamos considerar $g = a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$ com $a_i = 6$, $0 \leq i \leq 4$. Utilizando algumas propriedades de potência podemos afirma que, o número Geométrico é 6 e assim podemos determinar todos os números que satisfaz o enunciado. Aplicando o produto de algarismos em g temos $P(g) = m$ uma das propriedades apresentadas podemos escrever m como a_j^{k+1} ou seja, temos $6^5 = 7776$, ou seja temos,

$$G_6(g) = \left[\frac{1}{6}(a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1)\right]^{1/4}$$
$$= \left[\frac{1}{6}(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6)\right]^{1/4} .$$

Temos que, $(a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1) = 1296^{1/4} = 6$ agora por testagem vamos encontrar os valores que satisfazem o número Geométrico $a_1 a_2 a_3 a_4$:
1^0 caso temos $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$
2^0 caso temos $9 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 4 = 1296$

3^0 caso temos $6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 = 1296$
4^0 caso temos $9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 6 = 1296$

Desse modo temos os seguintes números geométricos $66666, 94666, 99446, 98366$ e suas respetivas permutações. $1+20+30+60 = 111$ ou seja temos ao todo 111 números múltiplos de 3 com 5 algarismos •

Problema 4.1.7. *Dado um número g com seus $k+1 = 4$, e tendo g_0 como número Geométrico igual* 3*, encontre* 2 *números Geométricos.*

Resolução: Com as informações dadas vamos procurar números Geométricos tendo sua Média igual a 3, por meio da definição que nos permite $P(g) = g_0^{k+1}$ logo podemos encontrar dois números que podem satisfazer as condições dadas. Veja bem temos $k+1 = 4$ e $g_0 = 3$ logo temos $3^4 = 81$ assim temos $3a_1a_2a_4 = 81$ temos $(3,3,3), (9,1,3)$ assim, 3333 e 9133 de fato ambos são Geométricos e satisfazem o que se pede. •

4.2 Questões da OBMEP/OBM

Agora listaremos algumas questões que na resolução utilizada uma tecnica aqui apresentada.

Problema 4.2.1. *(OBMEP 2010) O número da casa de Júlia tem exatamente três algarismos, cuja soma é* 24 *. Encontre todos os possíveis números da casa de Júlia, em cada uma das situações a seguir:*
a) Os três algarismos são iguais.
b) Os algarismos são todos diferentes.
c) Apenas dois algarismos são iguais.

Resolução: Para resolver os intem acima vamos utilizar por meio da testagem, como e referido que a soma dos 3 algarismos deve ser igual a 24 partimos que dado $x = x_0x_1x_2 = 24$. Para o primero item temos, $8+8+8 = 24$, ou seja, $s(888) = 24$. para todos os algarismos distintos $9+8+7 = 24$ temos, $s(987) = 24$. Quando temos apenas dois algarismos iguais $9+9+6 = 24$, dessa forma $s(996) = 24$. •

Problema 4.2.2. *(OBMEP 2008) Quantos números de 4 algarismos existem cuja soma de seus algarismos é maior do que* 34 *?*

Resolução: O maior número de 4 algarismos é 9999, cuja soma dos seus algarismos é $4 \cdot 9 = 36$. Os números de 4 algarismos cuja soma dos seus algarismos é 35 são:

$$8999; 9899; 9989; 9998.$$

Logo, temos 5 números de 4 algarismos com soma dos seus algarismos maior do que 34. •

Problema 4.2.3. *(OBMEP 2008) Quantos números inteiros entre* 10 *e* 999 *tem a soma de seus algarismos igual a* 9 *?*

Resolução: Veja que: (a) entre 10 a 100 são os multiplos de 9 os seguintes números $18,27,36,45,54,63,72,81,90$; do (b) entre 100 ao 200 são, $108,117,126,135,144,153,162,171,180$, são 9 ao todo. (c) entre 200 ao 300 Temos $207,216,225,234,243,252,261,270$, são 8. (d) entre 300 ao 400 $306,315,324,333,342,351,360$, são 7. (e) entre 400 ao 500 $405,414,423,432,441,450$, são 6. (f) entre 500 ao 600 $504,513,522,531,540$, são 5. (g) entre 600 ao 700 $603,612,621,630$, são 4. (h) entre 700 ao 800 $702,711,720$, são 3. (i) entre 800 ao 900 $801,810$, são 2 e por fim, (j) entre 900 ao 999, um 900.

Estes números são múltiplos de 9, a soma dos algarismos de cada número é 9 $9+9+8+7+6+5+4+3+2+1=54$ números.

•

Problema 4.2.4. *(OBMEP 2018) Qual a Média de todos os números de* 5 *algarismos que podem ser formados usando cada um dos dígitos* $1,3,5,7$ *e* 8 *exatamente uma vez?*

Resolução: Fixado um algarismo da lista, ele irá aparecer em uma dada ordem em outros $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ números. Cada vez que um número aparece em uma dada ordem, a sua contribuição na soma total é igual ao seu produto pela potência de 10 associada àquela ordem. Por exemplo, nos números 13578 e 13857, a contribuição do 5 é $5\cdot 102$ e $5\cdot 101$, respectivamente. Como todo número aparece igual número de vezes em cada ordem, a contribuição de cada algarismo na soma total é igual ao seu produto por $24\cdot(10^4+10^3+10^2+10^1+10^0)=24\cdot 11111$. Além disso, a quantidade total de números é $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$. Portanto, a média é

$$\frac{(1+3+5+7+8)\cdot 24\cdot 11111}{120}=53332,8\ .$$

•

Problema 4.2.5. *(OBMPE 2007) O contrário de um número de dois algarismos, ambos diferentes de zero, é o número obtido trocando-se a ordem de seus algarismos. Por exemplo, o contrário de* 25 *é 52 e o contrário de* 79 *é* 97*. Qual dos números abaixo não é a soma de um contrário de dois algarismos com seu contrário?*

Resolução: Seja n um número de dois algarismos, sendo a seu algarismo das dezenas e b o das unidades; então $n=10a+b$. Se a e b são ambos diferentes de zero, o contrário de n é $10b+a$. Desse modo, a soma de n e de seu contrário é. $(10a+b)+(10b+a)=11a+11b=11(a+b)$ e portanto a soma de um número com seu contrário é sempre um múltiplo de 11. Basta agora notar que todas as opções são múltiplos de 11, com a exceção de 181.

•

Problema 4.2.6. *(OBMEP 2008) Os* 535 *alunos e professores de uma escola fizeram um passeio de ônibus. Os ônibus, com capacidade para* 46 *passageiros cada, ficaram lotados. Em cada ônibus havia um ou dois professores. Em quantos ônibus havia dois professores?*

Resolução: Como $535 = 11 \cdot 46 + 29$, vemos que 11 ônibus são insuficientes para o passeio. Por outro lado, de $13 \cdot 46 = 598$ vemos que se o número de ônibus fosse maior ou igual a 13 o número de professores seria no mínimo $598 - 535 = 63$, o que não é possível pois em cada ônibus há no máximo 2 professores. Logo o passeio foi feito com 12 ônibus e o número de professores é $12 \cdot 46 - 535 = 17$. Como cada ônibus tem 1 ou 2 professores e 17 dividido por 12 tem quociente 1 e resto 5, concluímos que o número de ônibus com 2 professores é 5 •

Problema 4.2.7. *(OBMEP 2010) Joana tem 10 pares diferentes de meias, guardados dentro de uma gaveta. Três meias estão furadas, sendo duas do mesmo par. Quantas meias ela deve tirar da gaveta, uma de cada vez e sem olhar, para ter certeza de que entre elas haja um par sem defeito?*

Resolução: Seja n o menor número de meias que a Joana pode retirar da gaveta com a certeza de que entre as meias retiradas haja um par sem defeito. Então $n-1$ é o maior número de meias que podem ser retiradas de tal forma que, entre elas, qualquer par seja defeituoso. O pior dos casos ocorre quando se retiram os dois pares defeituosos (o par de meias furadas e o par com uma das meias furada) e uma meia de cada um dos outros oito pares, num total de 12 meias. Portanto $n-1 = 12$ e então $n = 13$.

•

Problema 4.2.8. *(OBMEP 2011) Com os algarismos* $1, 4, 6$ *e* 8 *pode-se formar vários números de três algarismos distintos. Qual é a soma de todos esses números?*

Resolução: Com os números $1, 4, 6$ e 8 podem-se formar $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ números de três algarismos distintos, pois temos 4 possibilidades para escolher a centena, depois 3 possibilidades para escolher a dezena e por fim 2 possibilidades para escolher a unidade. Nas unidades desses números irão aparecer seis vezes cada um dos algarismos $6, 4, 2$ e 1, pois cada um deles aparece o mesmo número de vezes entre os 24 números e $24\ 4 = 6$; o mesmo irá ocorrer nas dezenas e nas centenas. Como $6 \cdot (8 + 6 + 4 + 1) = 114$, a soma desses 24 números será $114 + 10 \cdot 114 + 100 \cdot 114 = 111 \cdot 114 = 12654$. •

Problema 4.2.9. *(OBMEP 2014) Gustavo possui certa quantidade de moedas de* $1, 10, 25$ *e* 50 *centavos, tendo pelo menos uma de cada valor. É impossível combiná-las de modo a obter exatamente* 1 *real. Qual é o maior valor total possível para suas moedas?*

Resolução: Como Gustavo possui pelo menos uma moeda de cada tipo, ele não pode ter 2 moedas de 50 centavos, senão formaria 1 real. Ele também não pode ter 2 moedas de 25 centavos. Com a moeda de 50 centavos e com uma moeda de 25 centavos ele também não pode formar 1 real. Concluímos assim, que Gustavo possui uma moeda de 50 centavos e uma moeda de 25 centavos. Gustavo não pode ter 5 moedas de 10 centavos, senão junto com a moeda de 50 centavos ele formaria 1 real. Para maximizar, podemos supor que ele tem, então, quatro moedas de 10 centavos. Com elas e com as moedas de 50 e 25 centavos ele não consegue formar 1 real. Por fim, ele não pode ter cinco moedas de 1 centavo, pois se tivesse, formaria 1 real juntando a elas a moeda de 50 centavos com a de 25 centavos e mais duas de 10 centavos. Assim, Gustavo deve ter, no máximo, quatro moedas de 1 centavo. Logo, o maior valor total possível que Gustavo pode ter é $50+25+4\cdot 10+4\cdot 1=119$ centavos, ou seja, $R1,19$. •

Problema 4.2.10. *(OBM-2004) Numa prova para uma sala com* 30 *alunos, a Média Aritmética das* 10 *piores notas é* 3 *e a Média aritmética das* 10 *melhores notas é* 9*. O menor valor possível e o maior valor possível para a Média da sala são, respectivamente:*

Resolução: Temos M piores $M_p = \dfrac{(n_1+n_2+...+n_10)}{10} = 3$ $(n_1+n_2+...+n_10) = 30$ e as M melhores é $m_m = \dfrac{(n_{21}+n_{22}+...n_{30})}{10} = 9$, $(n_{21}+n_{22}+\cdots n_{30}) = 90$. Portanto, Média Máxima, quando $(n_{11}+n_{12}+\cdots+n_{20}) = 90$. M máx $= \dfrac{(2\cdot 90+30)}{30} = 7$ Média Mínima, quando
$(n_{11}+n_{12}+...+n_{20}) = 30$. M mín $= \dfrac{(2\cdot 30+90)}{30} = 5$ •

Problema 4.2.11. *(OBMEP-2006) Qual é a soma dos algarismos* $1+10+10^2+10^3+ .... +10^{2004}+10^{2005}+10^{2006}$ *do número ?*

Resolução: Perceba $1+10=11$ então $1+10+10^2=111$. Se o somatório termina em 10^n, a soma dos algarismos vale $1+1+...+1, n+1$ vezes, assim, para $1+10^2+10^3+...+10^{2006}$,será um número formado por 2007 números 1, logo, a sua soma valerá 2007.

•

Problema 4.2.12. *(OBM-1997) O número* N *tem três algarismos. O produto dos algarismos de* N *é* 126 *e a soma dos dois últimos algarismos de* N *é* 11*. O algarismo das centenas de* N *é:*

Resolução: Sendo x, y e z os três algarismos, o enunciado nos dá que $x\cdot y\cdot z=126$, ou fatorando $x\cdot y\cdot z=2\cdot 9\cdot 7$. Como é dito que $y+z=11$ concluímos que y e z só podem ser 9 e 2, sobrando para x (algarismo das centenas) o valor 7 •

Problema 4.2.13. *(OBMEP 2015) Luciano queria calcular a Média Aritmética dos números naturais de* 1 *a* 15*. Ao calcular a soma desses números, ele esqueceu de somar dois números consecutivos. Após dividir a soma dos treze números por* 15*, obteve* 7 *como resultado. Qual é o produto dos números que Luciano esqueceu de somar?*

Resolução: $1+2+3+4+\cdots+14+15=120$. Como esqueceu de 2 números ficaram 13 números $(15-2=13)$ e a soma dos 13 números e N logo $\frac{N}{15}=7N=7\cdot 15=105$ Soma dos 13 números é 105, Desse modo calculamos $120-105=15$ números $a+b=15$ (soma dos 2 números esquecidos). Os 2 números cuja soma é 15 sendo consecutivos será 7 e 8, ou seja, $a=7, b=8$. Portanto produto será $7\cdot 8=56$ •

Problema 4.2.14. *(OBMEP 2018) A professora Elisa aplicou uma prova para cinco alunos.A nota de um deles foi* $8,0$*,e a Média das notas dos outros* 4 *alunos foi* $7,0$*.Qual foi a Média das notas desses cinco alunos?*

Resolução: A nota Média dos quatro alunos é dada pela soma das quatro notas dividida por 4. Logo, como a Média é $7,0$, a soma das quatro notas é $4\cdot 7=28$.Assim, a soma das cinco notas é $28+8=36$, o que nos fornece Média $36/5=7,2$. •

Problema 4.2.15. *(OBM 2010) Sônia calculou a Média aritmética de dois diferentes números de dois dígitos e obteve 98. Qual a diferença entre esses números ?*

Resolução: Desse modo, $98+x$ e $98-x$. números com 2 dígitos portanto menores que 100. Desse modo $98+x<100$ trabalhando a desigualdade $x<100-98$ então $x<2$ substituindo obtemos $(98+1)-(98-1)$ assim,$99-97=2$

•

Problema 4.2.16. *(OBM 2016)Uma permutação* $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{1-n},a_n)$ *dos números do conjunto* $1,2,3,...,n$ *é legal se não existem dois termos consecutivos cuja soma é um múltiplo de* 3 *e se os dois vizinhos de um termo qualquer não diferem por um múltiplo de* 3*. Por exemplo,* $(4,6,2,5,3,1)$ *é uma permutação legal dos números do conjunto* $1,2,3,4,5,6$*. Entretanto,* $(1,2,5,3,4,6)$ *não é uma permutação legal do mesmo conjunto, pois os números* 1 *e* 2 *são vizinhos e sua soma é um múltiplo de* 3*. Além disso, outra razão para ela não ser legal, é que os vizinhos do número* 4*, que são o* 3 *e o* 6*, diferem por um múltiplo de* 3*.*

a) Determine o número de permutações legais do conjunto $1,2,3,4,5,6$*.*

b) Determine o número de permutações legais do conjunto $1,2,3,...,2016$*.*

Resolução: Para resolvermos o problema vamos utilizar somente os resíduos dos números do conjunto na divisão por 3. Mostraremos que é possível determinar com base nos resíduos a quantidade de permutações legais. Se dispomos do dígito 0, então o próximo dígito pode ser 1 ou 2, mas essa será a única escolha possível que poderemos fazer, de fato, determinado o segundo dígito a sequência está definida.

Se for o 1 o próximo dígito não pode ser 2, já que a soma resultará num múltiplo de 3, também não pode ser 0, já que a diferença de dois vizinhos de um termo também não pode ser divisível por 3, logo só pode ser novamente 1 e o processo se repete. Da mesma forma se escolhermos o 2. Isso acontece pois, suponha que tenhamos determinado os dois últimos dígitos da sequência e esses sejam a e b, então o próximo dígito não pode ser $3-b$ (que somado com b resulta num múltiplo de 3) nem a (que difere zero de a, ou seja, temos uma diferença divisível por 3), logo há dois casos a considerar: $-a$ incongruente a $3-b$, então não temos escolha e o número está determinado, como queremos demonstrar,a congruente a $3-b$, o que é um absurdo! Note que a e b já são termos definidos da sequência então sua soma não pode ser um múltiplo de 3, exatamente o que acontece quando $a = 3-b(mod3)$.

Concluímos que, escolhidos os dois primeiros dígitos, só existe uma forma fixa de termos uma permutação legal, como só estamos analisando os resíduos na divisão por 3 até agora, então existem seis formas de escolhermos os dois primeiros dígitos (não podemos escolhê-los somando um múltiplo de 3, o que elimina as escolhas $0-0, 1-2, 2-1$) e consequentemente seis permutações legais possíveis (olhando os restos módulo 3). Temos as seguintes possibilidades de sequências de 6 resíduos consecutivos. (veja que há a mesma quantidade de restos de cada tipo) $011022, 110220, 102201, 022011, 220110, 201102$.

Para determinar as permutações legais com base nos números do conjunto basta analisarmos a permutação dos números com mesmo resíduo na divisão por 3. A nossa análise anterior garantiu por meio da marcação dos resíduos como determinar se uma permutação é legal, a partir disso podemos determinar a quantidade total de permutações contando as possibilidades de trocarmos todos números com resíduo 1 de "lugar", assim como os de resíduo 2 e 3, supondo que a quantidade de números do conjunto seja $6k$ a quantidade de permutações dentro das posições de um mesmo resíduo será $2k!$, logo determinada uma permutação legal com base nos resíduos há $(2k!)3$ formas de preenchê-la com os números do conjunto, como há seis permutações legais possíveis dos resíduos, então um conjunto com 6k elementos tem um total de $6 \cdot (2k!)3$ permutações legais. A partir disso resolvemos ambos itens:

$(a)1, 2, 3, 4, 5, 6$ tem 6 elementos, logo $6 \cdot (2!)3 = 48$ permutações legais.

$(b)1, 2, 3, ..., 2016$ tem 2016 elementos, logo $6 \cdot (672!)3$ permutações legais.

•

Problema 4.2.17. *(OBM 2016) As permutaçao da palavra Brasil foram listada em ordem alfabética,como se fossem palavras de seis letras em um dicionário.A* $361°$ *palavras nessa lista é., a)Brisal*
b)Sirbal
c)Rasbil
d)Sabril
e)Labirs

Resolução: A palavra BRASIL tem 6 letras diferente. Fixando a primeira letra à esquerda, restam 5 letras. O número de palavras que se obtém permutando-se essas 5 letras é $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$. Portanto, após fixar à esquerda as letras A, B e I, teremos listado $3\cdot120 = 360$ palavras. Obedecendo à ordem alfabética, a próxima letra a ser fixada é L; escrevendo as demais letras em ordem alfabética, teremos a palavra LABIRS. •

Problema 4.2.18. *(OBM 1995) O número* $26! = 1.2.3.4....25.26!$ *termina por uma fileira de zeros. Seja N o inteiro que se obtêm ao removermos todos os zeros do final de* $26!$ *. O maior inteiro k para o qual 12^k é um divisor de N é:*

Resolução: Sabemos que, $26! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20\cdot21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot25\cdot26$. Como $2\cdot5 = 10$ temos 1 zero, $4\cdot25 = 100$ temos 2 zeros, $6\cdot15 = 90 = 9\cdot10$ obtemos 1 zero e sobra 9 10 temos 1 zero $20 = 2\cdot10$ tendo assim, 1 zero e sobra 2. São ao todo 6 zeros no final. Vai sobrar $N = 2\cdot9\cdot3\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot25\cdot26$. Dessa forma, $N = 2\cdot3^2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot3^2\cdot11\cdot2^2\cdot3\cdot13\cdot2\cdot7\cdot24\cdot17\cdot2\cdot3^2\cdot19\cdot2\cdot11\cdot23\cdot2^3\cdot3\cdot2\cdot13 = N = 2^{17}\cdot38\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23$. $N/12 = 2^{17}\cdot38\cdot7^2\cdot11^2\cdot13^2\cdot17\cdot19\cdot23/12$ então $N = 2^{17}\cdot38/2^2\cdot3$ assim, $N = 29\cdot28\cdot38/2^2\cdot3$. Em que obtemos $k = 8$ •

Problema 4.2.19. *(OBM-1997) Quantos números de* 3 *algarismos existem cuja soma dos algarismos é* 25*?*

Resolução: Se nenhum dos três algarismos for 9, teremos a maior soma dos algarismos quando $888, s(888) = (8+8+8 = 24)$, portanto, com certeza um dos algarismos deverá ser 9. Com este pensamente teremos os números: $997, 979, 799, 988, 898$ e 889 •

5 CONSIDERAÇÕES

Nos Bancos de questões da OBMEP e OBM tem varias definições e conteúdos que não são trabalhados de forma direta no ensino fundamental, tornando um ótimo material para retirar conceitos, fazer e testar hipóteses ou até elaborar conjeturas .

Ao londo deste trabalho, procuramos aprofundar estudo da classe de números Equilibrados utilizando conceitos da Analise combinatória e as Médias e sua desigualdade, possibilitando sistematizar todo o conhecimento necessário para o desenvolvimento. Com o decorrer desse trabalho tive um grande desenvolvimento pessoal e intelectual, me proporcionando um amadurecimento como um construtor de conhecimento, gerando indagações ou perguntas e respostas com resoluções.

Motivados por problemas apresentados nos Banco de Questões da OBMEP, fizemos um estudo acerca dos números (Aritméticos e Geométricos). Ao longo desta pesquisa, procuramos aprofundar os estudos acerca da definição disponibilizada da classe de números Equilibrados Aritméticos, foi possível analisar suas propriedades e características, possibilitando uma extensão . A proposta deste trabalho é uma leitura que não seja cansativa, mas sim atraente e dinâmica com um ar desafiador, que nos leitores despertem o interesse de dar continuidade aos estudos referentes aos números Equilibrados, assim podendo estender discussões futuras referente esta classe de números, parte deste trabalho encontra-se em Costa e Santos (2020).

Portanto, esperamos que a produção atinja os objetivos estabelecidos, que o trabalho seja relevante no campo acadêmico. Destacamos, Como proposta de continuidade da pesquisa, podemos estender as classes trabalhadas para a Médias Harmônicas possibilitando resolver as questões apresentadas no primeiro capitulo para os números Equilibrados Harmônicos.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, R. C. M. O **Raciocínio Lógico e a Criatividade na Resolução de Problemas Matemáticos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação), Marília: Universidade Estadual Paulista, 2008.

CARVALHO, Fernando S.; COSTA, Eudes A. **Permutando algarismos dos números**. SBM214 Eureka!, v. 39, p. 27-36, 20

CARVALHO, Paulo C. P.; MORGADO, A.C O. **Matemática discreta**. Coleção PROF-MAT. Rio 216 de Janeiro: SBM, 2015.

COSTA, Eudes A. ; SANTOS, Bruno C. **Número Equilibrado pela Média Aritmética**. Revista 218 da Olimpíada, UFG-IME, n. 15, p. 23-30, 2020

COSTA, Eudes A.; SANTOS, Douglas C. **Números Repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas**. Revista Professor de Matemática, SBM,v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020.

FILHO, Kleber S. **Combinatória na OBMEP: Uma Análise de Questões da Primeira Fase do Nível 3**.2020. Dissertação de mestrado-PROFMAT,Universidade Federal Rural de Pernambuco-UFRPE, Pernambuco,2020.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elemrntar 5**, São Paulo Edição., 1977

LIMA, Elon L. e outros. **Meu professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

POLYA, G. George, 1887-**A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método matemático**/G,Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo,-2, reimpr - Rio de Janeiro: Interciência,1995

SILVA, Valdir V. Números: **Construção e Propriedades**. Editora UFG. Goiânia. 2003.

SILVA, Mariana F. T. **Medias, Desigualdade das Médias e a Resolução de Problemas**.2009.Dissertação de Mestrado-PROFMAT-UFES-Universidade Federal Espirito Santo,2009.

Silva, Vilmar Costa . **Uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas usando a resolução de problemas mediada pelo GeoGebra.** / Vilmar Costa Silva. – Arraias, TO, 2020

Silva, Francisco Felipe Gomes da. **Um Estudo Das Questões da OBMEP Sobre Análise Combinatória** / Francisco Felipe Gomes da Silva. - 2020.