UNIVERSIDADE FEDERAL DO NORTE DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DÁFFNY LORRANY RODRIGUES DOS SANTOS

LÓGICA CLÁSSICA E SUA APLICABILIDADE EM RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Araguaína

2022

DÁFFNY LORRANY RODRIGUES DOS SANTOS

LÓGICA CLÁSSICA E SUA APLICABILIDADE EM RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins-Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Araguaína

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S2371 Santos, Dáffny Lorrany Rodrigues dos.
LÓGICA CLÁSSICA E SUA APLICABILIDADE EM RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS. / Dáffny Lorrany Rodrigues dos Santos. – Araguaína, TO, 2022.
40 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Araguaína - Curso de Matemática, 2022.
Orientadora : Renata Alves da Silva

1. Lógica Formal. 2. Raciocínio Lógico. 3. Demonstrações matemáticas. 4. Tabelas-verdades . I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

DÁFFNY LORRANY RODRIGUES DOS SANTOS

LÓGICA CLÁSSICA E SUA APLICABILIDADE EM RESOLVER PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Norte do Tocantins-Campus Universitário de Araguaína, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Renata Alves da Silva

Data de aprovação: _____ / _____ / ___

Banca Examinadora

____
Profa. Dra. Renata Alves da Silva UFNT - Orientadora

____
Prof. Dr. José Carlos de Oliveira Junior, UFNT – Avaliador

____
Prof. Dr. Rogerio dos Santos Carneiro, UFNT– Avaliador

Dedico este trabalho à toda minha família e a todos que me apoiaram para a realização deste sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois nada seria sem as bênçãos que em mim foram depositadas.

À minha orientadora, Prof. Dra. Renata Alves da Silva, por ter aceitado me orientar durante a escrita deste trabalho, pelos conhecimentos compartilhados, pelos incentivos, explicações e apoio para a conclusão desta tão importante etapa da minha formação.

À minha família, que sempre me motivou a continuar, em especial minha mãe Sandra Maria Rodrigues Macedo, ao meu padrasto José Goianildo Silva, minha irmã Dávylla Rany Rodrigues dos Santos, minha tia Regina Rodrigues Macedo e seu esposo Raimundo Vieira, ao meu pai Manoel Gomes dos Santos e família, à tia Marcia Rodrigues Lima e família, Luciene Rodrigues Lima (kita), à minha vó Margarida Rodrigues Macedo, também à Kellen Kristina Rodrigues de Morais, Maria Silva da Luz, Maria Vitoria Rodrigues de Sousa, Ana Rosa Pereira Silva, à Vagner Mendes dos santos, juntamente com sua esposa, Ozinalva Pereira da Siva Santos e filhos, que no início desse sonho, estenderam as mãos e me acolheram em sua casa. Aos amigos que conheci nessa trajetória, Istefane Lopes da Rocha, Carolina Alves Barbosa, Ivonei Rodrigues, Luis Felipe Lima Guimarães, Jecilene Silva Aguiar, Paulo de Tarcio Rodrigues Marques e família, Maria Aparecida Pereira da Silva, Maiza Nascimento Silva, Cassiane Nascimento Silva, Emerson de Sousa Moraes, Jeruzalem Martins de Sá, Micaele, Matheus Costa Amorim.

Agradeço ao professor Sinval que me orientou durante minha participação no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação a Docência (PIBID), período a que devo grande participação na minha formação profissional e pessoal, agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio e incentivo que proporcionaram além do contato com a escola e alunos, pagar custos e despesas ao longo do curso.

Aos professores que tive a honra e oportunidade de conhecer no curso, em especial: Adriano Fonseca, Álvaro Yucra, Deive Alves, Douglas Fonseca, Elisângela, Fernanda Vidal, Freud Romão, José Carlos, Mateus Lobo, Marcos, Rogério, Raimundo Cavalcante, Renata Alves, Sinval Oliveira, Yukiko.

Aos colegas de classe sempre dispostos a ajudar, para mim, sem dúvidas, a turma 2017.1 sempre será a melhor turma, composta por: Atalia, Bruna Pires, Daniel Alves, Daniel Carlos, Gabriela, Guilherme, Huan, Janaina, João Paulo, Josieldo Carajá, Ludemilla, Maysa

Dias, Maiza Silva, Pablo Henrique e Pedro Dark. Não posso esquecer das amigas que tive oportunidade de conhecer na faculdade e se tornou família, em especial meu quinteto, Djane da Silva Andrade, Erica Cristina da Silva Andrade, Fernanda Campelo Tavares e Sarah Miranda Barbosa.

RESUMO

O objetivo desta monografia é trazer uma discussão sobre tabelas verdades como ferramentas para validar proposições compostas e também apresentar demonstrações utilizando essas ferramentas. Ao longo dos anos, a lógica foi se desenvolvendo, se formalizando e assim tornando-se uma linguagem precisa a qual conhecemos nos dias atuais. A lógica formal descrita por Aristóteles está ligada como uma ferramenta que auxilia na análise de raciocínios válidos, não válidos e também na tomada de decisões a qual encadeia ideias para chegar a conclusões de maneira satisfatória. Ela é encontrada na Matemática (nas demonstrações, nos argumentos dedutivos, etc). No estudo da lógica formal, também conhecida como lógica matemática, uma proposição é uma declaração afirmativa à qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso, mas não ambos. Assim, quando conectamos duas ou mais proposições utilizamos operadores lógicos que são: não ($\sim$); e ($\wedge$); ou ($\vee$); se, então ($\rightarrow$); se, e somente ($\leftrightarrow$), para formar uma só sentença, com isso, é utilizado a tabela verdade para ajudar a organizar e determinar se o resultado da proposição é verdadeiro ou falso. Mostramos que é possível chegar a conclusões verdadeiras utilizando a lógica formal para provar demosntrações matemáticas.

Palavras-chaves: Lógica formal. Raciocínio Lógico. Demonstrações matemáticas. Tabelas-Verdades.

ABSTRACT

The objective of this monograph is to bring a discussion about truth tables as tools to validate compound propositions and also to present demonstrations using these tools. Over time, logic has been used over the years, formalizing itself and qualifying itself as a language today. A logical tool described by Aristotle is reliable as a valid analysis and also what is a valid decision in a decision in which the valid methodology is a choice for a valid decision. It is found in mathematics (in statements, in deductive arguments, etc.). In the study of formal logic, also known as mathematical logic, a proposition is an affirmative statement to which one can assign either a true or a false value, but not both. Thus, when we connect two or more propositions we use logical operators which are: no (∼); and (∧) ; or (∨) ; if, then (→); if, and only (↔), to form a single sentence, with this, the truth table is used to help organize and determine whether the result of the proposition is true or false. We show that it is possible to reach true conclusions using formal logic to prove mathematical proofs.

Keywords: Formal logic. Logical Reasoning. Mathematical proofs. Truth-Tables.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Na matemática, somos desafiados a todo instante a identificar se uma dada afirmação é verdadeira ou falsa. Esse desafio se estende também ao nosso cotidiano. Muitas vezes, a nossa intuição nos leva a acreditar que certas afirmações (sentenças) são verdadeiras, sem que possamos verificar de forma precisa sua veracidade. E se nossa intuição falhar? Diante disso, há a necessidade de nos apoiar em uma linguagem mais precisa e rigorosa que nos possibilite garantir quando uma sentença (seja ela matemática ou não) é verdadeira ou falsa.

“Lógica é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência, tendo o objetivo principal de determinar em que condições certas “coisas” se seguem (são consequência), ou não, de outras” (MORTARI, 2001, p. 2). Portanto, a lógica tem como papel principal analisar sentenças sejam elas matemáticas ou não, e, a partir de certas deduções, concluir se é verdadeiro ou falso.

Na prática, destaca-se a importância da lógica no que diz respeito, principalmente, à organização do pensamento com a finalidade de se chegar a uma conclusão de uma determinada problemática. Segundo (SOARES, 2004, p. 2): “o raciocínio ou argumentação é um tipo de operação do pensamento que consiste em encadear logicamente ideias para tirar uma conclusão”.

Dentre os diferentes tipos de lógica, destacamos aqui no nosso trabalho a Lógica Clássica (também conhecida como Lógica Formal ou Lógica Matemática), a qual possui os seguintes princípios: Princípio da não-contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo e o Princípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa. Dada uma argumentação, verifica-se sempre uma dessas possibilidades e nunca uma terceira.

De acordo com (IEZZI, 1977, p. 1-A) “chama-se de proposição ou sentença toda oração declarativa que pode ser classificada de verdadeira ou falsa”. Ele menciona ainda que toda proposição apresenta três características obrigatórias, são elas: como é uma oração, tem sujeito e predicado; é declarativa e nunca exclamativa e nem interrogativa e tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeira (V) ou é falsa (F). A seguir, vejam alguns exemplos de proposições:

- A terra é plana;
- Seno (90°) = 0;
- O sol é azul.

Dadas duas ou mais proposições podemos relacioná-las através do que chamamos de conectivos na teoria. Segundo (CUNHA, 2008, p. 19): “Conectivos são as palavras que usamos para formar novas proposições a partir de outras. Os principais conectivos são as palavras (ou termos): “e”; “ou”; “se, ... então”; e “... se, e somente se ...”. Em geral, um conectivo liga duas ou mais proposições. Vejamos alguns exemplos:

- O número 10 é par e o número 7 é ímpar;
- Kaio tem uma bicicleta ou uma moto;
- Um triângulo é retângulo se, e somente se, ele possui um ângulo de 90°.

Dessa forma, as proposições e conectivos serão elementos essenciais no estudo da lógica matemática.

Diante do que foi exposto, este trabalho visa apresentar a teoria da lógica matemática através da sua linguagem simbólica, dando ênfase no uso de tabelas verdades como meio facilitador na determinação de valores lógicos. O trabalho tem como objetivo principal responder a seguinte questão norteadora: Como utilizar da linguagem simbólica para compreender algumas formas de demonstrações matemáticas?

CAPÍTULO 2: CONTEXTO HISTÓRICO SOBRE A LÓGICA MATEMÁTICA

Nesse capítulo, apresentaremos um breve panorama histórico sobre a lógica como parte da filosofia que estuda o pensamento (deduções, induções, hipóteses, inferências, argumentos, etc.) e das operações intelectuais que validam afirmações já existentes, também vamos relacionar a teoria de lógica como subárea da matemática que explora as aplicações da lógica para a matemática.

A história da lógica teve seu início na antiga Grécia com as concepções de alguns filósofos, entre eles Sócrates e Platão. No entanto, foi somente no século IV que se obteve os primeiros trabalhos escritos sobre a teoria de lógica, os quais foram feitos por Aristóteles (384-322 a. C.). Esses primeiros trabalhos sobre lógica são conhecidos como Organon (Conjunto dos escritos lógicos de Aristóteles) que são caracterizados por um conjunto de 6 escritos sobre a arte de filosofar, a arte de exercitar a filosofia.

Figura 1- Aristóteles (384-322 a. C.)

Fonte: PORFíRIO

Aristóteles nasceu na cidade de Estagira, pertencente ao Império Macedônico, no ano de 384 a.C., é considerado um dos mais importantes filósofos da Grécia. O Estagirita deu várias contribuições em diversas áreas, dentre elas: a biologia, economia, filosofia, física e outras. Mas foi no estudo relacionado à lógica que ele se destacou, inclusive foi um dos grandes percursores da teoria de lógica matemática, escreveu alguns trabalhos relacionados a ela e deixou um método preciso para entender o conhecimento formal (das formas) por meio da linguagem.

A lógica proposta por Aristóteles é fundamentada em três princípios: Princípio da Identidade, Princípio da não-contradição e Princípio do terceiro excluído. Aristóteles também criou a teoria do silogismo, o qual é baseado em um raciocínio dedutivo, que é a extração de uma conclusão através de premissas anteriores. A ideia era expressar de maneira lógica a conexão de proposições. É feito no processo de raciocínio ligar as partes ou conectá-las e chegar a uma conclusão que se dá a partir das premissas apresentadas. As premissas são categorizadas em premissa maior, premissa menor e conclusão, onde as mesmas formam a estrutura de um raciocínio. Lembrando que um silogismo sempre sai de premissas universais para uma conclusão particular. Por exemplo:

Todas as mulheres são mortais.

Daniela é mulher.

Logo, Daniela é mortal.

A premissa maior funciona como uma afirmação geral que no caso é "Todas as mulheres são mortais"; a premissa menor será uma afirmação específica que é "Daniela é mortal", e a conclusão é a união dessas premissas anteriores "Logo, Daniela é mortal".

A lógica Aristotélica interessa-se em organizar o pensamento para saber se a forma de raciocinarmos está sendo válida, se os nossos argumentos têm fundamentos lógicos e se são válidos esses argumentos ou não. Porém, ela não se preocupa com a forma que o argumento possui, mas sim com a estrutura desse argumento. Assim, podemos chegar até mesmo a errôneas conclusões do ponto de vista do conteúdo se seguirmos determinadas regras da lógica, então, podemos dizer que a preocupação da lógica está em organizar o pensamento e não em dizer o que temos que pensar. Por exemplo, se o céu está nublado, então vai chover.

A fim de tentar deixar a lógica Aristotélica mais precisa e melhorada, alguns filósofos contribuíram para o seu desenvolvimento. Essa colaboração se tornou tão significativa que é a que conhecemos hoje. Dentre esses contribuintes estão: Leibniz, George Boole, Augustus de Morgan, Euler e outros**.** Veja quem foram eles e algumas de suas contribuições para a lógica a seguir:

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716) nasceu em Leipzig, Alemanha, em 1 de julho de 1646. Filho de um professor de filosofia, Leibniz tornou-se órfão de pai aos 6 anos, porém, isso não o impediu de ser um homem brilhante. Alguns anos se passaram e Leibniz ingressou na Universidade de Leipzig, lá cursou direito, após terminar a faculdade já queria fazer seu doutorado, porém a Universidade não aceitou, pois era muito novo. Então, Leibniz conseguiu ingressar na Universidade de Nuremberg, onde conseguiu adquirir seu doutorado. Além de ser filósofo, ele foi lógico, matemático, jurista, físico, historiador e diplomata.

Figura 2- Leibniz (1646- 1716)

Fonte: METAETICASITE, 2017.

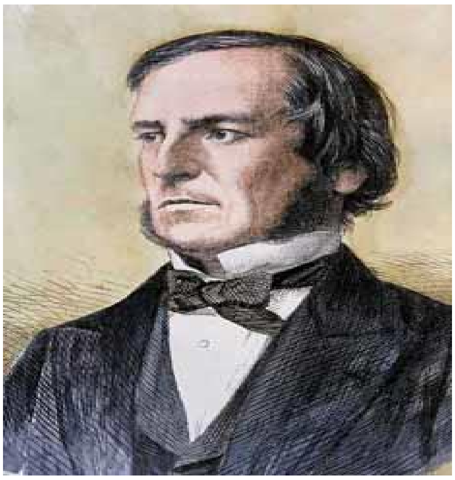
Leibniz usou em uma série de trabalhos o que chamou "calculus ratiotinator", ou "logica mathematica" ou "logística". Esses escritos nunca foram teorizados por Leibniz, pois como sua ideia era fazer com que a matemática tivesse uma base lógica, apresentou no seu tempo uma tentativa de formalizar a lógica, porém

> [...] foi ignorada em sua época, fazendo com que sua discussão e relevância só viessem a aparecer no século XIX, quando George Boole (1815-1864), em 1847, em seu livro The Mathematical Analysis of Logic (Análise matemática da Lógica) trouxe novamente as discussões sobre os fundamentos da Lógica formal (CASAL, 2018, p. 21).

Assim, criar e defender a ideia do método que poderiam ser criada uma "caracterização universal" de símbolos que reduziria analiticamente todos os conceitos primitivos a um pequeno número de conceitos primitivos, hoje Leibniz é considerado o fundador da moderna lógica formal.

George Boole (1815-1864) nasceu em Lincoln, Reino Unido, no dia 2 de novembro de 1815. Filho de um dono de uma pequena loja de sapatos recebeu do pai as primeiras lições de matemática. Interessado por idiomas Boole estudou francês, alemão, italiano, latim e grego. No ano de 1835, com 20 anos de idade abriu uma escola, lá ele teria que ensinar matemática com o nível de boas escolas, então passou a estudar matemática. Assim, escreveu seu primeiro trabalho de matemática, o qual era baseado nos estudos dos matemáticos Laplace e Lagrange.

Figura 3- George Boole(1815-1864)



Fonte: O'Connor, 2004.

O britânico Boole começou a se tornar conhecido após a publicação de um trabalho sobre métodos algébricos para a solução de equações diferenciais na "Trasactions of the Royal Society" (revista científica). Tornou-se amigo de Morgan e baseado em uma controvérsia sobre lógica que o filósofo escocês Sir William Hamilton e D Morgan tinham iniciado. Em 1847, com 32 anos, publicou o livro "A Análise Matemática da Lógica". Em suma,

> Boole defendia que o caráter essencial da matemática reside em sua forma e não em seu conteúdo; a matemática não é (como alguns dicionários ainda hoje afirmam) simplesmente "a ciência das medidas e dos números", porém, mais amplamente, qualquer estudo consistindo em símbolos juntamente com regras precisas para operar com esses símbolos, regras essas sujeitas apenas a exigência de consistência interna (EVES, 2011, p. 557).

Em 1854 publicou sua obra-prima: "A Investigation into the Laws of Thought", que significa "Uma Investigação das Leis do Pensamento", a qual fundamenta a lógica matemática, estabelecendo ao mesmo tempo a lógica formal e uma nova álgebra, que foi de grande importância para o desenvolvimento da programação de computadores.

Augustus de Morgan (1806-1871) nasceu em junho de 1806, em Madura, na presidência de Madras. Seu pai, o coronel John De Morgan, foi empregado no serviço de Companhia das Índias Orientais. Augustus de Morgan recebeu sua educação em várias escolas particulares, e antes da idade de quatorze anos tinha aprendido latim, grego e um pouco de hebraico, além de adquirir muito conhecimento geral. Com isso, na idade de dezesseis anos e meio, ele entrou para o Trinity College (Universidade), em Cambridge e estudou matemática, em parte sob a tutela de George Airy Biddell.

Figura 4- Augustus de Morgan (1806-1871)

Fonte: O'Connor, 2020.

Os feitos mais importantes de De Morgan foi o lançamento das fundações de relações e o preparo do caminho para o nascimento da lógica simbólica (ou matemática), além disso, foi Morgan quem produziu as 'Leis de De Morgan'; essas leis, deram

> [...]continuidade ao trabalho de Boole na álgebra de conjuntos, enunciando o princípio da dualidade da teoria dos conjuntos, do qual as chamadas leis de De Morgan representam uma ilustração: Se A e B são subconjuntos de um dado conjunto universo, então o complemento da união de A com B é a interseção dos complementos de A e de B, e o complemento da intersecção de A e B é a união dos complementos de A e B (em símbolos: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e $(A \cap B)' = A' \cup B'$ onde X' indica o complemento de X). (EVES, 2011, p. 558)

Augustus De Morgan tinha o mesmo pensamento de Boole a respeito da Matemática. Para ambos a Matemática se constituía de "[...] um estudo abstrato de símbolos sujeitos a conjuntos de operações simbólicas" (EVES, 2011, p.558).

Outro importante matemático e cientista na jornada da lógica matemática foi **Euler** (1707-1783). Nascido em Basileia, Suíça, no dia 15 de abril de 1707. Filho de Paul Euler, ministro protestante e Margaret Brucker, Euler foi educado por seu pai, o qual lhe ensinou os primeiros conceitos da matemática. Aos 13 anos já estava se preparando para cursar Teologia na Universidade local de Basileia, influênciado por seus pais, embora ele não mostrasse tão entusiasmado ou até mesmo não gostasse do curso. Em suas horas vagas, gostava de estudar matemática. Incentivado pelo matemático Johann Bernoulli, que conseguiu convencer o pai de Euler para que ele mudasse para a matemática, ele ingressou no curso de matemática e se formou em 1726.

Figura 5- Euler (1707-1783)

Fonte: MAESTROVIRTUALE

Com 27 anos foi acometido por uma febre que atingiu um de seus olhos e perdendo a visão desse olho. Algum tempo depois perdeu a visão do outro olho. Em 1741, a convite de Frederico II, Euler se mudou para Berlim e assumiu uma posição como diretor do Departamento de Matemática na Academia de Ciências da Prússia. No ano de 1760, começou a instruir a princesa Friederike Charlotte von Brandenburg-Schwedt, que na época tinha apenas 15 anos, através de cartas. Essas cartas tinham conteúdos variados sobre diversas áreas, como: Astronomia, Ciência, Filosofia, Física, Lógica, Música, e Teologia. Como alguns conteúdos eram bem complicados, ele começou a utilizar desenhos, tabelas e esquemas gráficos, para facilitar na compressão da princesa. Ao todo, foram mandadas 7 cartas para ensinar conceitos de Lógica à princesa.

> A fim de ensinar sobre os processos válidos de argumentação, Euler propôs o estudo da Lógica. Pela profundidade e complexidade do tema, Euler utilizou representações visuais como um auxílio didático para uma melhor compreensão da natureza dos objetos por meio da visão. Euler começou sua inserção didática utilizando diagramas para melhor elucidar os 4 tipos de proposições categóricas […] (CASAL, 2018, p. 18).

Dessa forma, por mais que diagramas já tenham sido criados por outra pessoa, Euler foi muito inovador quando desenvolveu um sistema de diagramas lógicos intuitivos o qual poderia ser mais prático para apurar a validade de silogismos.

CAPÍTULO 3: PROPOSIÇÕES E OPERAÇÕES LÓGICAS

Este capítulo foi baseado nas seguintes referências: ALENCAR FILHO (2003), IEZZI (1997), CUNHA (2008) e BISPO (2011). A seguir, serão apresentados conceitos e exemplos básicos da teoria de lógica matemática, como por exemplo, proposições simples, conectivos, proposições compostas e tabelassverdades. Começamos com a definição de proposição.

Definição 3.1: Chamam-se proposições ou sentenças toda oração declarativa que pode ser classificada de verdadeira ou falsa.

Podemos salientar também que toda proposição apresenta três características obrigatórias, que são:

I. Sendo oração, tem sujeito e predicado.

II. É declarativa (não é exclamativa e não é interrogativa)

III. Tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeiro (V) ou é falso (F).

Exemplo 3.2:

(a) Estude mais. (Não é uma proposição).

(b) O número π é um número finito.

(c) $\pi > \sqrt{2}$.

(d) Feliz aniversário! (Não é uma proposição).

(e) Cavalo é um animal.

As proposições são divididas em dois tipos: **proposições simples** e **proposições compostas**.

Definição 3.3: Chama-se **proposição simples** ou proposição atômica aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Ou seja, uma **proposição simples** é uma afirmação que declara algo sem o uso de conectivos (Veja a definição 3.6 abaixo). As proposições simples serão representadas por letras minúsculas, por exemplo, *p, q, r*.

Exemplo 3.4:

(a) p: Tiago é estudante.

(b) q: João é careca.

(c) r: O sol é rosa.

(d) s: O número 15 é primo.

Definição 3.5: Chama-se **proposição composta** ou proposição molecular aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições. Em outras palavras, são aquelas que declaram algo com o uso de conectivos.

Definição 3.6: Chamam-se **conectivos** palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras. Os principais tipos de conectivos lógicos são: negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional. A tabela seguinte mostra os símbolos que representam cada um.

Quadro 1 - Conectivos e símbolos

Conectivo	**Símbolo**	**Lê-se**
Negação	$\sim$ ou $\neg$	não
Conjunção	$\wedge$	e
Disjunção	$\vee$	ou
Condicional	$\rightarrow$	se, então
Bicondicional	$\leftrightarrow$	se, e somente se

Fonte: Compilação do autor

As proposições compostas, são representadas por letras maiúsculas, por exemplo, $P(p_1, p_2, ..., p_n)$, $Q(q_1, q_2, ..., q_n)$, onde pi e qi são proposições simples.

Exemplo 3.7:

(a) P: Pedro é cabeludo **e** João é careca.

(b) Q: **Se** João é careca, **então** é infeliz.

(c) R: O triângulo ABC é equilátero **se, e somente se,** é equiângulo.

(d) S: **Não** está fazendo sol.

(e) T: Maria é baixa **ou** Joana é alta.

Nas próximas seções, apresentaremos com mais detalhes cada um desses conectivos lógicos, que são importantes na compreensão da teoria.

3.1 Negação de uma Proposição

Definição 3.8: Chama-se negação de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando p é falsa, e falso (F) quando p é verdadeira**.** A proposição "não p" é representada simbolicamente por "$\sim p$". Utiliza-se $\neg$ ou $\sim$ como representação simbólica da negação.

Exemplo 3.9:

(a) p: Existem infinitos números primos.

$\sim p$: Não existem infinitos números primos ou Existe um número finito de primos.

(b) p: Para todos os valores de $\epsilon > 0$, existe um valor $\delta > 0$ tal que para todo x que satisfaz $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

$\sim p$: Existe um valor de $\epsilon > 0$, tal que para todo valor $\delta > 0$ existe x que satisfaz $|x - a| < \delta$, com $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.

Lembramos que, para cada proposição, associamos um valor lógico V ou F. Uma forma eficaz de descrever todos os possíveis valores lógicos de cada proposição é usando a tabela verdade. Ela é uma ferramenta que facilita a verificação dos valores lógicos de uma proposição simples ou composta (No **item 3.6** veremos mais sobre construção de tabelas-verdades de proposições compostas).

Quadro 2 - Tabela-verdade de negação ($\sim$)

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte: Compilação do autor

Há também outras formas de construir a negação, antepondo expressões como "não é verdade que" ou "é falso que" à proposição que se deseja negar, Cunha (2008). Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 3.10:

(a) p: Todos os alunos da UFNT moram no Tocantins.

$\sim p$: Não é verdade que todos os alunos da UFNT moram no Tocantins ou É falso que todos os alunos da UFNT moram no Tocantins.

(b) p: Todo número natural é escrito como produto de números primos.

$\sim p$: É falso que todo número natural é escrito como produto de números primos.

3.2 Conjunção

Definição 3.11: A conjunção de uma proposição é o resultado da combinação de duas proposições simples ligadas pela palavra "*e*" que será substituída pelo símbolo "$\wedge$". Então, dadas duas proposições p e q, a proposição "p e q" é representada simbolicamente por $p \wedge q$, e seu valor lógico será verdadeiro (V) se ambas as proposições p e q forem verdadeiras e será falsa (F) se, pelo menos, uma das proposições for falso. Veja a seguir a tabela-verdade de $p \wedge q$:

Quadro 3 - Tabela-verdade para a conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Compilação do autor

Exemplo 3.12:

(a) p: 3 é ímpar.

q: $3 < 4$.

$p \wedge q$: 3 é ímpar e $3 < 4$.

Quadro 4 - Tabela-verdade para a conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro e q verdadeiro temos que “$p \wedge q$” é verdadeiro.

(b) p: Todo quadrado é um retângulo.

q: Todo número primo é ímpar.

$\sim (p \wedge q)$: É falso que todo retângulo é um quadrado e todo número primo é ímpar.

Quadro 5 - Tabela-verdade para a conjunção

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	**F**	**F**	**V**

Fonte: Compilação do autor

Para p falso e q falso temos que “$p \wedge q$” é falso , logo a negação de “$p \wedge q$” é verdadeiro.

Até agora exemplificamos tabelas-verdades apenas com duas proposições p e q, no entanto, podemos considerar três ou mais proposições simples. Ainda trabalhando com a CONJUNÇÃO, veja o exemplo:

(c) p: O ano tem 11 meses.

q: Carlos é professor.

r: Maiza foi ao cinema ontem à tarde.

$(p \wedge q) \wedge r$: O ano tem 11 meses e Carlos é professor e Maiza foi ao cinema ontem à tarde.

Quadro 6 - Tabela-verdade para a conjunção

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	**V**	**V**	**F**	**F**
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Fonte: Compilação do autor

Sabendo que a proposição p é falsa e considerando que q e r verdadeiras, temos que “ $(p \wedge q) \wedge r$” é falso.

Como dito anteriormente, na conjunção as proposições só serão verdadeiras se todas elas tiverem o valor lógico (V). Se, pelo menos, uma proposição tiver valor lógico (F) todos serão falsos.

3.3 Disjunção

Definição 3.13: Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “p ou q”, que é representada simbolicamente por "$p \vee q$", cujo valor lógico é a verdadeiro (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e é falso (F) quando as proposições p e q são ambas falsas. Veja a seguir a tabela-verdade de "$p \vee q$":

Quadro 7 - Tabela-verdade para a Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Compilação do autor

Exemplos 3.14:

(a) p: O ser humano precisa de água para sobreviver

q: $\sqrt{5}$ é igual a 5

$p \vee q$: O ser humano precisa de água para sobreviver ou $\sqrt{5}$ é igual a 5

Quadro 8 - Tabela-verdade para a Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	**F**	**V**
F	V	V
F	F	F

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro ou q falso temos que “$p \vee q$” é verdadeiro.

(b) p: Todo número inteiro $\neq 0$ possui inverso.

q: A Terra é plana.

r: Todo número natural é inteiro.

$(p \vee \sim q) \vee r$: Todo número inteiro $\neq 0$ possui inverso ou a Terra não é plana ou todo número natural é inteiro.

Quadro 9 - Tabela-verdade para a Disjunção

p	q	r	$\sim q$	$p \vee\sim q$	$(p \vee\sim q) \vee r$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro, q falso e r verdadeiro, temos que $\sim q$ é verdadeiro, logo " $(p \vee\sim q) \vee r$" é verdadeiro.

(c) p: Todos os animais são mamíferos.

q: O Heptágono tem 8 lados.

$(\sim p \vee\sim q)$: Todos os animais não são mamíferos ou o Heptágono não tem 8 lados.

Quadro 10 - Tabela-verdade para a Disjunção

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \vee\sim q)$
V	**V**	**F**	**F**	**F**
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro ou q verdadeiro temos que $\sim p$ é falso e $\sim q$ é falso, logo " $(\sim p \vee\sim q)$" é falso.

Observe que a tabela-verdade de $(\sim p \vee\sim q)$ do quadro 10, tem o mesmo valor lógico da tabela-verdade $\sim (p \wedge q)$ do quadro 5, portanto são equivalentes ($\Leftrightarrow$), conforme a definição a seguir.

Definição 3.15: Dizemos que uma proposição P é equivalente (ou logicamente equivalente) a uma proposição Q, e representaremos por $P \Leftrightarrow Q$, quando, em suas tabelas-verdades, não ocorre VF nem FV em uma mesma linha. Equivalentemente, $P \Leftrightarrow Q$ quando as tabelas-verdades de P e Q são idênticas.

Em outras palavras, dizemos que duas proposições são logicamente equivalentes quando suas tabelas-verdades são iguais.

3.4 Condicional

Definição 3.16: A condicional de duas proposições p e q é a proposição "se p, então q", que representaremos por "$p \rightarrow q$", cujo valor lógico é falso (F) quando p for verdadeira e q for falsa e será a verdadeiro (V) nos demais casos. Veja a seguir a tabela-verdade de "$p \rightarrow q$":

Quadro 11 - Tabela-verdade para a condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Compilação do autor

Há outras maneiras de se ler a condicional "$p \rightarrow q$", como "p" é condição suficiente para "q" e também "q" é condição necessária para "p".

Exemplo 3.17:

(a) p: Kael é médico.

q: Márcia é dentista.

$\sim (p \rightarrow q)$: É falso que se Kael é médico, então, Márcia é dentista.

Quadro 12 - Tabela-verdade para a condicional

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim (p \rightarrow q)$
V	**V**	**V**	**F**
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro e o q verdadeiro, $p \rightarrow q$ é verdadeiro, porém, negar $p \rightarrow q$ significa que "$\sim (p \rightarrow q)$" é falso.

(b) p: Estudo com Érica.

q: Aprendo lógica.

$(\sim p \rightarrow \sim q)$: Se não estudo com Érica, então não aprendo lógica.

Quadro 13 - Tabela-verdade para a condicional

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \rightarrow \sim q)$
V	**V**	**F**	**F**	**V**
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro e o q verdadeiro, $p \rightarrow q$ é verdadeiro, então $\sim p$ é falso e $\sim q$ é falso, portanto "$(\sim p \rightarrow \sim q)$" é verdadeiro.

3.5 Bicondicional

Definição 3.18: A bicondicional de duas proposições p e q é a proposição "p se, e somente se, q", que representaremos por "$p \leftrightarrow q$", cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando p e q têm o mesmo valor lógico, ou seja, se p e q são ambas verdadeiras, ou ambas falsas, e é falso (F) nos demais casos, ou seja, quando os valores lógicos de p e q são opostos. Veja a tabela a seguir de "$p \leftrightarrow q$":

Quadro 14 - Tabela-verdade para a bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Compilação do autor

Exemplo 3.19:

(a) p: O futebol é uma paixão brasileira.

q: A bola de futebol é redonda.

$(\sim q \leftrightarrow p)$: A bola de futebol não é redonda se, e somente se, o futebol é uma paixão brasileira.

Quadro 15 - Tabela-verdade para a bicondicional

p	q	$\sim q$	$(\sim q \leftrightarrow p)$
V	**V**	**F**	**F**
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	F

Fonte: Compilação do autor

Para p verdadeiro e o q verdadeiro, temos que a negação da proposição q é falsa, logo "$(\sim q \leftrightarrow p)$" é falso.

(b) p: $sen(\pi) \neq 0$.

q: $cos(2\pi) = 1$.

$(\sim p \leftrightarrow \sim q)$: $sen(\pi) = 0$ se, e somente se, $cos(2\pi) \neq 1$.

Quadro 16 - Tabela-verdade para a bicondicional

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \leftrightarrow \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F
F	**V**	**V**	**F**	**F**
F	F	V	V	V

Fonte: Compilação do autor

Para p falso e q verdadeiro temos, $\sim p$ é verdadeiro e $\sim q$ é falso, logo " $(\sim p \leftrightarrow \sim q)$" é falso.

Vimos que tabelas-verdades são eficazes para determinar valores lógicos de proposições simples e compostas. Na próxima seção, vamos ver com mais detalhes como construir tabelas-verdades a partir de proposições simples e operações lógicas.

3.6 Construção de Tabela-verdade, Tautologia, Contradição e Contigência

A Tabela-verdade é uma representação das regras da Álgebra Booleana, a qual com que conseguimos representar as proposições simples e compostas de tal modo a descobrir todos os seus valores lógicos possíveis. A partir de proposições simples e com uso de conectivos lógicos podemos construir novas proposições. Como por exemplo: $p \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$, $q \leftrightarrow \sim p \wedge q$, $(p \rightarrow q) \vee\sim q$. A tabela-verdade é utilizada em outras aplicações, como por exemplo: na validação da argumentação, em demonstrações matemáticas, em circuitos elétricos, linguagem dual da computação, entre outras.

Para construir uma tabela-verdade, é necessário levar em consideração que o número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta vai depender do número das "n" proposições simples que as integram. Dessa forma, é constituída de 2^n linhas. Isso porque, para cada proposição simples, temos associado os valores lógicos V e F, assim dada uma proposição composta por n proposições simples, $P(p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$, o número de atribuição de V e F a tais proposições componentes corresponde a arranjos com repetição n a n dos dois elementos V e F, ou seja, $A_{2,n} = 2^n$.

Definição 3.20: Quando todos os valores lógicos de uma proposição é sempre verdade (V) chamamos de **Tautologia**, independentemente do valor lógico das proposições simples que a compõem. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 3.21: "$(p \vee\sim p)$", construindo sua tabela-verdade, temos:

Quadro 17 - Tabela-verdade para a tautologia

p	$\sim p$	$p \vee\sim p$
V	F	**V**
F	V	**V**

fonte: Compilação do autor

Exemplo 3.22: " $p \rightarrow (q \rightarrow p)$", construindo sua tabela-verdade, temos:

Quadro 18 - Tabela-verdade para a tautologia

p	q	$(q \rightarrow p)$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	V	**V**
V	F	V	**V**
F	V	F	**V**
F	F	V	**V**

Fonte: Compilação do autor

Além de tautologia temos seu oposto que se chama **Contradição,** veja:

Definição 3.23: Uma proposição composta é chamada de contradição se, e somente se, o seu valor lógico for sempre falso (F), independentemente do valor lógico das proposições simples que a compõem. Dessa forma, temos os exemplos a seguir:

Exemplo 3.24: "$(p\ \wedge\sim\ p)$", construindo sua tabela verdade, temos:

Quadro 19 - Tabela-verdade para a contradição

p	$\sim p$	$p\ \wedge\sim\ p$
V	F	**F**
F	V	**F**

Fonte: Compilação do autor

Exemplo 3.25: "$(p\ \wedge\ q)\ \wedge$)", construindo sua tabela-verdade, temos:

Quadro 20 - Tabelaverdade para a contradição

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\ \wedge\ q$	$\sim p\ \wedge\sim\ q$	$(p\ \wedge\ q)\ \wedge\ (\sim p\ \wedge\sim\ q)$
V	V	F	F	V	F	**F**
V	F	F	V	F	F	**F**
F	V	V	F	F	F	**F**
F	F	V	V	F	V	**F**

Fonte: Compilação do autor

Outra coisa que é muito comum em tabelas-verdades é a contigêcia, onde a mesma é toda proposição composta que não é nem contradição e nem tautologia.

Definição 3.26: Chamamos uma proposição composta de **contingente** (ou contigência) quando a última coluna de sua tabela-verdade aparece pelo menos uma vez V e F, ou seja, ela é toda proposição composta que não é tautologia nem contradição. Dessa forma, temos os exemplos a seguir:

Exemplo 3.27: $p \rightarrow \sim p$, construindo sua tabela-verdade, temos:

Quadro 21 - Tabela-verdade para a contingência

p	$\sim p$	$p \rightarrow \sim p$
V	F	**F**

F	V	**V**

Fonte: Compilação do autor

Exemplo 3.28: $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \wedge \sim p$. Construindo sua tabela-verdade:

Quadro 22 - Tabela-verdade para a contingência

p	q	r	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$p \vee r$	$(p \vee r) \sim p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \wedge \sim p$
V	V	V	F	V	V	F	**F**
V	V	F	F	V	V	F	**F**
V	F	V	F	F	V	F	**V**
V	F	F	F	F	V	F	**V**
F	V	V	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	V	F	F	**F**
F	F	V	V	V	V	V	**V**
F	F	F	V	V	F	F	**F**

Fonte: Compilação do autor

.

Aproveitando a tabela verdade do quadro 22, temos que se quisermos saber o valor lógico de $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \wedge \sim p$, para p verdadeiro, q falso e r falso, basta analisar a linha em que se encontra esses valores na tabela, veja:

Quadro 23 - Tabela-verdade para a contingência

p	q	r	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$p \vee r$	$(p \vee r) \sim p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \wedge \sim p$
V	V	V	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V
V	**F**	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F

Fonte: Compilação do autor

Portanto, para p verdadeiro, q falso e r falso, temos que "$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \wedge \sim p$" é verdadeiro.

CAPÍTULO 4: LINGUAGENS SIMBÓLICAS DA LÓGICA EM DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

O capítulo 4 nos fornece ferramentas suficientes para a resolução de vários problemas matemáticos interessantes a partir da linguagem simbólica da lógica de Boole. O intuito deste capítulo é abordar problemas matemáticos, problemas gerais, na visão da lógica, identificando os elementos principais da lógica em dada uma sentença, destacá-los, fazer as operações lógicas possíveis e pertinentes para obtermos a resolução completa do problema em questão.

No problema a seguir, utilizaremos o método de demonstração direta, ou seja, através de combinação lógica dos axiomas, definições e teoremas já existentes.

Problema 1: Demonstre que se m e n são números pares, então $m + n$ é par.

Solução: Vamos utilizar a condicional (→), onde $p \rightarrow q$, considerando p: m e n são números pares e q: $m + n$ é par. Por hipótese, considere $m = 2k$ e $n = 2l$ para alguns $k, l \in \mathbb{Z}$. Logo $m + n = 2k + 2l \Rightarrow 2(k + l)$. Portanto, $m + n$ é par.

Construindo a tabela-verdade: p: m e n são números pares e q: $m + n$ é par.

Quadro 24 - Tabela verdade do problema 1

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow \sim q$	$\sim p \rightarrow q$
V	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F

Fonte: Compilação do autor

Como consideramos a proposição p verdadeira e provamos que q é verdadeira, concluimos que $p \rightarrow q$ é verdadeira.

Nos problemas 2 e 3, resolveremos as demonstrações utilizandoutilizando o método de demonstração contrapositiva, que consiste $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$. A contrapositiva é equivalente à proposição original e é utilizada sempre que for mais fácil demonstrar a contrapositiva do que a implicação original.

Problema 2: Prove que se o quadrado de um número é par, então esse número será par.

Solução: Considerando p: x^2 é par e q: x é par, utilizando a contrapositiva para provar, podemos dizer que $p \Rightarrow q$ ou de forma equivalente $\sim q \Rightarrow \sim p$, nesse caso, $\sim p$: x^2 é ímpar e $\sim q$: x é ímpar.

De fato, $\sim q \Rightarrow \sim p$, pois, tomando $x = 2n + 1$ (definição de números impares)
$x^2 = (2n + 1)^2 \Rightarrow x^2 = 4n + 2n + 1 \Rightarrow x^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$
Construindo a tabela-verdade: p:x^2 é par e q: x é par

Quadro 25 - Tabela-verdade do problema 2

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Fonte: Compilação do autor

Como consideramos $\sim q$ verdadeira, provamos que $\sim p$ é verdadeira. Concluimos que $\sim q \rightarrow \sim p$ é verdadeira.

Problema 3: Sejam a, b duas retas no plano. Se $a \parallel b$, então $b \parallel a$.
Solução: Considere as proposições p: $a \parallel b$ e q:$b \parallel a$. Queremos mostrar que $p \rightarrow q$, pelo quadro 11, sabemos que $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa. Mas, dizer que q é falso é afirmar que $\sim q$ é verdadeira, e assim, $\sim q$: b não é paralelo a a. Sabemos que duas retas não são paralelas se existe algum ponto em comum.

Tome a proposição q': $b \cap a \neq \emptyset$.

$\sim q$ é verdadeira $\Leftrightarrow$ q' é verdadeira $(*)$

Assim, se $\sim q$ é verdadeiro, concluímos que q' é verdadeiro.

Veja que q': $b \cap a \neq \emptyset$, é o mesmo que q': $a \cap b \neq \emptyset$. Então, concluimos que a não é paralelo a b. O que contradiz a nossa hipótese. Portanto, $\sim q$ implica em $\sim p$, como queriamos demonstrar.

Construindo a tabela-verdade, onde p: $a \parallel b$ e q:$b \parallel a$.

Quadro 26 - Tabela-verdade do problema 3

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V

V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**

Fonte: Compilação do autor

Como supomos que $\sim q$ é verdadeira, provamos que $\sim p$ é verdadeira. Concluimos que $\sim q \rightarrow \sim p$ é verdadeira.

O próximo problema é um resultado clássico da teoria de números primos. Uma das formas de resolver o problema é usando a prova por contradição (ou redução ao absurdo) que consiste em mostrar que a falsidade da afirmação (negar a tese) e chega-se a uma contradição ou um absurdo. Em seguida apresentaremos uma outra forma de demonstrar utilizando a tabela-verdade.

Problema 4: Existem infinitos números primos.

Solução: Considere a proposição p: Existem infinitos números primos. Veja que negar p é dizer que a proposição $\sim p$: $\exists$ um número finito de primos é verdadeira. Vamos partir da negação de p. Tome o conjunto finito de números primos, digamos $\{p_1 . p_2 ... p_n + 1\}, p_i > 1$ com $\in \{1, 2, ..., n\}$. Considere o número $p_1 . p_2 . p_3 ... p_n + 1$ e a proposição $q: p_1 . p_2 ... p_n + 1$ não é um número primo. Se q é verdadeira, então$p_1 . p_2 . p_3 ... p_n + 1$é um número composto, ou seja, pelo T.F.A (Teorema Fundamental da Aritmética) este número é produto dos números primos $\in \{1, 2, ..., n\}$, ou seja, $p_1 . p_2 . p_3 ... p_n + 1 = p_i . k$ é multiplo de algum dos p_i, $i = 1, 2, .., n$. E assim, o número 1 também será um múltiplo de p_i. O que é um absurdo, porque o número 1 não é composto. Logo, $\sim p$ não pode ser verdadeira, o que implica que p é verdadeira.

Construindo sua tabela-verdade:

Quadro 27 - Tabela-verdade do problema 4

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	**V**	**V**	**F**	**V**

F	F	V	V	F

Fonte: Compilação do autor

Como estamos supondo $\sim p$ verdadeira e q verdadeira, concluímos que $\sim p \rightarrow q$ é verdadeira, chegando num absurdo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho apresentamos um breve panorama histórico da lógica clássica (aristotélica ou lógica matemática) desde os primórdios, a fim de mostrar que a lógica é resultado de grandes transformações e investigações com relação as ordens do pensamento feitas por filósofos. Lembrando que a lógica Aristotélica não foi substituída pela lógica simbólica mas sim aperfeiçoada. Apresentamos também que uma proposição (declaração) é falsa ou verdadeira, não sendo as duas ao mesmo tempo, isso parte do princípio do terceiro excluído, no mais, a qualquer expressão a qual não conseguimos atribuir um valor lógico não podemos chamar de proposição. A lógica tem grande importância para o desempenho do indivíduo, pois possibilita um caminho de interpretações que facilita a compreensão para um raciocínio lógico, além de ser uma linguagem usada regularmente pela Matemática onde a sua linguagem simbólica demonstra afirmações sem ambiguidades. Com isso, nosso intuito foi mostrar que se fizermos o uso de operadores lógicos juntamente com tabelas-verdades como ferramenta para provar demonstrações matemáticas também podemos chegar a resultados satisfatórios.

Para que haja efetividade de algum fato em Matemática que possa ser verificado não usamos experimentações e sim demonstrações, com isso os encadeamentos lógicos e coerência de determinados argumentos que precisam ser válidos para de fato concluir algo verídico. O uso de tabela-verdade é uma forma de entender esse processo e conseguir fazer a prova. É importante salientar que os tipos de demonstrações apresentadas neste trabalho não são as únicas existentes, por isso, caso haja alguma curiosidade em se aprofundar é necessário fazer uma pesquisa mais detalhada. Desta maneira, a pesquisa mostrou que há outras formas de demonstrar, da qual escolhemos a linguagem simbólica para compreender algumas dessas formas para provar demonstrações.

Considerando a proposta deste trabalho, concluo dizendo que ainda há muito a ser explorado e aperfeiçoado, pois a multiplicidade da linguagem lógica, seja ela matemática ou não, é imensa. Dessa maneira, podemos ressaltar que o conhecimento das diversas técnicas ou maneiras de demonstrar resultados matemáticos tem grande importância para o conhecimento de um raciocínio estruturado e coerente.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgard de, 1913. **Iniciação à lógica matemática.** São Paulo: Nobel, 2003.

ALVES, Kynttino Hélvio de Freitas. **INICIAÇÃO À LÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufal.br/bitstream/riufal/2455/1/Inicia%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20l%C3%B3gica%20na%20educa%C3%A7%C3%A3o%20b%C3%A1sica.pdf>. Acesso em: 17 de março 2022.

BISPO, Carlos Alberto Ferreira; Castanheira, Luiz Batista; Souza Filho, Oswaldo Melo . **Introdução à lógica matemática**: Cengage Learning, 2011. Disponível em: <https://www.academia.edu/39934722/INTRODU%C3%87%C3%83O_%C3%80_L%C3%93GICA_MATEM%C3%81TICA>. Acesso em: 15 de maio 2022.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 21 de maio de 2022.

BUTIERRES, Gabrielly Costa. **Uma proposta para introdução da Lógica nas aulas de Matemática**. 2016. 68 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande - Furg, Rio Grande, Rs, 2016. Disponível em: <https://profmat.furg.br/images/TCC/gabrielly.pdf>. Acesso em: 21 de maio de 2022.

CABRAL, João Francisco Pereira. "**Figuras do silogismo e algumas regras para o seu entendimento**"; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/figuras-silogismo-algumas-regras-para-seu-entendimento.htm>. Acesso em: 26 de out. 2021.

CASAL, João Roberto Bêta. **Lógica na matemática e no cotidiano: uma reflexão sobre o papel da lógica no ensino**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2018. Disponível em:<https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/13827/Monografia_2018-2_Jo%C3%A3o%20Roberto%20Beta%20Casal.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 26 de out. 2021.

CUNHA, Francisco Gêvane Muniz. **Lógica e conjuntos**. Coordenação Cassandra Ribeiro Joye. - Fortaleza: UAB/IFCE, 2008.

D'OTTAVIANO, I. M. L. (1992) **Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas**. In : Évora, F. (Org.). Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea. Campinas: Universidade Estadual de Campinas – CLE. (Coleção CLE, v.11, p. 65-93.) Diponível em: <https://arquivos.cruzeirodosulvirtual.com.br/materiais/disc_2011/2sem_2011/logicaformal/un_II/complementar_II.pdf>. Acesso em: 17 de março 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FERREIRÓS, José. **La lógica matemática: una disciplina en busca de encuadre**. Theoria-Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia, Sevilha, v. 25, n. 3, p. 279-299, 2010. Disponível em: <http://www.ehu.eus/ojs/index.php/THEORIA>. Acesso em: 17 de out. 2021.

FRAZÃO, Dilva. **Biografia de George Boole**.Ebiografia.com. 29/03/2017. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/george_boole/>. Acesso em: 17 de out. 2021.

FRAZÃO, Dilva. **Biografia de Gottfried Leibniz**. ebiografia.com. 22/08/2017. Disponível em:<https://www.ebiografia.com/gottfried_leibniz/>. Acesso em: 12 out 2021.

FRAZÃO, Dilva. **Biografia de Leonhard Euler.** Ebiografia.com. 19/03/2020. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/leonhard_euler/>. Acesso em: 17 de out. 2021.

IEZZI, G., MURAKAMI,C. **Coleção Fundamentos da Matemática Elementar: Conjuntos Funções**. Vol. 1. 3ª Ed. São Paulo: Atual, 1977.

LESSA, José Roberto. "**Gottfried Leibniz**"; info *Escola*. Disponível em: <https://www.infoescola.com/biografias/gottfried-leibniz/>. Acesso em: 24 de jan. 2022.

MAESTROVIRTUALE.COM. **Leonhard Euler: biografia, contribuições, obras, citações.** Disponível em: <https://maestrovirtuale.com/leonhard-euler-biografia-contribuicoes-obras-citacoes/>. Acesso em: 07 de Abril 2022.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Atlas, 2003.

METAETICASITE. **Gottfried Wilhelm Leibniz**. 18 SET DE 2017.Disponível em: <https://metaeticasite.wordpress.com/2017/09/18/gottfried-wilhelm-leibniz/>. Acesso em: 29de jun. 2022.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: UNESP, 2001. Disponível em: <https://moodlep.uem.br/pluginfile.php/172149/course/overviewfiles/MORTARI%2C%20C.%20A.%20Introdu%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A0%20L%C3%B3gica.pdf?forcedownload=1>. Acesso em: 29de jun. 2022.

NASCIMENTO, Jefferson Alexandre do. **Explorando a Lógica Matemática no Ensino Básico**. 2016. 183 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em:<https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/21925/1/JeffersonAlexandreDoNascimento_DISSERT.pdf> Acesso em: 18 de jun. 2022.

NEVES FILHO, Eduardo Ferreira das ; RUI, Matheus de Lima. **Elementos de lógica**. Pelotas: NEPFIL online, 2016. 94p. - (Série Dissertatio-Filosofia ; 11). Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/nepfil/files/2019/02/1-elementos-de-logica.pdf>. Acesso em: 24 de jan. 2022.

O'CONNOR, JJ ; Robertson, EF. **Augusto De Morgan.** julho de 2020.Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Morgan/pictdisplay/>. Acesso em: 24 de jan. 2022.

O'CONNOR, JJ ; Robertson, EF. **George Boole.** junho de 2004. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Boole/pictdisplay/>. Acesso em: 17 de out. 2021.

PORFíRIO, Francisco. **"Aristóteles"**; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/aristoteles.htm>. Acesso em: 24 de jan. 2022.

PORTALSAOFRANCISCO.COM. **Augustus de Morgan.** Disponível em:<https://www.portalsaofrancisco.com.br/biografias/augustus-de-morgan>. Acesso em: 24 de jan. 2022.

PRIETO, Manoel Jose. **Raciocínio Lógico Matemático para o Ensino Fundamental**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 03, Ed. 04, Vol. 05, p. 54 – 76, abr. 2018.

ROCHA, Enrique. **Raciocínio lógico: teoria e questões**. 2.ed.-Rio de Janeiro: Elsevier, 2006- 2° reimpressão.

SELL, Sérgio; MACHADO, Renato e PACHECO, Leandro Kingeski. **Lógica I**. 1. ed. rev. - Palhoça: Unisul Virtual, 2011.

SOARES, Flávia. **A Lógica no cotidiano e a lógica na matemática**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 15-18 de julho. 2004, p. 1 – 12. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/05/MC03526677700.pdf>. Acesso em: 24 de jan. 2022.