

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE ARAGUAÍNA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

PAOLA TEREZINHA SEIDEL

**PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DA GRAVITAÇÃO
SOB O PRISMA TENSORIAL**

ARAGUAÍNA
2016

PAOLA TEREZINHA SEIDEL

**PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DA GRAVITAÇÃO
SOB O PRISMA TENSORIAL**

Trabalho de conclusão de curso submetido ao curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral.

ARAGUAÍNA
2016

PAOLA TEREZINHA SEIDEL

**PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DA GRAVITAÇÃO
SOB O PRISMA TENSORIAL**

Trabalho de conclusão de curso submetido ao curso de Licenciatura em Física da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para a obtenção de título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luís Antonio Cabral.

Aprovado em: 07/07/2016.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Luís Antonio Cabral (orientador)



Prof. Dr. Matheus Pereira Lobo



Prof. Dr. Edison Tadeu Franco

Este trabalho apresenta dedicatória quantizada representada por D_n , sendo $n = 1, 2$ e 3 . Em D_1 está Deus, em D_2 estão Jane (minha mãe), Olir (meu pai), Ana Luíza (minha irmã), Vilma (minha avó), Luís Cabral (meu orientador) e todos os meus professores de Física da UFT. Em D_3 estão as sementes de físicos teóricos, até mesmo aqueles ainda inconscientes desta sua natureza, que permeiam o espaço-tempo da UFT - Campus Araguaína.

Agradecimentos

Embora tenha muito a aprender sobre, uma palavra para me definir, seria, por certo, gratidão. Deveras a limitação das linhas rouba-me água dos olhos desde já. Jamais poderei agradecer o suficiente as sábias sutilezas da mãe natureza e aqueles, tão dedicados em humanos ser, que vêem além do seu tempo e além das aparências.

Quão alegre e bondoso Deus estava ao me presentear com meus pais, Jane e Odir. Tamanho amor que resolveu incrementar meu presente, com um anjo no céu e uma anja na Terra, Matheus e Ana Luíza. Obrigada Pai do céu. Farei valer em dobro cada gota de suor e sacrifício dos meus pais para me possibilitarem boa formação. Graças a eles comecei meu curso de inglês e pude participar de eventos de Física, por exemplo. Mesmo sem poder, sempre encontravam uma forma e diziam “não é gasto, é investimento filha”. Apertavam aqui, pediam emprestado lá para então, o mais breve, devolver centavo por centavo. Nem sempre as condições nas fazendas que o meu pai atende foram boas. Sem falar no contato indireto com agrotóxicos ou no contato direto com bichos peçonhentos no meio da lavoura. Sob o sol escaldante ou sob risco de ficar atolado no meio do nada. E como esquecer das repetidas vezes que passa/possou mais tempo nas fazendas do que em casa. E quando em casa, pela manhã, olhos vermelhos por virar a noite trabalhando. Já a minha mãe mantém o ofício como costureira, trabalha no financeiro de um hospital e estuda. Pois é, não existe muito essa coisa de final de semana ou feriado por lá. O ir e voltar a pé do trabalho nem sempre foi solitário, a chuva fazia companhia sazonalmente. E quantas vezes desdobrou-se em duas para resolver os “B.O.s” de casa, meus ou da Luíza, por exemplo. Lamento e agradeço aos meus pais pelas inúmeras vezes que fecharam os olhos para os próprios anseios e problemas para me ajudarem com os meus. Nem preciso dizer que eles são meus melhores amigos, certo? Bom, já disse. Mãe, obrigada pelas vezes que me atirou do “precipício” só para me fazer lembrar que você deu a luz a “águias” e não a “angolistas”, "(risos)". Pai, obrigada por evitar meu infarto todas as vezes que o meu notebook esquecia da devoção a mim, "(risos)". Não seria eu se não fosse vocês, Jane e Odir. E sem vocês ao meu lado, que educação, valores e princípios o mundo me daria? São muitos os planos e tenho certeza que Deus tem reservado o melhor para nós. Quanto a boa formação da Luíza eu estou me preparando para ajudar, será mais tranquilo. Vamos viver na mesma cidade e vou provar que ainda vamos viver coisas maravilhosas juntos, como férias de verdade, por exemplo. Vai chegar o tempo que poderei retribuir todo o investimento e paparicar muito vocês, me aguardem. Resumidamente, minha mãe, meu pai, meu mano e minha mana são minha vida a pulsar fora de mim, sou eternamente grata a eles por tudo, amo-os incondicionalmente; Recompus-me, gotas de ágape e dor banharam as maçãs do meu rosto. É que não foi nada fácil ficar longe do abraço deles. As conversas via celular foram mais frequentes do que a, minha predileta, via olhar. Tudo culpa da distância geográfica, em uma das minhas férias a Luíza estava com “janelinha no sorriso” e na seguinte ela

vinha em minha direção de sorriso completo com sua bicicleta. Por Deus! Ela já estava sabendo pedalar e com os incisivos crescidos, chorei sangue aquele dia. Sei que um dia estaremos vivendo na mesma cidade novamente, mas isso não fará voltar o tempo que estive longe deles. A vida tem dessas coisas, ainda bem que por gratuidade divina ganhei bons momentos durante a graduação. Que sorte a minha ter uma família que me ama cada um a seu modo. Deixo aqui registrado meu obrigada a minha avó Vilma, quanto zelo e prece que já dedicou a essa sua neta de língua afiada muitas vezes. Avô Juvenildo, avó Síbila, avô Elmo, bisavôs, bisavós e antepassados obrigada, sem vocês eu sequer poderia existir. A minha madrinha Janete sou grata por todo apoio, carinho e amizade, assim como sou grata ao meu tio Augusto (obrigada por fazer minha madrinha feliz). Ao meu padrinho Jaime agradeço pelo abrigo durante minha graduação. A minha tia, Leiliane, também, quero agradecer o carinho para comigo (obrigada por fazer meu padrinho feliz e por ajudar a cuidar da minha avó). Às minhas primas Cris, Vi e Lu sou grata por todos os momentos que crescemos juntas entre lágrimas e muitos risos.

Finalmente, chegamos a minha família de coração. Foi quando ganhei essa família que eu ganhei mais força para persistir e prosperar nos estudos. Tudo começou com um anjo orientador chamado Luís Antonio Cabral, se não fosse ele o lado negro da força tinha me levado para uma destas engenharias. Eu nada sabia sobre tensores, gravitação, relatividade geral, espaço-tempo... Aprendi tudo com ele, se hoje algum mérito é visto nas linhas desse trabalho de conclusão de curso, eu o direciono ao visionário Cabral, ele é o merecedor de todas as honrarias. Fui apenas uma aprendiz com uma missão que não me parecia trivial, mas a visão de "águia" dele, por certo, já tinha, de alguma forma, visto a semente de física teórica que eu era sem saber. E, tão logo, a profecia da pequenina menina que dizia "vou ser cientista e artista quando crescer" voltou a falar em meus olhos, depois de anos caída no esquecimento. O apoio, a dedicação e a ajuda dele sempre foram além dos compromissos como meu orientador. Por vezes prestou ajuda financeira para com os meus estudos, outras tantas atuou como tradutor e conselheiro para questões triviais que foram desde a orientação quanto aos textos para envio de e-mails importantes até a inscrições em eventos com perfil internacional e dicas sobre minuciosas precauções a serem tomadas nos aeroportos. Será um privilégio continuar a aprender com você, meu pai de coração Cabral, simplesmente obrigada por você existir!

A família de coração foi crescendo, ganhei um dindo, Matheus, uma dinda, Rosária e uma mãe, Shirlei. Quanta alegria e amor vocês trouxeram para meu pequenino coração. Sou grata por terem acolhido como se eu fosse da família de vocês. Guardo com carinho todos aprendizados e momentos que vivemos juntos, tanto na UFT como no lar doce lar de vocês, por exemplo. Faço prece para que possamos viver mais desses momentos juntos no futuro. Os agradecimentos ainda são direcionados a Regina, obrigada pelas prosas, dicas, almoços e vezes que abriu as portas da sua casa para que eu pudesse pernoitar. Aprendi muito, também, como o Nilo, a Liliana (muito obrigada pelo apoio com a minha avó), o Alexsandro, o Diógenes, o Jaime, o Juracy, o Edison, a Érica, a Pâmella e o Anderson, que juntos com o Cabral, a Regina, o Matheus e a Shirlei me apresentaram a Física em suas mais diversas facetas. Quando eu exercer a docência,

me espelharei em tudo de bom que aprendi com vocês, obrigada pelo privilégio de assistir às suas aulas! Obrigada pelos bons momentos juntos! Seja na sala de aula, nas semanas acadêmicas, nos encontros rápidos nos corredores, na cantina, e em alguns finais de semana. Desejo boa sorte a todos vocês e faço prece para que os futuros formandos em Física da UFT, campus de Araguaína, saibam o quão privilegiados eles são, por terem professores como vocês. Não só pela qualificação, mas pela dedicação e vontade de verem esses alunos crescerem academicamente.

Não tive somente professores de Física durante o curso, sendo assim a Cláudia (obrigada pelo carinho de sempre), o Francisco, o Rogério, a Renata, a Geane, a Lílian, a Laryany, a Patricia, a Aline, o Marcos e a Roselba também merecem o meu obrigada, pois me ensinaram que Biologia, Química, Matemática e Letras podem colaborar com a Física. Não cheguei a ter aula com a Magale, a Flamis, (meninas obrigada pelo carinho de sempre!), o Daniel, o Roberto, o Paiva, o Sinval, o Freud e a Claudenice, mas seria uma honra! Foi uma grande alegria conhecer vocês. Durante a graduação tive o privilégio de participar de eventos que me colocaram diante de físicos que eu me sinto na obrigação de agradecer por terem feito parte da construção do meu aprendizado, foram eles: R. Las Casas, C. Maia, M. Malheiro, T. Frederico, Á. Marinho, A. Toribio, L. Cottica, R. Casana, F. Bemfica, H. Fagnoli, L. Castro, T. Bergamann, G. Matsas, J. Torres, A. Nogueira, N. Braga, A. Barros, C. Romero, J. Teixeira, L. Crispino, C. Herdeiro, M. Casanellas, J. Fabris, V. Zanchin, O. Tavares, C. Lenzi, J. Cruz e B. Melgar. Nesses eventos ganhei a amizade de um pessoal que passei a admirar: Caio, Thalita e Alberto, Gisele, Luis, Enesson, Pablo, Ricardo e José, os eventos foram mais “divertinerd” com vocês, obrigada.

Finalmente, chegou a hora que todos meus amigos mais próximos esperavam! Como poderia esquecer de vocês meus amores. Mellis e família, obrigada por me acolherem durante um tempo no lar de vocês e me fazerem sentir da família. Fiquei devendo muitas visitas, desculpa. Foram momentos únicos que vivi com vocês, muito obrigada. Mellis, foi muito bom ser quase sua mana por uns tempos, obrigada por me apresentar a limonada suíça, "(risos)". Você e o Paulo Junior salvaram minha vida em relação ao inglês várias vezes, obrigada. Marcela, Mellis, Michele, Milena, Cleiton, Gabriel e Gilberto obrigada por estarem por perto quando eu não conseguia esconder as lágrimas, com vocês o sorriso voltava logo. Michele, Paula, Josiane e Cleiton obrigada pelo nosso grupo de estudo. Michele, cheguei a conclusão que sermos amigas é mais divertido do que sermos aqui-inimigas. Obrigada pela sua amizade, gastar a sola do sapato no centro com você era diversão garantida. Você quase fez nascer meu lado “festinha”, obrigada pelas tentativas, "(risos)". Paula e Iara muito obrigada pelas vezes que me confiaram o cartão de crédito para aproveitar passagens aéreas promocionais rumo a alguns dos eventos de Física que participei. Cleiton, Gabriel, Everton, Regina, Matheus e Shirlei, vocês, também, foram meus anjos da guarda na volta para casa muitas vezes, muito obrigado. Gabriel, obrigada por ter sido o primeiro a assegurar minha volta para casa, obrigada pela sua amizade e bom humor. Cleiton, obrigada pela sua amizade e companhia em vários almoços no RU e na cantina da UFT. Obrigada por resolver alguns problemas do meu notebook, e por intermediar a amizade entre eu e a “corujinha” da UFT, "(risos)". Nesse grupo, também, tem o Antônio (obrigada pela

ajuda nos exercícios de física), a Jeane, a Alana (obrigada pela sua companhia em Caxambu), o Sergivan, o Jadson, o Christopher (obrigada pelos peixinhos), a Julyanne, o Rafael, a Samara, o Geisson, o Felipe (obrigada por me avisar quando o “money” estava na conta), o Leonardo, o Netinho, o Wellington, o Wenio (obrigada pela monitoria guri), o Rogério, a Edinalva, o Jacó, o João Pedro, a Adriana, a Antoniana, a Shyrlei, o Melquiodes, a Andressa, a Thaís, a Lorena, a Yagly, o Sérgio, o Thiago, o Patrick, o Wallyson, os dois Marcelo, o Eduardo, a Jackeline, a Caroline, a Isabelle, a Suzanna, a Cristiane obrigada pela amizade de vocês. “My friends”, obrigada por me darem sempre aquela força, obrigada por me tirarem gargalhadas, obrigada pelos momentos vividos com vocês! Seja quando na UFT, em João Pessoa ou em Natal.

Para finalizar agradeço aos cordiais bom dia, boa tarde e boa noite dos vigilantes, em especial ao Augusto, e pessoal da limpeza. Marcio e Alison, desculpa por fazerem vocês emitirem tantos boletos de multa na biblioteca, obrigada por serem sempre solícitos. Denisia, obrigada por ser sempre paciente em responder as minhas mais variadas dúvidas sobre os preparativos à ida aos eventos ou sobre PIBIC e afins. Tenho que agradecer a outros anjinhos pelo apoio e torcida. Terezinha (obrigada por ter ajudado a cuidar da minha irmã), Chico (você é um exemplo para mim), Rita, Joana, Ivo e Mirtes, Charlton, Rosangela, Ely, minha tia Aline, meu tio Genésio, Irma, Patricia, Nilva, Neusa, Didi e Luzimar, Germana, Ludiana (mana biomédica predileta), Lorena (mana-amiga-anja), Manuele, Adrielly e Raquel. Agradeço o carinho da minha prof. de alfabetização, tia Judi ("vou te dar uma surra de beijinhos"). Aos meus professores do ensino fundamental, em especial a Judite ("sempre anotar as palavras que ouvir pela 1ª vez") e a Mara (responsável por eu gostar de biologia). Aos meus professores do ensino médio, em especial ao Dirceu (prof. predileto de Matemática), Sandra (minha 1º prof. de Física) e Cinara (prof. predileta de Artes). E aos meus professores de cursinho, em especial ao Gustavo (Redação), Pablo (Física), João Paulo (Matemática), Marco Antônio (Biologia), Filarte (Biologia) e Fábio (História). E aos que se fadigaram em ler essas páginas, perdoem-me. Querido Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, não fique triste, sou grata pela bolsa de iniciação científica nesses três anos. Fundação Universidade Federal do Tocantins, prometo retribuir levando o seu nome para muitos lugares por onde quer que eu vá, obrigada por esses quatro anos repletos de amadurecimento e aprendizados.

Resumo

Nesta obra apresentamos o formalismo tensorial da gravitação em termos conceituais, analíticos e, quando necessário, numéricos. Inicialmente oferecemos uma espécie de nivelamento acerca do cálculo tensorial e aspectos históricos da teoria da relatividade de Einstein, no intuito de apresentar ao leitor uma visão mais palpável do tema da nossa pesquisa. Na sequência, abrimos caminho para operar o principal tensor da relatividade geral, o tensor de Einstein. Mostramos que este objeto guarda um dos resultados mais relevantes desta teoria. Trabalhamos tal objeto a fim de reproduzir a famosa solução de Schwarzschild. Ademais, sabendo que a gravitação de Einstein é uma teoria com respaldo experimental, consideramos crucial lembrar que esta teoria é, naturalmente, compatível com a precessão do periélio de Mercúrio. Esse resultado, além de validar a teoria em pauta, oportuniza a abordagem acerca de simetrias do espaço-tempo. Mostraremos que tais simetrias estão intimamente ligadas aos tensores de Killing. Podemos antecipar que tais objetos revelam simetrias ocultas no espaço-tempo e são cercados de peculiaridades, muitas das quais são reveladas neste trabalho.

Palavras-chave: Relatividade Geral. Tensores. Métrica dual.

Abstract

In this work we present the tensor formalism of gravitation in conceptual, analytical and, when necessary, numerical aspects. Initially, we offer a kind of tutorial about the tensor calculus and historical aspects of Einstein's theory of relativity, to present to the reader a more real view of the subject of our research. In the following, we opened way to operate the main tensor of general relativity, the Einstein tensor. We show that this object holds one of the most significant results of this theory. We work such object to reproduce the famed Schwarzschild solution. Moreover, knowing that Einstein's gravitation is a theory with experimental support, we consider crucial to remember that the theory is compatible with the precession of the perihelion of Mercury. This result, in addition to validating the theory in question, gives an opportunity to approach about symmetries of space-time. We show that some symmetries are closely linked to the Killing tensors. We can anticipate that such objects reveal hidden symmetries in space-time and are surrounded by peculiarities, many of which are disclosed in this work.

Keywords: General Relativity. Tensors. Dual metric.

Sumário

Introdução	11
1 Visão superficial da teoria da gravitação de Einstein	12
2 Peculiaridades introdutórias do cálculo tensorial	14
2.1 Componentes e transformações de tensores	15
2.2 Espaço métrico e conversão entre componentes tensoriais	18
2.3 Tensor métrico	19
3 Derivada covariante e tensor de curvatura	21
3.1 Derivada covariante	21
3.2 Tensor de curvatura	23
3.3 Tensor de Ricci e escalar de curvatura	25
4 Tensor de Einstein	26
4.1 Métrica de Schwarzschild	27
4.1.1 Maple e GRTensorII	28
4.1.2 Procedimento analítico para obter a solução de Schwarzschild	29
5 Tensores de Killing	37
5.1 Precessão do periélio de Mercúrio	39
5.2 Simetria do espaço-tempo	40
5.3 Isometria e tensores de Killing	41
5.4 Métrica dual ao espaço-tempo de Schwarzschild	43
Conclusões	47
Referências	49

Introdução

O presente trabalho trata de aspectos conceituais, analíticos e computacionais relacionados com a aplicação do cálculo tensorial em problemas fundamentais da gravitação. Sabe-se que no período de gênese da teoria da gravitação de Einstein, poucos membros da comunidade científica compreendiam tal teoria, tamanha abstração. Ou por causa das conclusões inesperadas dessa teoria, inesperadas graças ao comodismo da nossa realidade a baixas velocidades e longínqua dos corpos com magnitudes solares. Aos poucos o cenário de incompreensão foi mudando, porém ainda hoje muitos estão alheios ao conhecimento, mesmo superficial, de tal teoria.

Nesse sentido, o intuito primordial do trabalho é servir como um informativo acerca de minúcias ligadas à famosa teoria da gravitação de Einstein. Deste modo, é oportunizado que um número maior de indivíduos possam depreender tal teoria e, porventura, possa despertar o interesse dos leitores para trilharem essa linha de pesquisa e/ou correlatas. Ademais, pelo fato do formalismo ligado à teoria da relatividade geral servir de suporte à compreensão de teorias mais avançadas como, por exemplo, a teoria quântica de campos, nosso trabalho configura-se como um contato inicial aos acadêmicos que já se identificam com estas linhas teóricas de pesquisas. Sendo assim, podemos contribuir à divulgação, fortificação e à evolução da ciência fundamental, uma das maiores responsáveis pelo desenvolvido tecnológico.

O trabalho está organizado em capítulos, seções e subseções. No primeiro capítulo o leitor é apresentado formalmente ao que vem a ser a teoria da gravitação de Einstein. Já no segundo capítulo temos três seções focadas na apresentação do formalismo tensorial usado na relatividade geral. O terceiro capítulo, também, está dividido em três seções dedicadas à construção do tensor de Riemann, objeto que dá origem a outros dois tensores, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Estes últimos objetos e o tensor métrico, visto no segundo capítulo, compõem a estrutura do tensor de Einstein, tema trabalhado no quarto capítulo. Esse tensor descreve o principal resultado da gravitação de Einstein. Neste capítulo apresentamos uma seção dividida em duas subseções dedicadas à recuperar a solução famosa para o caso do tensor de Einstein nulo, a solução de Schwarzschild.

No quinto e último capítulo apresentamos o conhecimento prévio para tratar sobre os tensores de Killing, solução para as isometrias do espaço-tempo. Nesse intento, precisamos compreender primeiro sobre as simetrias presentes ao longo de geodésicas, esse tema tem ligação com a famosa precessão do periélio de Mercúrio, um resultado, particularmente, importante para a teoria de Einstein. Por isso, dedicamos a primeira seção desse capítulo para abordar o pressuposto. Nas três últimas seções esclarecemos detalhes sobre simetria, isometria e métrica dual, apesar de serem temas distintos estão intimamente relacionados, graças aos tensores de Killing.

1 Visão superficial da teoria da gravitação de Einstein

Tendo em vista a importância, tanto tecnológica como intelectual, da teoria da gravitação de Einstein, é válido mergulharmos sobre as linhas da teoria da relatividade de Einstein (teoria da gravitação) para alcançar uma visualização mais palpável do tema da pesquisa.

Aproveitando o ensejo, é precípuo acentuar que muitas previsões teóricas no campo da ciência, devido à limitação tecnológica, antecedem as experimentais exemplo nítido disso é a existência do Bóson de Higgs, que resultou no Nobel da Física de 2013. A descoberta das antipartículas, por Dirac, é outro exemplo da teoria antecedendo o experimento que também levou ao Nobel [1]. Muitas delas, hoje, têm relevância reconhecida, porém, de início eram taxadas como "sem utilidade" ou absurdas, pois ultrapassavam o nível imaginativo do nosso senso comum.

Um grande exemplo disso é a teoria da relatividade de Einstein, as conclusões resultantes dela (a contração do espaço, a dilatação do tempo, a união do espaço e tempo, simultaneidade é relativa e o tempo não é absoluto [2, 3, 4, 5, 6, 7]), por serem mais perceptíveis em escalas de massas astronômicas e velocidades próximas a da luz, fogem da nossa percepção e nos parecem conclusões absurdas. Mas, a aplicação de tal conhecimento está presente no nosso dia a dia, o Sistema de Posicionamento Global - GPS é um exemplo. Este precisa do uso da relatividade para corrigir a passagem de tempo, pois nos satélites o tempo passa mais devagar do que na superfície terrestre [3, 6].

A gênese da relatividade de Einstein ajudou a derrubar a suspeita de que a descrição do universo estava completa. Essa suspeita surgiu graças ao sucesso das grandiosas leis formuladas no passado, porém mal sabiam que a Física Clássica já apresentava "fissuras" em seus alicerces. E assim, as teorias da Mecânica Quântica e a própria teoria da relatividade nasceram do intuito de solucionar e entender os enigmas que assombravam a Física Clássica (Por que as Equações de Maxwell não obedeciam ao princípio da relatividade newtoniana?) [3, 5, 7, 8].

Einstein, reavaliando as ideias acerca do espaço e tempo, conseguiu resolver tal enigma [2, 4, 7, 8], e com seus dois postulados (1-Postulado da relatividade e 2-Postulado da velocidade da luz) mostrou que a relatividade newtoniana não estava totalmente correta [2, 3, 5, 6, 7]. Sua teoria fornece resultados corretos a todas as velocidades possíveis e torna as Equações de Maxwell invariantes e, ainda, previa muitos efeitos estranhos a primeira vista. Porém, o que vem a ser essa famigerada relatividade?

A relatividade é uma área da Física preocupada em estudar a medição correta de eventos (acontecimentos ou pontos do espaço-tempo). Tenta responder quando e onde ocorrem esses

eventos e qual a distância que os separa no espaço e no tempo [3, 6]. Trata da relação entre os valores medidos em referenciais que estejam se movendo um em relação ao outro. A teoria da relatividade é composta por duas teorias bem diferentes: a Relatividade Restrita e a Relatividade Geral [3, 9].

A Relatividade Restrita (1905) apresenta o termo "restrita" para acentuar o limite de sua aplicação, somente em referenciais inerciais (em repouso ou a velocidade constante, nenhum sistema acelerado é um referencial inercial), isto é, onde as Leis de Newton são válidas. O nível matemático para demonstrá-la é fácil, quando comparada à exigência matemática da Relatividade Geral [3]. Isso porque a Relatividade Geral opera em qualquer referencial, seja acelerado ou não, e leva a uma nova formulação dos efeitos gravitacionais. Logo, o rigor matemático é maior, mais abstrato e profundo, sendo necessária a análise tensorial para ser compreendida [9].

É importante aclarar que a Relatividade Restrita não é foco deste trabalho. É necessário a compreensão do formalismo tensorial para observar peculiaridades da teoria da gravitação de Einstein. Sendo assim, o próximo capítulo tem como intuito apresentar características tensoriais relevantes à depreensão do estudo de Einstein acerca da estrutura do espaço-tempo.

2 Peculiaridades introdutórias do cálculo tensorial

Com o passar dos tempos a teoria da relatividade newtoniana cedeu lugar à teoria da gravitação de Einstein (teoria da Relatividade Geral). A evolução do formalismo vetorial acompanhou tal processo, pois um novo cenário estava em pauta: espaços curvos associados a equações diferenciais não-lineares. Nesse sentido, com o desenvolvimento do cálculo tensorial foi possível abrigar o ambiente de estudo de Einstein, o espaço-tempo.

Nesse caso, como a teoria da gravitação é descrita em termos de tensores é imperativo a compreensão da natureza vetorial. Todavia, as minúcias acerca dos vetores não compõe a pauta do presente trabalho. Um exemplo do pressuposto é que a compreensão das componentes contravariante e covariante dos tensores, a saber, depende de um grau de entendimento sobre os vetores. Deve ficar claro que a compreensão vetorial antecede a tensorial, já que os tensores são objetos matemáticos de generalização de vetores [9, 10].

Devido ao amplo campo de atuação dos vetores, há diversas definições para tais objetos. A definição mais comum é: vetores são uma representação matemática de quantidades que apresentam, basicamente, magnitude (módulo), direção e sentido, tal como velocidade e força. Porém, também, podemos definir vetor como um tensor de primeira ordem (A^α ou A_α), isso porque os tensores possuem "n" ordens. Um tensor de ordem zero (A^0), por exemplo, nada mais é que um objeto escalar, isto é, só possui magnitude (módulo). Portanto, objetos escalares e vetoriais são tensores, porém apresentam ordens distintas. Deste modo vetores e escalares são subconjuntos dos tensores [10].

Sendo assim, tensor é um objeto matemático que possui N^m componentes no espaço, N representa o número de dimensões do espaço e m é a ordem do tensor - número de índices. Sendo assim, os tensores, também, generalizam o conceito e a forma geométrica de matriz. Uma forma para ilustrar o pressuposto é considerar, por exemplo, um tensor de segunda ordem $A_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2 e 3$ em um espaço tridimensional. A representação matricial deste objeto conteria ($3^2 = 9$) 9 números, ou seja, uma matriz de três linhas e três colunas (fazendo uso da linguagem da álgebra linear, temos uma matriz com 9 entradas $a_{\alpha\beta}$).

Ademais, é importante termos em mente, que os vetores e, conseqüentemente, os tensores são objetos com componentes que se transformam entre sistemas de coordenadas de modo específico e previsível, fato crucial à Relatividade Geral. Essa reflexão permite-nos notar que os vetores podem ter mais de um tipo de componentes e, esses diferentes tipos de componentes são definidas a partir do seu comportamento em transformação de coordenadas. Nesse sentido, fazemos a seguinte pergunta: O que acontece com um vetor quando ocorre uma mudança de um sistema de coordenadas de S para S' ?

A resposta é simples, nada acontece com a natureza do vetor quando ocorre mudança de sistema de coordenadas. O que pode diferir são suas componentes. Um modo análogo de notar o pressuposto é o que sucede com objetos escalares. Ao medir a temperatura equivalente a zero graus Celsius ou trinta e dois graus Fahrenheit, só há mudança de escala (*sistema), mas o grau de agitação das moléculas (*natureza) é o mesmo para ambos sistemas [10]. Sendo assim, de certo modo, essa característica contribui positivamente à relatividade de Einstein (trata, basicamente, da relação entre os valores de objetos tensoriais medidos em referenciais que estejam se movendo um em relação ao outro).

2.1 Componentes e transformações de tensores

As componentes de um dado vetor são resultados das projeções do vetor em relação a um sistema Cartesiano, por exemplo. Falar de componentes de vetores implica em componentes covariantes e contravariantes. É comum obter tais componentes, porém, muitas vezes, a obtenção é feita "às cegas". Pois a familiarização quanto aos termos faz-se presente quando o conhecimento sobre vetores não é meramente superficial.

As componentes covariantes de um vetor \vec{A} em um plano Cartesiano são A_x e A_y , surgem de projeções perpendiculares do vetor \vec{A} em relação ao eixo x e y . Já as componentes contravariantes de \vec{A} são resultados de projeções paralelas e o índice é super-escrito. Por exemplo: A^x e A^y . A Fig.(1), a seguir, favorece a observação das componentes covariante e contravariante de um dado vetor.

Sistema de Coordenadas (Não – Ortogonal)

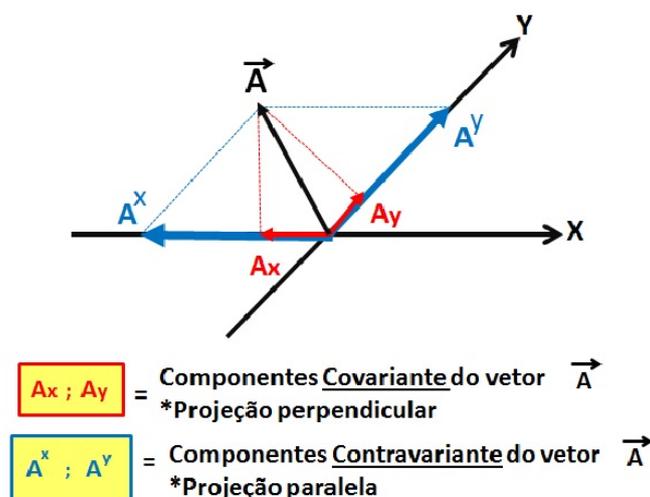


Figura 1 – Componentes contra e covariante [11]

A título de esclarecimento, $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$ pode ser representado por $A_l = (A_x \text{ ou } A_y) = (A_1 \text{ ou } A_2)$. Assim, podemos afirmar que os índices contêm informações a respeito das componentes dos vetores. Como vetor é um caso particular de um tensor, a mesma consideração é válida para os tensores.

A relevância da noção de covariância e contravariância é confirmada na lei de transformação dos tensores. Os tensores podem ser submetidos a mudanças de sistema de coordenadas de S a S' , nesse caso, por exemplo, o objeto $A^{\alpha\beta}$ torna-se $A'^{\alpha\beta}$. Como $A^{\alpha\beta}$ é um objeto tensorial, é obrigatório o mesmo apresentar o seguinte comportamento: $A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\lambda} A^{\gamma\lambda}$ [9, 10].

Todo objeto tensorial deve satisfazer o comportamento exemplificado de S à S' , lei de transformação, do contrário não será um tensor. Para aclarar ainda mais essa lei observe a Fig.(2) e veja na prática a forma geral de definir um tensor de primeira ordem. Podemos expandir a transformação de coordenadas para tensores de ordens superiores, bem como para tensores mistos – tensores que apresentam índices contra e covariantes. Veja a ilustração do pressuposto nas Figs.(3 e 4).

$A'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j$	Tensor covariante de 1ª ordem
$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$	Tensor contravariante de 1ª ordem

Figura 2 – Definição para tensores de 1ª ordem [11]

$A'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} A_{kl}$	Tensor covariante de 2ª ordem
$A'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} A^{kl}$	Tensor contravariante de 2ª ordem

Figura 3 – Definição para tensores de 2ª ordem [11]

$A'^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} A^k_l$	Tensor misto de 2ª ordem
--	---------------------------------

Figura 4 – Definição de um tensor misto de 2ª ordem [11]

De acordo com as Figs.(2, 3 e 4) podemos notar que o número de índices, além de indicar a ordem do tensor, revela o número de derivadas parciais presentes na transformação de coordenadas do objeto em questão.

Como já conhecemos as componentes covariante, contravariante e mista dos tensores podemos aproveitar essa seção para apresentar operações elementares entre os tensores. A

característica simétrica e antissimétrica de tensores será notada várias vezes no decorrer do trabalho, bem como os exemplos de multiplicação que podem ser acompanhados na Fig.(5) a seguir.

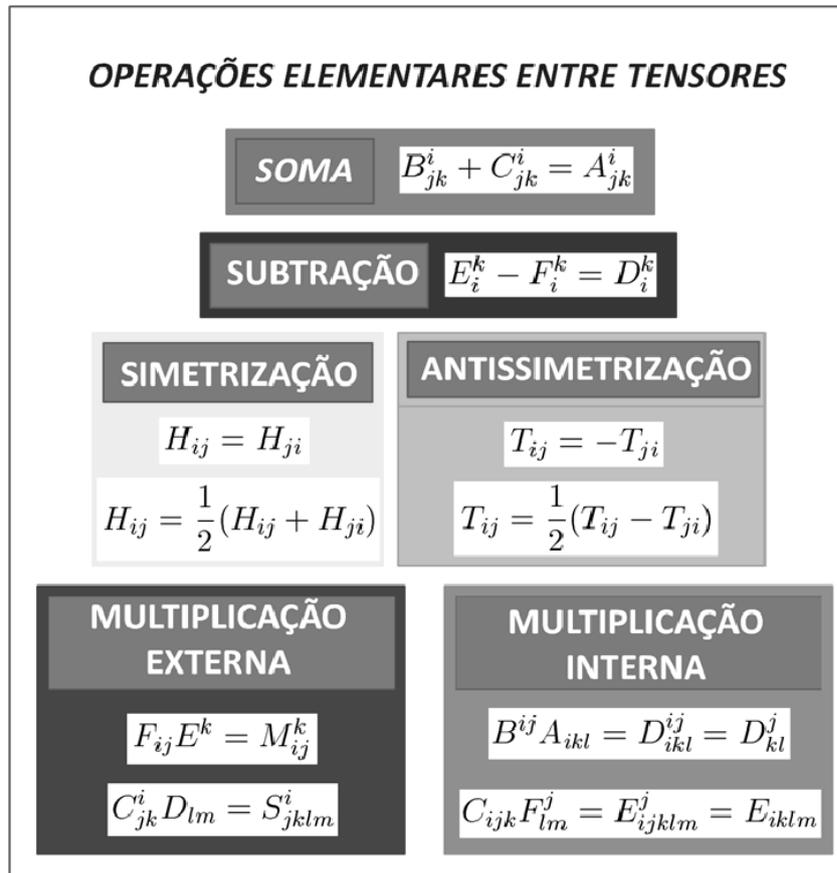


Figura 5 – Simetrização, assimetrização e multiplicação de tensores [11]

Note que na multiplicação externa o produto final é um tensor com ordem igual à soma do número de índices envolvidos na operação. Já na multiplicação interna o produto final é um tensor com ordem inferior à soma do número de índices presentes na operação, ocorre um somatório dos índices covariante e contravariante iguais. Essas operações, de certa forma, explicam o surgimento do tensor de Ricci e o escalar de curvatura, a saber.

Após a apresentação das operações elementares entre tensores, finalizamos essa seção enfatizando que a natureza tensorial dos objetos é preservada quando ocorre mudança de sistema de coordenadas, como já alertado no capítulo 2. Entretanto, uma pergunta fica nas entrelinhas, existe uma relação entre as componentes contravariante e covariante de um mesmo tensor? A resposta é simples: depende da estrutura do espaço temporal e pode ser conferida na próxima seção.

2.2 Espaço métrico e conversão entre componentes tensoriais

Podemos denominar espaço como um conjunto de variáveis contínuas independentes de todos os pontos representados por: $x^1, x^2, \dots, x^N \equiv \{x^\mu\}$, sendo $\mu = 1, 2, \dots, N$. Ademais, sabemos que é possível descrever o espaço x^μ em outro conjunto de variáveis x'^μ , caso análogo ao exemplificado na subseção 2.1. E, novamente, fica claro que ao realizarmos uma transformação de $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ não perderemos nenhuma informação do espaço, o que muda são as componentes. Todavia, podemos recuperá-las fazendo o uso da transformação inversa $x'^\mu \rightarrow x^\mu$ (transformações biunívocas). A descrição de um espaço e o conjunto de todas as suas transformações é conhecida como Geometria [12].

Há espaços nos quais o conceito de vetor (\vec{U}), simplesmente, não existe. Isso ocorre quando as componentes covariante (U_α) e contravariante (U^α) existem separadamente, logo não apresentam um vínculo. O "palco" que abriga esse tipo de situação é chamado de "Espaço Afim" [12]. Por outro lado, há espaços, "Espaços Métricos", que permitem a existência do conceito de vetor (\vec{U}), onde as componentes covariante e contravariante não existem de forma independente, dessa forma apresentam um vínculo capaz de torná-las como grandezas equivalentes [12].

Sendo assim, de fato há espaços que permitem a conversão de um objeto covariante à sua forma contravariante e vice-versa. Essa transformação sempre ocorrerá em um mesmo sistema de coordenadas [10]. Ou seja, não implica em uma transformação de sistema de S para S' . Para realizar tal conversão, basta fazermos uso adequado do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Devido a relevância desse objeto tensorial à gravitação de Einstein, construímos uma subseção dedicada somente a apresentá-lo mesmo que brevemente, vide subseção 2.3.

Para melhor compreensão quanto à transformação de um objeto covariante em contravariante e vice-versa acompanhe a Fig.(6) a seguir.

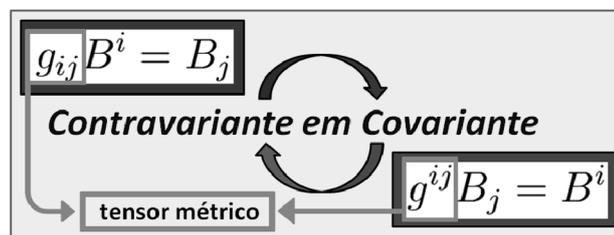


Figura 6 – Exemplo básico do tensor métrico em ação [11]

Logo, para existir um vetor, um tensor, é preciso existir um vínculo entre suas componentes covariante e contravariante, e isso só ocorre em um espaço métrico. A próxima subseção presta informações acerca do tensor métrico, no intuito de evitar uma lacuna que comprometeria a evolução do trabalho, pois os demais objetos, a serem apresentados, dependem do tensor métrico, direta ou indiretamente.

2.3 Tensor métrico

O tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, basicamente, funciona como um operador para elevar e abaixar índices dos tensores. Boa parte dos raciocínios da relatividade de Einstein dependem do auxílio do tensor métrico. Para entendermos melhor a função desse tensor imagine dois pontos separados por uma distância infinitesimal (ds). Esses dois pontos formam um vetor $d\vec{r}$. Logo o quadrado do diferencial elementar de comprimento pode ser escrito como: $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$. O vetor $d\vec{r}$ pode ser reescrito em termos das componentes contravariantes e vetores de bases coordenadas, \vec{e}_μ (e.g., $d\vec{r} = \vec{e}_\mu dx^\mu$). Logo, temos [10]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\vec{r} \cdot d\vec{r}) \\ &= (\vec{e}_\mu dx^\mu \cdot \vec{e}_\nu dx^\nu) \\ &= (\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Recorrendo à geometria euclidiana sabemos que ds^2 pode ser escrito como: $ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (obs.: para melhor compreensão do objeto δ_{ij} vide subseção 3.3). Essa expressão é um caso particular da geometria métrica representada por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, apresentada na Eq.(2.1).

Para um espaço euclidiano, as componentes $g_{\mu\nu}$ em coordenadas Cartesianas são dadas por: $g_{\mu\nu} \equiv (1, 1, 1)$, já em coordenadas esféricas $g'_{\mu\nu} \equiv (1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Para um espaço pseudo-euclideano, espaço-tempo de Minkowski, as coordenadas Cartesianas são (ct, x, y, z) , e o sistema de coordenadas de Minkowski é dado por: $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$.

O quadrado do elemento de linha do espaço-tempo de Minkowski para a assinatura da métrica $(+, -, -, -)$, é $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ e, para $(-, +, +, +)$, é $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Note que na assinatura da métrica apenas a coordenada t apresenta sinal oposto as demais. Quando a coordenada t é positiva as demais serão negativas. O contrário também vale. Podemos escrever essa métrica na forma tensorial, $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, sendo que $\eta_{\mu\nu}$ é a componente covariante do tensor métrico de Minkowski. A título de esclarecimento, como $\eta_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem ligado a um espaço-tempo quadrimensional ($4^2 = 16$ componentes), teremos um matriz com 16 entradas, que representam as componentes de tal tensor. A matriz formada por $\eta_{\mu\nu}$ em um espaço de quatro dimensões, para $c = 1$, é dada por [9]:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \text{ com a assinatura: } (+, -, -, -). \quad (2.2)$$

Quando se trata de espaços riemannianos as componentes do tensor métrico representam a solução para uma dada geometria do espaço-tempo, obtida a partir do tensor de Einstein

$G_{\mu\nu}$, a saber. Por exemplo, uma das soluções mais famosas para o caso $G_{\mu\nu} = 0$ é a solução de Schwarzschild. Com base em coordenadas esféricas, (ct, r, θ, ϕ) , levando em conta outra assinatura da métrica $(-, +, +, +)$, tal solução é dada por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \left(- \left(1 - \frac{2m^*}{r} \right), \left(1 - \frac{2m^*}{r} \right)^{-1}, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta \right), \quad (2.3)$$

sendo que $m^* = \frac{MG}{c^2}$ é chamada de massa geométrica, apresenta unidade de comprimento.

Lembramos que esta explicação em torno do espaço riemanniano configura-se como um mero prenúncio de uma das principais pautas do presente trabalho. Ademais, as subseções a seguir tratam dos tensores que compõem o principal tensor da gravitação. Sendo este o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, que descreve a geometria do espaço-tempo em termos do conteúdo de energia e momento. Será possível notar que os objetos tensoriais que estruturam o comportamento de $G_{\mu\nu}$ dependem do tensor métrico. O primeiro a ser abordado é o tensor de curvatura ou tensor de Riemann. No capítulo a seguir mostramos a construção deste objeto.

3 Derivada covariante e tensor de curvatura

3.1 Derivada covariante

A derivada covariante é uma maneira de diferenciar um vetor ou um tensor de ordem superior, que considera os prováveis efeitos de mudança na magnitude e direção dos vetores de bases matematicamente, representam "palmas" dos vetores no espaço, apontam ao longo dos eixos de um sistema de coordenada e podem ser descritos em um outro sistema de coordenadas por meio de derivadas parciais usadas para gerar novos tensores [10].

A derivada em questão é rotulada por derivada covariante (∇_α). Sua aplicação está presente desde espaços euclidianos até espaços curvos riemannianos da Relatividade Geral. Portanto, está ligada ao conceito de transporte paralelo, ou seja, transportar um vetor sem provocar mudança na magnitude e direção. A importância de tal transporte está no fato de possibilitar a combinação e comparação de vetores expressados em distintas localizações ligadas pelo mesmo espaço.

Dessa forma, a derivada covariante ajuda generalizar o conceito de transporte paralelo, pois em espaços curvos é difícil cumprir a exigência do mesmo. Por conseguinte, nesses espaços o conceito de transporte paralelo passa ser definido como sendo o transporte pelo qual a derivada covariante é igual a zero. Entretanto, uma pergunta está no ar, qual seria a trajetória pertinente a cumprir a exigência do transporte paralelo em um espaço curvo? Uma trajetória geodésica, curva de menor comprimento que liga dois pontos no espaço, permite o êxito do intento pressuposto.

O conceito de derivada covariante é crucial na construção de um dos principais tensores da teoria da gravitação de Einstein: o tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel ou, simplesmente, tensor de Riemann. Visando facilitar o entendimento do processo de uma derivada covariante, criamos duas ilustrações. Acompanhe a Fig.(7) e veja que a derivada covariante é composta de dois termos: o primeiro é uma derivada parcial e o segundo envolve o símbolo de Christoffel (conexão métrica $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$), responsável por descrever mudanças nas bases do vetor ou tensor.

Observando a Fig.(7), notamos a importância da conexão métrica $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Dependendo do comportamento dessa conexão é possível que a derivada covariante de algum objeto tensorial gere um novo tensor. Por isso, a seguinte afirmação "a derivada covariante gera novos tensores" é válida quando a conexão possui o comportamento do símbolo de Christoffel, como se segue:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}). \quad (3.1)$$

Os índices a , b , c e d na expressão Eq.(3.1) foram usados no intuito de facilitar a compreensão quanto a comportamento e posição de cada índice dentro da estrutura da expressão.

Poderiam ser quaisquer outros, por exemplo: i, j, k e l . A Fig.(7) também ilustra o fato do símbolo de Christoffel não ser um tensor, pois não satisfaz a lei de transformação dos tensores vista nas Figs.(2, 3 e 4).

Construção da Derivada Covariante ∇_j

$\vec{A} = A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3 \quad i = 1, 2 \text{ e } 3$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^j} = \frac{\partial (A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3)}{\partial x^j} = \frac{\partial (A^i \vec{e}_i)}{\partial x^j}$$

$$\frac{\partial (A^i \vec{e}_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial (A^i)}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i \frac{\partial (\vec{e}_i)}{\partial x^j} \quad \frac{\partial (\vec{e}_i)}{\partial x^j} = (\Gamma_{ij}^k) \vec{e}_k$$

$\nabla_j (A^i \vec{e}_i) = \frac{\partial (A^i)}{\partial x^j} \vec{e}_i + A^i (\Gamma_{ij}^k) \vec{e}_k \neq$

$A^i (\Gamma_{ij}^k) \vec{e}_k = A^k (\Gamma_{kj}^i) \vec{e}_i$

$\nabla_j (A^i \vec{e}_i) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma_{kj}^i \right) \vec{e}_i$

Derivada parcial Conexão

A Derivada Covariante é diferente da Derivada Parcial. A partir da construção feita, note que a derivada covariante apresenta termo com derivada parcial e outro com conexão.

Algumas considerações:

A Derivada Covariante pode ser simbolizada de duas formas $\nabla_j (A^i) = A^i{}_{;j}$

$$\nabla_j (A^i \vec{e}_i) = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma_{kj}^i \right) \vec{e}_i$$

Derivada parcial Conexão

Símbolo de Christoffel $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})$

$$\Gamma_{bc}^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} \frac{\partial x^c}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^d}{\partial x^{c'}} \Gamma_{ef}^{a'} \frac{\partial x^d}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^e}{\partial x^{c'}} \frac{\partial^2 x^{a'}}{\partial x^d \partial x^e}$$

Transformando o Símbolo de Christoffel de um sistema S para S'. Poderia ser um Tensor se não tivesse o segundo termo.

Assim, a derivada covariante gera novos tensores:

$$\nabla_j (A_{\underline{i}}) = \frac{\partial A_{\underline{i}}}{\partial x^j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - A_{\sigma} \Gamma_{ij}^{\sigma} = A_{\underline{i}j}$$

$$\nabla_j (A^{\underline{i}}) = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^k \Gamma_{kj}^i = A^{\underline{i}j}$$

Figura 7 – Derivada covariante [11]

Outra característica ainda não esclarecida é que, ao contrário das derivadas parciais, as derivadas covariantes não comutam. Por exemplo, ao trocarmos a ordem dos índices nas derivadas parciais não alteramos o resultado, por exemplo:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} = 0. \quad (3.2)$$

Note que nesse exemplo fizemos uma permutação dos índices β e γ e essa permutação não alterou o resultado. Já em relação as derivadas covariantes, uma simples permutação de índices altera os resultados, pois gera termos diferentes, logo, não serão anulados. Graças a essa peculiaridade da derivada covariante surge o tensor de curvatura ($R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}$), que será tratado na próxima seção.

3.2 Tensor de curvatura

O tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel, $R^\lambda_{\sigma[\mu\nu]}$, é um objeto tensorial de quarta ordem, antissimétrico nos dois últimos índices descrito por:

$$R^\lambda_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}, \tag{3.3}$$

sendo

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ e } \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{3.4}$$

Esse objeto descreve a curvatura do espaço-tempo tendo ele um número qualquer de dimensões [13]. Surge graças a uma peculiaridade do operador derivada covariante, que foi esclarecida na seção anterior. Para construir esse objeto consideramos: $\nabla_\nu V_{\sigma\mu} \neq \nabla_\mu V_{\sigma\nu}$. Sabemos que a derivada covariante de um tensor pode gerar um novo tensor, podemos considerar que $\nabla_\nu V_{\sigma\mu}$ gera um tensor $V_{\sigma\mu\nu}$. Sendo assim, podemos reescrever $\nabla_\nu V_{\sigma\mu} \neq \nabla_\mu V_{\sigma\nu}$ como:

$$\begin{aligned} V_{\sigma\mu\nu} &\neq V_{\sigma\nu\mu} \longrightarrow V_{\sigma\mu\nu} - V_{\sigma\nu\mu} \neq 0 \\ V_{\sigma\mu\nu} - V_{\sigma\nu\mu} &= \underbrace{R^\lambda_{\sigma\mu\nu}}_{\text{tensor de curvatura}} V_\lambda. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A construção do objeto em pauta pode ser acompanhada nas Figs.(8 a 10) a seguir.

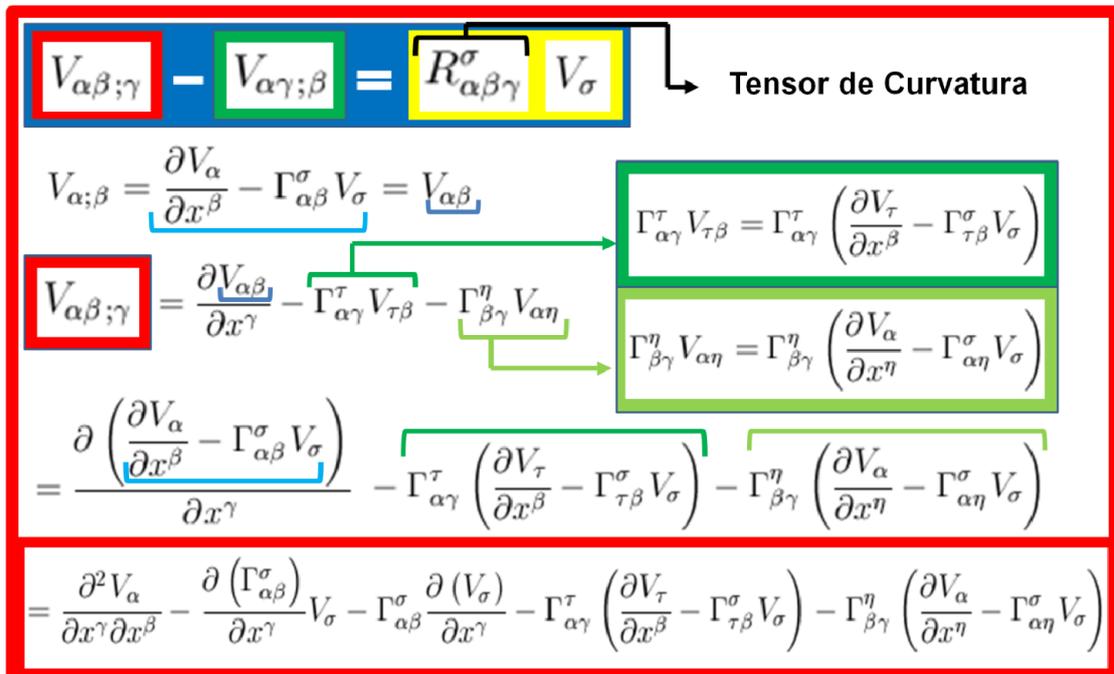


Figura 8 – Construção de $V_{\alpha\beta;\gamma} = V_{\alpha\beta\gamma}$ [11]

$$\begin{aligned}
 & \boxed{V_{\alpha\beta;\gamma}} - \boxed{V_{\alpha\gamma;\beta}} = \boxed{R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}} \boxed{V_{\sigma}} \quad \text{Tensor de Curvatura} \\
 & V_{\alpha;\gamma} = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} = \boxed{V_{\alpha\gamma}} \\
 & \boxed{V_{\alpha\gamma;\beta}} = \frac{\partial V_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} V_{\tau\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} V_{\alpha\eta} \\
 & \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} V_{\tau\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\tau\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} \right) \\
 & \quad \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} V_{\alpha\eta} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\sigma} V_{\sigma} \right) \\
 & = \frac{\partial \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} \right)}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\tau\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} \right) - \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\sigma} V_{\sigma} \right) \\
 & = \frac{\partial^2 V_{\alpha}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial (\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma})}{\partial x^{\beta}} V_{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} \frac{\partial (V_{\sigma})}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\tau\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} \right) - \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\sigma} V_{\sigma} \right)
 \end{aligned}$$

Figura 9 – Construção de $V_{\alpha\gamma;\beta} = V_{\alpha\gamma\beta}$ [11]

$$\begin{aligned}
 & \boxed{V_{\alpha\beta;\gamma}} - \boxed{V_{\alpha\gamma;\beta}} = \boxed{R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma}} \boxed{V_{\sigma}} \quad \text{Tensor de Curvatura} \\
 & = \frac{\partial^2 V_{\alpha}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial (\Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma})}{\partial x^{\beta}} V_{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma} \frac{\partial (V_{\sigma})}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\tau\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} \right) - \Gamma_{\gamma\beta}^{\eta} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\sigma} V_{\sigma} \right) \\
 & \quad \neq \quad \neq \quad = \quad = \quad \neq \quad = \\
 & = \frac{\partial^2 V_{\alpha}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}} - \frac{\partial (\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma})}{\partial x^{\gamma}} V_{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \frac{\partial (V_{\sigma})}{\partial x^{\gamma}} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau} \left(\frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma} V_{\sigma} \right) - \Gamma_{\beta\gamma}^{\eta} \left(\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\eta}} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\sigma} V_{\sigma} \right) \\
 & \boxed{V_{\alpha\beta;\gamma}} - \boxed{V_{\alpha\gamma;\beta}} = \text{Tensor de Curvatura} \\
 & = -\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} V_{\sigma} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} V_{\sigma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau} \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma} V_{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \Gamma_{\tau\gamma}^{\sigma} V_{\sigma} \\
 & \boxed{V_{\alpha\beta;\gamma}} - \boxed{V_{\alpha\gamma;\beta}} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau} \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \Gamma_{\tau\gamma}^{\sigma} \right) V_{\sigma} \quad \text{Tensor de Curvatura}
 \end{aligned}$$

Figura 10 – Construção do tensor de curvatura $V_{\alpha\gamma\beta} - V_{\alpha\beta\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma} V_{\sigma}$ [11]

De fato conseguimos obter o comportamento do tensor de Riemann a partir da não comutatividade da derivada covariante de um tensor de segunda ordem covariante, como mostram as Figs.(8 a 10). O tensor de curvatura é responsável pela gênese de dois objetos tensoriais importantes para a relatividade, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Na próxima seção abordamos a

construção de tais objetos que dependem de uma operação semelhante, a multiplicação interna entre tensores, vista na seção 2.1.

3.3 Tensor de Ricci e escalar de curvatura

Nessa seção será necessário introduzir uma nova operação entre os tensores chamada Contração Interna para construir o tensor de Ricci. Essa operação depende de um novo objeto chamado Delta de Kronecker e representado por: δ_{β}^{α} . O Delta de Kronecker surge do produto interno entre as componentes do Tensor Métrico (e.g., $g_{\mu\beta}g^{\mu\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, análogo ao produto de uma matriz pela sua inversa) e opera de acordo com as seguintes condições:

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = \beta \longrightarrow \text{não anula o objeto estiver acompanhado,} \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \longrightarrow \text{anula o objeto que estiver acompanhado.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Com esse objeto podemos obter o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ a partir de uma contração interna do tensor de curvatura ($R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}$) nos índices λ e μ . Veja:

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}\delta_{\lambda}^{\mu} &= \underbrace{\left[R_{\sigma 1\nu}^{\lambda}\delta_{\lambda}^1 \right]} + \underbrace{\left[R_{\sigma 2\nu}^{\lambda}\delta_{\lambda}^2 \right]} + \dots \\ &= \underbrace{R_{\sigma 1\nu}^1\delta_1^1 + R_{\sigma 1\nu}^2\delta_2^1 + \dots}_{\alpha=\beta, \delta=1} + \underbrace{R_{\sigma 1\nu}^1\delta_1^2 + R_{\sigma 2\nu}^2\delta_2^2 + \dots}_{\alpha=\beta, \delta=1} + \underbrace{\dots}_{\alpha \neq \beta, \delta=0} \\ &= [R_{\sigma 1\nu}^1] + [R_{\sigma 2\nu}^2] + \dots \\ &= R_{\sigma\nu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sendo assim podemos afirmar que o tensor de Ricci é a forma reduzida do tensor de Riemann, logo temos [9]:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} = g^{\mu\alpha}R_{\alpha\sigma\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Para obter o escalar de curvatura, R , basta realizar a multiplicação interna pertinente entre o tensor de Ricci e o tensor métrico, conforme apresentamos a seguir:

$$R = g^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu}. \quad (3.9)$$

Como podemos ver o escalar de curvatura surge de uma contração total dos índices do tensor métrico com os do tensor de Ricci. A importância destes objetos, tensor de Ricci e escalar de curvatura, está no fato dos mesmos comporem a estrutura do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, os detalhes ligados a este objeto tensorial serão vistos no próximo capítulo.

4 Tensor de Einstein

Graça aos objetos tensoriais, Einstein conseguiu formular uma expressão tensorial, descrita pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, para obter informações acerca da geometria do espaço-tempo. Basicamente, é possível afirmar que o tensor de Einstein apresenta dois formatos: um dos formatos depende, explicitamente, do tensor de Ricci, do tensor métrico e do escalar de curvatura, veja a seguir:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (4.1)$$

O outro formato para o tensor de Einstein sintetiza o principal resultado da Relatividade Geral: a relação entre geometria e matéria/energia. Isso porque o tensor $G_{\mu\nu}$ pode ser descrito em termos do tensor de energia-momento, $T_{\mu\nu}$, objeto que armazena informações acerca das propriedades físicas da distribuição da matéria [9]. Todas essas informações estão sintetizadas na famosa equação de Einstein da Relatividade Geral:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Graças à constante de acoplamento ou constante gravitacional de Einstein [13], $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, que depende da constante de gravitação universal G , os resultados da relatividade de Einstein podem retornar aos da gravitação de Newton. Nesse sentido, podemos afirmar que a teoria da gravitação de Einstein é uma generalização da gravitação de Newton.

Observando a Eq.(4.2), sabemos que $G_{\mu\nu} = 0$ implica em $T_{\mu\nu} = 0$, indica que o local do espaço-tempo analisado não apresenta energia e nem momento, isto é, só há geometria neste ponto do espaço-tempo. Essa geometria só poderá ser plana quando a localização do ponto escolhido tender ao infinito em relação à matéria (e.g., quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, tensor métrico igual ao tensor métrico de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, representa espaço pseudo-euclidiano, isto é plano). Caso contrário a geometria será curva. Isto é, quando tomarmos um ponto do espaço-tempo próximo (vizinhança) a uma matéria, a geometria é curva (e.g., $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$), pois a matéria/energia curva o espaço-tempo.

Observamos outra consideração a partir de $T_{\mu\nu} = 0$. Definitivamente, o ponto do espaço que está sendo analisado não está sobre uma matéria/energia, do contrário $T_{\mu\nu} \neq 0$. Nesse sentido, podemos afirmar que para cada matéria há um tensor de energia-momento associado e ao tomarmos um dado ponto no espaço-tempo, o resultado de $T_{\mu\nu}$ é importante, pois indicará a presença ou não de matéria/energia naquele ponto de análise.

Também, é possível provar que $G_{\mu\nu} = 0$ leva a $R_{\mu\nu} = 0$. Considerando a Eq.(4.1) igual a zero, em quatro dimensões, temos:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}_R - \underbrace{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}_4 \frac{R}{2} = 0 \\ &= R - 4\frac{R}{2} = 0 \\ &= -2R = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituímos $R = 0$ na Eq.(4.1) e obtemos:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \overbrace{\frac{R}{2}}^0 = 0 \longrightarrow R_{\mu\nu} = 0. \quad (4.5)$$

Antes de darmos sequência, sabemos que $G_{\mu\nu}$ apresenta caráter essencialmente geométrico, pois depende somente de $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas. Sabemos, ainda, que a curvatura de um espaço é uma característica própria do espaço, então independe de um peculiar sistema de coordenadas no qual podemos expressar $g_{\mu\nu}$. Nesse caso, para um espaço ser rotulado como curvo, é preciso que em pelo menos um ponto do espaço-tempo o tensor $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda$ não seja anulado. Façamos uma pergunta, qual métrica do espaço-tempo curvo seria capaz de gerar $R_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu}$? A resposta para essa questão é encontrada na próxima seção.

4.1 Métrica de Schwarzschild

Para encontrar uma métrica do espaço-tempo curvo capaz de satisfazer $R_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu}$ vamos considerar uma métrica esférica espacial geral:

$$ds^2 = C(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 + D(r)dt^2. \quad (4.6)$$

Observe que as funções $C(r)$ e $D(r)$ não estão definidas. Além disso, podemos observar que as componentes do tensor métrico compõem uma matriz diagonal, cujos valores das entradas são:

$$g_{11} = C(r), \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \text{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad g_{44} = D(r). \quad (4.7)$$

Nesse sentido, estamos em busca da solução de Schwarzschild, a primeira solução encontrada para o caso de $G_{\mu\nu} = 0$. A métrica de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right) dr^2 + r^2 d^2\theta + r^2 \text{sen}^2\theta d^2\phi - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2. \quad (4.8)$$

Basicamente, a solução de Schwarzschild trata de um campo gravitacional assintoticamente plano provocado por uma simetria esférica, estacionária e estática [9].

O processo explícito para obter a referida solução foi desenvolvido no presente trabalho. Tomamos a métrica, Eq.(4.6), e sabendo que o tensor de Ricci depende do tensor de Riemann, que por sua vez, depende dos símbolos de Christoffel, obtemos resultados compatíveis ao software Maple, acoplado ao pacote GRTensorII. Vale grifar que programas computacionais, como os citados, são úteis para operações extensas, por exemplo. Sendo assim, vamos esclarecer primeiro o procedimento computacional e posteriormente o analítico.

4.1.1 Maple e GRTensorII

O software Maple [14] e o pacote GRTensorII [15] foram ferramentas de grande valia para o desenvolvimento desse projeto. A princípio precisávamos encontrar $R_{\mu\nu} = 0$ para satisfazer $G_{\mu\nu} = 0$ e o processo matemático envolvido nessa atividade é extenso. O tensor de Riemann $R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu}$ evidencia o pressuposto, trata-se de um tensor antissimétrico de quarta ordem [9], portanto, em um espaço quadridimensional apresenta 256 componentes ($4^4 = 256$).

Vale grifar que o leque de funções que o Maple possibilita é vasto e pode ser explorado com certo grau de facilidade, graças aos tutoriais, por exemplo. O pacote GRTensorII foi utilizado para oportunizar a realização de cálculos tensoriais no Maple. Com esse pacote foi possível, basicamente: **(i)** inserir a métrica a ser trabalhada, a Eq.(4.6); **(ii)** calcular as componentes do tensor de Riemann; **(iii)** calcular os símbolos de Christoffel envolvidos e por fim **(iiii)** encontrar as componentes não nulas do tensor de Ricci.

Com os programas, devidamente, instalados passamos a utilizá-los em favor do fator comparação entre os cálculos analíticos e os computacionais. Na primeira linha de comando do Maple inserimos o comando *restart*; para iniciar as atividades, em seguida, na segunda linha inserimos o comando *grtw()*; para o Maple usar o pacote GrTensorII.

O próximo comando estava relacionado com a métrica. O pacote GRTensorII conta com uma série de métricas prontas para o uso, todavia a que usamos não estava presente. Entretanto, esse pacote permite inserir qualquer métrica. Sendo assim, incluímos a métrica, Eq.(4.6), no programa e a salvamos. Nesse sentido, o comando usado para o Maple usar a métrica em questão foi o *gload()*; dentro do parênteses escrevemos o nome no qual a métrica foi salva. O software fazia o reconhecimento da métrica e, posteriormente, digitávamos o comando para calcular o tensor de Riemann, *grcalc(R(up, dn, dn, dn))*; Logo em seguida, o Maple mostrava o tempo que fora levado para calcular as 256 componentes do objeto em questão (menos de 1 segundo), a rapidez era um fator comum nos cálculos.

Para vermos os resultados das componentes do tensor de Riemann, inserimos o comando *grdisplay()*; O processo para calcular os símbolos de Christoffel e o tensor de Ricci foi análogo

ao feito para o tensor de Riemann, porém o comando usado para o símbolo de Christoffel foi o $grcalc(Chr2)$; e para o tensor de Ricci $grcalc(R(dn,dn))$;

Sendo assim, é nítido que os softwares em destaque, quando bem administrados são ferramentas que otimizam os cálculos e oportunizam a comparação dos resultados analíticos com os computacionais. Porém é preciso estar atento a alguns detalhes que podem comprometer a interpretação do resultado como, por exemplo, qual a assinatura, $(-, -, -, +)$ ou $(+, +, +, -)$ para $(r, \theta, \phi$ e $ct)$, que o programa está tomando como referência (o comando usado para descobrir qual a assinatura é $grdisplay(sig)$). Detalhes como o ilustrado, por evitar confusões e/ou equívocos no momento das comparações dos resultados, são cruciais para o sucesso dos cálculos.

Concluído o procedimento computacional, essencial para o fator comparação com o resultado analítico, podemos seguir com o procedimento analítico em busca da métrica que satisfaz $G_{\mu\nu} = 0$.

4.1.2 Procedimento analítico para obter a solução de Schwarzschild

Nosso ponto de partida foi agraciado pela característica antissimétrica do tensor de Riemann, pois nos concede o resultado imediato de 64 componentes desse tensor, logo o número de componentes que ainda precisam ser definidas decai de 256 para 192 componentes! Como $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = -R_{\sigma\nu\mu}^\lambda$ [9], se $\mu = \nu$ temos:

$$R_{\sigma\nu\nu}^\lambda = -R_{\sigma\nu\nu}^\lambda \Leftrightarrow R_{\sigma\nu\nu}^\lambda = 0. \quad (4.9)$$

A operação expressa acima esclarece, simplesmente, que quando os dois últimos índices do tensor de Riemann forem iguais, Eq.(4.9), a componente em questão será nula. Sendo assim, como o espaço é quadridimensional, todos os índices variam de 0 a 3 (t, r, θ e ϕ), convenção geral adotada nas literaturas, de forma que as métricas são escritas na ordem $(t, r, \theta$ e $\phi)$ [9]. Ou variam de 1 a 4 (r, θ, ϕ e t), compatível com a ordem adotada pelo software Maple. Adotamos a variação dos índices de 1 a 4 para estabelecermos compatibilidade com o software usado.

Sendo assim, sabemos que $R_{\sigma\nu\nu}^\lambda$ resultará em 64 componentes nulas, pois λ e σ variam de 1 a 4, bem como $\nu\nu$, logo temos $(4 \times 4 \times 4 = 64$ componentes). Ademais, os cálculos para determinar as 192 componentes podem ser reduzidos pela metade. Deste modo, graças à característica antissimétrica do tensor em questão, só precisávamos calcular 96 componentes específicas. Só para ilustrar esse fato, note que se conhecemos a componente R_{123}^1 , automaticamente, conhecemos a componente R_{132}^1 , pois $R_{123}^1 = -R_{132}^1$. Sendo assim, para o tensor de Riemann temos os

seguintes objetos:

$$\begin{array}{cccc}
R_{112}^\lambda = -R_{121}^\lambda & R_{221}^\lambda = -R_{212}^\lambda & R_{331}^\lambda = -R_{313}^\lambda & R_{441}^\lambda = -R_{414}^\lambda \\
R_{113}^\lambda = -R_{131}^\lambda & R_{223}^\lambda = -R_{232}^\lambda & R_{332}^\lambda = -R_{323}^\lambda & R_{442}^\lambda = -R_{424}^\lambda \\
R_{114}^\lambda = -R_{141}^\lambda & R_{224}^\lambda = -R_{242}^\lambda & R_{334}^\lambda = -R_{343}^\lambda & R_{443}^\lambda = -R_{434}^\lambda \\
R_{123}^\lambda = -R_{132}^\lambda & R_{231}^\lambda = -R_{213}^\lambda & R_{321}^\lambda = -R_{312}^\lambda & R_{421}^\lambda = -R_{412}^\lambda \\
R_{124}^\lambda = -R_{142}^\lambda & R_{241}^\lambda = -R_{214}^\lambda & R_{341}^\lambda = -R_{314}^\lambda & R_{431}^\lambda = -R_{413}^\lambda \\
R_{143}^\lambda = -R_{134}^\lambda & R_{243}^\lambda = -R_{234}^\lambda & R_{342}^\lambda = -R_{324}^\lambda & R_{423}^\lambda = -R_{432}^\lambda
\end{array} \quad (4.10)$$

Observe que mantemos o índice λ no intuito de oportunizar uma apresentação sucinta acerca do número de componentes. Para aclarar esse detalhe, considere o objeto R_{112}^λ , tomamos ele como representante de um grupo de quatro componentes, cujos índices covariantes $(\sigma\mu\nu)$ são 1, 1 e 2 ($R_{112}^1, R_{112}^2, R_{112}^3$ e R_{112}^4). Nesse sentido, cada um dos 48 objetos supracitados representa 4 componentes do tensor, logo 192 componentes estão em pauta.

Para obtermos a expressão de cada uma das componentes, precisamos considerar, a princípio, o comportamento do tensor de Riemann ($R_{\sigma\mu\nu}^\lambda$) Eq.(3.3) e do símbolo de Christoffel Eq.(3.1). Sendo assim, para exemplificar o processo de obtenção de uma componente do tensor de Riemann vamos considerar a componente R_{114}^4 :

$$R_{114}^4 = \frac{\partial \Gamma_{14}^4}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^4}{\partial x^4} + \Gamma_{14}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^4 - \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^4. \quad (4.11)$$

Como podemos notar a expressão da componente R_{114}^4 depende de vários símbolos de Christoffel. Deste modo, devemos obter os valores para cada um desses objetos e, como já sabemos o comportamento do símbolo de Christoffel, Eq.(3.1), basta conhecermos as componentes do tensor métrico, Eq.(4.7). Note que os símbolos de Christoffel envolvidos na componente R_{114}^4 da Eq.(4.11) são: $\Gamma_{14}^4, \Gamma_{11}^4, \Gamma_{14}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^4$ e $\Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^4$. Todavia, os dois últimos objetos não estão bem definidos, os índices α estão idicando um somatório (notação de Einstein). O objeto $\Gamma_{14}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^4$ é expresso por:

$$\Gamma_{14}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^4 = \Gamma_{14}^1 \Gamma_{11}^4 + \Gamma_{14}^2 \Gamma_{21}^4 + \Gamma_{14}^3 \Gamma_{31}^4 + \Gamma_{14}^4 \Gamma_{41}^4. \quad (4.12)$$

O processo para $\Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{\alpha 4}^4$ é análogo à Eq.(4.12). Sendo assim, é nítido que há vários símbolos de Cristoffel envolvidos na componente R_{114}^4 . A propósito, é importante salientar que apesar do número de símbolos de Christoffel envolvidos, o processo para obtê-los é análogo ao que será ilustrado a seguir. Selecionamos Γ_{14}^4 para exemplificar o processo, veja:

$$\Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2} g^{4\alpha} (\partial_1 g_{\alpha 4} + \partial_4 g_{\alpha 1} - \partial_\alpha g_{14}) = \underbrace{\frac{1}{2} g^{4\alpha} \partial_1 g_{\alpha 4}}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{2} g^{4\alpha} \partial_4 g_{\alpha 1}}_{(II)} - \underbrace{\frac{1}{2} g^{4\alpha} \partial_\alpha g_{14}}_{(III)} \quad (4.13)$$

$$(I) = \frac{1}{2} g^{41} \partial_1 g_{14} + \frac{1}{2} g^{42} \partial_1 g_{24} + \frac{1}{2} g^{43} \partial_1 g_{34} + \frac{1}{2} g^{44} \partial_1 g_{44},$$

$$(II) = \frac{1}{2} g^{41} \partial_4 g_{11} + \frac{1}{2} g^{42} \partial_4 g_{21} + \frac{1}{2} g^{43} \partial_4 g_{31} + \frac{1}{2} g^{44} \partial_4 g_{41},$$

$$(III) = \frac{1}{2}g^{41}\partial_1g_{14} + \frac{1}{2}g^{42}\partial_2g_{14} + \frac{1}{2}g^{43}\partial_3g_{14} + \frac{1}{2}g^{44}\partial_4g_{14}.$$

Antes de prosseguir devemos relembrar e esclarecer alguns detalhes. Sabemos que as componentes do tensor métrico compõem uma matriz diagonal, cujos valores das entradas da diagonal principal podem ser definidos com base na métrica tomada como referência, Eq.(4.6). Assim, temos: $g_{11} = C(r)$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2\text{sen}^2\theta$ e $g_{44} = D(r)$. Deste modo, por ser uma matriz diagonal, as demais entradas são nulas (sempre que os índices covariantes $(\mu\nu)$ forem distintos $(\mu \neq \nu)$ a componente em pauta será nula). Outro detalhe é que o tensor métrico possui componentes contravariantes, $g^{\mu\nu}$, isto é, com índices contravariantes. Portanto, vale grifar que $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$, logo podemos afirmar que as componentes contravariantes são:

$$g^{11} = \frac{1}{C(r)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2\text{sen}^2\theta} \quad \text{e} \quad g^{44} = \frac{1}{D(r)}. \quad (4.14)$$

Sendo assim, como conhecemos tanto as componentes covariantes como as contravariantes do tensor métrico agora podemos encontrar os valores para (I), (II) e (III) de Γ_{14}^4 :

$$\begin{aligned} \bullet \Gamma_{14}^4 &= \underbrace{\frac{1}{2}g^{4\alpha}\partial_1g_{\alpha 4}}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{2}g^{4\alpha}\partial_4g_{\alpha 1}}_{(II)} - \underbrace{\frac{1}{2}g^{4\alpha}\partial_{\alpha}g_{14}}_{(III)}, \\ (I) &= \frac{1}{2}g^{44}\partial_1g_{44} = \frac{1}{2}\frac{1}{D(r)}\partial_r D(r), \quad (II) = 0, \quad (III) = 0, \\ \Gamma_{14}^4 &= (I) + (II) - (III) = \frac{1}{2D(r)}\partial_r D(r). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Obtemos o resultado para Γ_{14}^4 , mas na verdade, também, obtemos o resultado para Γ_{41}^4 , isso porque o símbolo de Christoffel é um objeto simétrico ($\Gamma_{\beta\tau}^{\sigma} = \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma}$) [9], logo $\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4$. Seguindo processo análogo ao exemplificado, calculamos cada um dos símbolos de Christoffel envolvidos na componente R_{114}^4 e, os não nulos foram: $\Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2D(r)}\partial_r D(r) = \Gamma_{41}^4$ e $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2C(r)}\partial_r C(r)$. É importante grifar que no software usado os índices aparecem em termos de 1 a 4, porém aparecem na forma equivalente, ou seja, $(r, \theta, \phi$ e $t)$. Sendo assim, podemos definir a expressão para a componente R_{114}^4 :

$$\begin{aligned} R_{114}^4 &= \frac{\partial\Gamma_{14}^4}{\partial x^1} - \overbrace{\frac{\partial\Gamma_{11}^4}{\partial x^4}}^0 + \Gamma_{14}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 1}^4 - \Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 4}^4 \\ &= \frac{\partial\left(\frac{1}{2D(r)}\partial_r D(r)\right)}{\partial r} + \underbrace{\Gamma_{14}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 1}^4}_{\Gamma_{14}^{\alpha}\Gamma_{41}^{\alpha}} - \underbrace{\Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{\alpha 4}^4}_{\Gamma_{11}^1\Gamma_{14}^4} \\ &= \frac{\partial\left(\frac{1}{2D(r)}\partial_r D(r)\right)}{\partial r} + \left(\frac{\partial_r D(r)}{2D(r)}\right)^2 - \frac{\partial_r C(r)\partial_r D(r)}{4C(r)D(r)} \\ &= \partial_r\left(\frac{1}{2D(r)}\right)\partial_r D(r) + \frac{1}{2D(r)}\partial_r^2 D(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\partial_r \left(\frac{1}{2D(r)} \right)}_{(2D(r))^{-1}} \partial_r D(r) + \frac{1}{2D(r)} \partial^2 r D(r) + \left(\frac{\partial_r D(r)}{2D(r)} \right)^2 - \frac{\partial_r C(r) \partial_r D(r)}{4C(r)D(r)} \\
&= -(2D(r))^{-2} \partial_r (2D(r)) \partial_r D(r) + \frac{\partial^2 r D(r)}{2D(r)} + \left(\frac{\partial_r D(r)}{2D(r)} \right)^2 - \frac{\partial_r C(r) \partial_r D(r)}{4C(r)D(r)} \\
&= -\frac{2\partial_r D(r) \partial_r D(r)}{4D(r)^2} + \frac{\partial^2 r D(r)}{2D(r)} + \left(\frac{\partial_r D(r)}{2D(r)} \right)^2 - \frac{\partial_r C(r) \partial_r D(r)}{4C(r)D(r)} \\
&= -\frac{(\partial_r D(r))^2}{2D(r)^2} + \frac{\partial^2 r D(r)}{2D(r)} + \frac{(\partial_r D(r))^2}{4D(r)^2} - \frac{\partial_r C(r) \partial_r D(r)}{4C(r)D(r)} \\
&= \frac{C(r) \left[2(\partial_r D(r))^2 - (\partial_r D(r))^2 \right] - 2C(r)D(r)\partial^2 r D(r) + D(r)\partial_r C(r)\partial_r D(r)}{-4C(r)D(r)^2} \\
&= \frac{C(r) (\partial_r D(r))^2 - 2C(r)D(r)\partial^2 r D(r) + D(r)\partial_r C(r)\partial_r D(r)}{-4C(r)D(r)^2}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Terminamos de exemplificar o processo utilizado para encontrar uma componente do tensor de Riemann. O processo para definir as demais componentes é análogo. Calculamos as demais componentes do tensor em questão e chegamos ao resultado de 24 componentes não nulas para esse objeto. Já os símbolos de Christoffel não nulos encontrados foram:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{41}^4 &= \frac{\partial_r D(r)}{2D(r)}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial_r C(r)}{2C(r)}, & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta\text{cos}\theta, \\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{C(r)}, & \Gamma_{32}^3 &= \frac{\text{cos}\theta}{\text{sen}\theta}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r\text{sen}^2\theta}{C(r)}, \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} & \text{e} & \Gamma_{44}^1 &= -\frac{\partial_r D(r)}{2C(r)}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Deste modo, a partir dos símbolos de Christoffel não nulos, das 256 componentes do tensor de Riemann apenas 24 componentes foram diferentes de zero. Na verdade, como $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = -R_{\sigma\nu\mu}^\lambda$ podemos ilustrar essas 24 componentes diferentes de zero, simplesmente, a partir de 12 componentes específicas, já que as outras serão respectivamente equivalentes a essas 12, porém com sinal contrário:

$$R_{212}^1 = \frac{r\partial_r C(r)}{2C(r)^2}, \quad R_{112}^2 = -\frac{\partial_r C(r)}{2rC(r)}, \tag{4.18}$$

$$R_{313}^1 = \frac{r\text{sen}^2\theta\partial_r C(r)}{2C(r)^2}, \quad R_{113}^3 = -\frac{\partial_r C(r)}{2rC(r)}, \tag{4.19}$$

$$R_{323}^2 = \frac{\text{sen}^2\theta(C(r)-1)}{C(r)}, \quad R_{223}^3 = -\frac{C(r)-1}{C(r)}, \tag{4.20}$$

$$R_{424}^2 = -\frac{\partial_r D(r)}{2rC(r)}, \quad R_{224}^4 = \frac{r\partial_r D(r)}{2D(r)C(r)}, \tag{4.21}$$

$$R_{434}^3 = -\frac{\partial_r D(r)}{2rC(r)}, \quad R_{334}^4 = \frac{r\text{sen}^2\theta(\partial_r D(r))}{2C(r)D(r)}, \tag{4.22}$$

$$R_{414}^1 = \frac{-2C(r)D(r)\partial^2 r D(r) + D(r)\partial_r C(r)\partial_r D(r) + C(r)(\partial_r D(r))^2}{4D(r)C(r)^2} \text{ e} \tag{4.23}$$

$$R_{114}^4 = \frac{C(r)(\partial_r D(r))^2 - 2C(r)D(r)\partial_r^2 D(r) + D(r)\partial_r C(r)\partial_r D(r)}{-4C(r)D(r)^2}. \quad (4.24)$$

Para encontrarmos as componentes do tensor de Ricci, o processo será facilitado, pois já conhecemos as componentes do tensor de Riemann. Nesse sentido, sabemos que quando igualamos índices específicos do tensor de Riemann surge o tensor de Ricci. Quando $\lambda = \sigma = \alpha$ temos $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = R_{\sigma\alpha\nu}^\alpha = R_{\sigma\nu}$ [9, 10]. Vale grifar que $R_{\sigma\nu}$ gera uma matriz com 16 componentes:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\alpha\nu}^\alpha = \begin{bmatrix} R_{1\alpha 1}^\alpha & R_{1\alpha 2}^\alpha & R_{1\alpha 3}^\alpha & R_{1\alpha 4}^\alpha \\ R_{2\alpha 1}^\alpha & R_{2\alpha 2}^\alpha & R_{2\alpha 3}^\alpha & R_{2\alpha 4}^\alpha \\ R_{3\alpha 1}^\alpha & R_{3\alpha 2}^\alpha & R_{3\alpha 3}^\alpha & R_{3\alpha 4}^\alpha \\ R_{4\alpha 1}^\alpha & R_{4\alpha 2}^\alpha & R_{4\alpha 3}^\alpha & R_{4\alpha 4}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Como podemos, notar cada componente, entrada da matriz, é composta por uma soma de componentes do tensor de Riemann:

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\alpha\nu}^\alpha = R_{\sigma 1\nu}^1 + R_{\sigma 2\nu}^2 + R_{\sigma 3\nu}^3 + R_{\sigma 4\nu}^4. \quad (4.26)$$

O resultado para o tensor de Ricci para o caso estudado já é conhecido. A análise tensorial que realizamos com base nesse problema é compatível com a ref.[9]. Sabemos que as componentes fora da diagonal principal deste objeto são todas nulas:

$$R_{\sigma\nu} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Sendo assim, considerando as 24 componentes não nulas do tensor de Riemann, bem como a Eq.(4.26) podemos encontrar o resultado para cada componente do tensor de Ricci. Ilustraremos primeiro as componentes fora da diagonal principal e, para provar que são nulas, note que não aparece nenhuma das 24 componentes não nulas do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{1\alpha 2}^\alpha &= R_{112}^1 + R_{122}^2 + R_{132}^3 + R_{142}^4 = 0, & R_{2\alpha 1}^\alpha &= R_{211}^1 + R_{221}^2 + R_{231}^3 + R_{241}^4 = 0, \\ R_{1\alpha 3}^\alpha &= R_{113}^1 + R_{123}^2 + R_{133}^3 + R_{143}^4 = 0, & R_{2\alpha 3}^\alpha &= R_{213}^1 + R_{223}^2 + R_{233}^3 + R_{243}^4 = 0, \\ R_{1\alpha 4}^\alpha &= R_{114}^1 + R_{124}^2 + R_{134}^3 + R_{144}^4 = 0, & R_{2\alpha 4}^\alpha &= R_{214}^1 + R_{224}^2 + R_{234}^3 + R_{244}^4 = 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} R_{3\alpha 1}^\alpha &= R_{311}^1 + R_{321}^2 + R_{331}^3 + R_{341}^4 = 0, & R_{4\alpha 1}^\alpha &= R_{411}^1 + R_{421}^2 + R_{431}^3 + R_{441}^4 = 0, \\ R_{3\alpha 2}^\alpha &= R_{312}^1 + R_{322}^2 + R_{332}^3 + R_{342}^4 = 0, & R_{4\alpha 2}^\alpha &= R_{412}^1 + R_{422}^2 + R_{432}^3 + R_{442}^4 = 0, \\ R_{3\alpha 4}^\alpha &= R_{314}^1 + R_{324}^2 + R_{334}^3 + R_{344}^4 = 0, & R_{4\alpha 3}^\alpha &= R_{413}^1 + R_{423}^2 + R_{433}^3 + R_{443}^4 = 0. \end{aligned}$$

Deste modo, agora vamos encontrar as componentes da diagonal principal ($R_{11} = R_{1\alpha 1}^\alpha$, $R_{22} = R_{2\alpha 2}^\alpha$, $R_{33} = R_{3\alpha 3}^\alpha$ e $R_{44} = R_{4\alpha 4}^\alpha$). Para prosseguir precisamos considerar: **(i)** a Eq.(4.26) e

(ii) as 12 componentes não nulas do tensor de Riemann, lembrando do caráter antissimétrico do tensor de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = -R_{\sigma\mu\nu}^\lambda$, portanto são 24 componentes não nulas. Precisamos, também, retornar ao resultado observado para as componentes do tensor de Riemann e, então, notar que há componentes com comportamentos iguais, sendo elas $R_{112}^2 = R_{113}^3$ e $R_{424}^2 = R_{434}^3$. Sendo assim, temos:

$$R_{11} = \overbrace{R_{111}^1}^0 + R_{121}^2 + R_{131}^3 + R_{141}^4 = 2(R_{121}^2) + R_{141}^4, \quad (4.29)$$

$$R_{22} = R_{212}^1 + \overbrace{R_{222}^2}^0 + R_{232}^3 + R_{242}^4, \quad (4.30)$$

$$R_{33} = R_{313}^1 + R_{323}^2 + \overbrace{R_{333}^3}^0 + R_{343}^4, \quad (4.31)$$

$$R_{44} = R_{414}^1 + R_{424}^2 + R_{434}^3 + \overbrace{R_{444}^4}^0 = R_{414}^1 + 2(R_{424}^2). \quad (4.32)$$

Verificamos que o tensor de Ricci apresenta quatro componentes que não são identicamente nulas, porém três destas componentes são independentes. Todavia uma forma mais eficaz para encontrar as funções incógnitas é a partir de $G_{\mu\nu} = 0$. Porém, a forma mista $g^{\nu\lambda}G_{\mu\nu} = G_\mu^\lambda = 0$ é mais conveniente. O motivo disso é que graças à contração da identidade de Bianchi $\nabla_\lambda G_\mu^\lambda \equiv 0$ [9] o sistema de equação diferencial de $G_\mu^\lambda = 0$ resultará em apenas duas equações diferenciais não-lineares independentes [16]. Sendo assim, sabemos que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, portanto:

$$G_\mu^\lambda = g^{\nu\lambda} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right). \quad (4.33)$$

Realizamos mudanças de variáveis $C(r) = e^{A(r)}$ e $D(r) = -e^{B(r)}$ para simplificar as equações e torná-las compatíveis ao limite da métrica de Minkowski [12]. Desenvolvendo $G_\mu^\lambda = 0$ chegamos ao seguinte resultado:

$$G_1^1 = -\frac{\left(e^{A(r)} - 1 - r\partial_r B(r) \right)}{e^{A(r)}r^2} = 0, \quad (4.34)$$

$$G_2^2 = -\frac{2(\partial_r A(r) - \partial_r B(r) - r\partial_r^2 B(r)) + r\partial_r A(r)\partial_r B(r) - r(\partial_r B(r))^2}{4re^{A(r)}} = 0, \quad (4.35)$$

$$G_3^3 = -\frac{2(\partial_r A(r) - \partial_r B(r) - r\partial_r^2 B(r)) + r\partial_r A(r)\partial_r B(r) - r(\partial_r B(r))^2}{4re^{A(r)}} = 0, \quad (4.36)$$

$$G_4^4 = -\frac{r\partial_r A(r) + e^{A(r)} - 1}{r^2 e^{A(r)}} = 0. \quad (4.37)$$

Observe que as equações (4.35) e (4.36), de acordo com a contração da identidade de Bianchi são identicamente nulas, portanto restaram apenas as equações (4.34) e (4.37). Subtraindo a Eq.(4.34) pela Eq.(4.37), temos:

$$\partial_r A(r) + \partial_r B(r) = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_r A(r) = -\partial_r B(r). \quad (4.38)$$

Manipulando a Eq.(4.37) e multiplicando-a por r^2 , chegamos em um resultado conhecido:

$$-re^{-A(r)}\partial_r A(r) + e^{-A(r)} = 1. \quad (4.39)$$

Note que a expressão à esquerda da Eq.(4.39) é equivalente a $\partial_r(re^{-A(r)})$. Sendo assim, integrando $\partial_r(re^{-A(r)}) = 1$ e manipulando o resultado encontramos:

$$e^{A(r)} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{r}} = C(r). \quad (4.40)$$

De modo análogo, encontramos a outra função incógnita:

$$-e^{B(r)} = \left(1 + \frac{\gamma}{r}\right) = D(r). \quad (4.41)$$

Sabemos que γ na expressão $1 + \frac{\gamma}{r}$ é uma constante e para defini-la devemos considerar o limite newtoniano (campos gravitacionais pouco intensos e velocidades baixas). De acordo com esse limite temos um comportamento conhecido para o tensor métrico, $g_{00} = g_{44} \cong 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ [9]. Comparando a expressão $1 + \frac{\gamma}{r}$ com o g_{44} notamos certa simetria. O resultado para γ ainda pode ser melhorado, pois, também, conhecemos o potencial de um ponto de massa, sendo ele $\Phi = -\frac{GM}{r}$ [9], assim ao substituí-lo em g_{44} chegamos à conclusão de que $\gamma = -\frac{2GM}{c^2}$.

Deste modo, substituindo a constante $\gamma = -\frac{2GM}{c^2}$ nas funções incógnitas Eq.(4.40) e Eq.(4.41). E por fim aplicando estas na Eq.(4.6) reencontramos a solução trivial para o caso $G_{\mu\nu} = 0$, a solução de Schwarzschild apresentada na Eq.(4.8):

$$\begin{aligned} ds^2 &= C(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 + D(r)dt^2, \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2r}}\right)dr^2 + r^2d^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta d^2\phi - \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Em todo caso, esta não é a única solução conhecida para $G_{\mu\nu} = 0$, visto que é sabido da existência de outras soluções particulares que não apresentam a mesma forma da solução de Schwarzschild (e.g., solução de Kerr [9]).

Graças à constante γ podemos descrever o comportamento dado para o raio de Schwarzschild $r = \frac{2GM}{c^2}$ [9]. Quando $C(r) \rightarrow \infty$ na Eq.(4.6) a partícula é atraída por um centro de forças, sem chances de escapar [17], então temos:

$$C(r) = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{r}} = \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2r}} = \infty. \quad (4.43)$$

Isso implica que $1 - \frac{2GM}{c^2r} = 0$, logo podemos obter o comportamento do raio de Schwarzschild, $r = \frac{2GM}{c^2}$.

O comportamento desse raio está ligado a uma grande coincidência matemática entre teoria clássica e a teoria relativística. Pois é possível encontrar o comportamento do raio de

Schwarzschild considerando apenas a velocidade de escape como sendo a velocidade da luz, então temos $c = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \rightarrow r = \frac{2GM}{c^2}$ [9]. Entretanto é apenas uma coincidência, pois seu surgimento é explicado a partir de princípios relativísticos.

O raio de Schwarzschild é, basicamente, uma região limite de escape em um dado campo gravitacional. Em outras palavras, significa que quando uma dada massa for comprimida a ponto de possuir um raio inferior ao raio de Schwarzschild nem a luz será capaz de escapar do campo gravitacional gerado por essa massa, portanto teremos um objeto conhecido por buraco negro. Aproveitamos a deixa, relacionada a singularidades, para abordar aspectos conceituais ligados a simetrias e isometrias do espaço-tempo no próximo capítulo.

5 Tensores de Killing

Graças a bagagem teórica extraída da Relatividade Geral podemos aplicá-la para trabalhar com os tensores de Killing. Sendo estes tema recente na literatura. São cercados de peculiaridades, algumas delas serão abordadas no presente capítulo. Embora este capítulo seja intitulado por tensores de Killing, é necessário deixar esta abordagem em segundo plano. Isso porque precisamos relembrar um pouco sobre o princípio de Hamilton e a equação de Euler-Lagrange. Pois conduzirão a discussão até o conceito de simetrias do espaço-tempo, sendo estas, fortemente, relacionadas aos objetos de estudo do presente capítulo, tensores de Killing.

Sabemos que o *princípio de Hamilton* e as equações de movimento, que resultam da aplicação deste princípio, são conhecidas por equações de Euler-Lagrange. Podemos enunciar o princípio de Hamilton, em termos de cálculo de variações como [6]: $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) d\lambda = 0$. Dito de outra forma, o princípio de Hamilton afirma que o caminho real seguido por um sistema dinâmico, que se move de um ponto a outro qualquer em um intervalo de tempo específico, será aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais.

Um dos problemas básicos do cálculo de variações é determinar uma função, $L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i)$, cuja integral desta seja um extremo, um máximo ou um mínimo. A solução para este problema é a equação de Euler-Lagrange, expressa por:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0, \quad (5.1)$$

a quantidade L é chamada de função de Lagrange ou lagrangiana de uma partícula. Nesse sentido, enunciamos que trabalhando com a lagrangiana de uma partícula, vinculada a uma métrica do espaço-tempo, é possível obter as equações da geodésica,

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0. \quad (5.2)$$

A métrica geodésica entre dois pontos nada mais é que uma curva de valor estacionário sobre uma superfície do espaço riemanniano. Em outras palavras, temos que geodésica é uma curva cujo comprimento é mínimo, e mantém-se fixos o seu ponto inicial e final [18]. Ademais é possível encontrar as componentes do símbolo de Christoffel. Isso porque o princípio variacional e a equação de Euler-Lagrange fornecem um método útil para determinar geodésicas, pois quando $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ temos a seguinte relação [9]:

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0 = \frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right). \quad (5.3)$$

Nesse sentido, fica claro que as componentes do símbolo de Christoffel podem ser obtidas estabelecendo a comparação entre o lado esquerdo e direito da Eq.(5.3). Nesse caso é necessário

encontrar as componentes da geodésica a partir da Eq.(5.2) e, logo após, encontrá-las a partir do formato da equação de Euler-Lagrange. É importante levar em conta as coordenadas do espaço-tempo e considerar a notação para \dot{x}^a de forma análoga para \ddot{x}^a :

$$\ddot{x}^1 = \ddot{r}, \quad \ddot{x}^2 = \ddot{\theta}, \quad \ddot{x}^3 = \ddot{\phi} \text{ e } \ddot{x}^4 = \ddot{t}. \quad (5.4)$$

Igualmente relevante é saber definir L . Sabendo que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, encontramos:

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \left[\frac{1}{2}g_{11}\dot{x}^1\dot{x}^1 + \frac{1}{2}g_{22}\dot{x}^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}g_{33}\dot{x}^3\dot{x}^3 + g_{34}\dot{x}^3\dot{x}^4 + \frac{1}{2}g_{44}\dot{x}^4\dot{x}^4 \right]. \quad (5.5)$$

Note que a equação de Euler-Lagrange na Eq.(5.3) possui um índice λ . Logo para um espaço-tempo com quatro coordenadas, teremos uma equação para cada coordenada. Tomamos como referência uma outra métrica do espaço-tempo já mencionada como outra solução conhecida para $G_{\mu\nu} = 0$. A métrica de Kerr é semelhante à métrica de Schwarzschild, porém faz referência a um campo gravitacional gerado por um corpo em rotação, o fator a representa esta rotação. Em coordenadas com simetria esférica temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) d\phi^2 \\ &+ \left(-\frac{4mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) d\phi dt + \left(-1 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) dt^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Perceba que quando $a = 0$ temos a métrica de Schwarzschild. Substituindo as componentes do tensor métrico do espaço-tempo em pauta na Eq.(5.5), lembrando que $2g_{34}\dot{x}^3\dot{x}^4 = \left(-\frac{4mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \dot{x}^3\dot{x}^4$, é possibilitado trabalhar as quatro equações de Euler-Lagrange. A seguir apresentamos duas dessas equações encontradas,

- Para (r):

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{-mr^2 + a^2 r + a^2 m \cos^2 \theta - a^2 r \cos^2 \theta}{(r^2 - 2mr + a^2)^2} \right] \dot{r}\dot{r} + r\dot{\theta}\dot{\theta} \\ &+ \left[\frac{\sin^2 \theta (r^5 + 2r^3 a^2 \cos^2 \theta + ra^4 \cos^4 \theta - mr^2 a^2 \sin^2 \theta + a^4 m \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \dot{\phi}\dot{\phi} \\ &+ \left[\frac{-2ma^3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2mar^2 \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \dot{\phi}\dot{t} + \left[\frac{m(a^2 \cos^2 \theta - r^2)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \dot{t}\dot{t} \\ &- \frac{d}{d\lambda} \left[\left(\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} \right) \dot{r} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

- Para (ϕ): *obs.: com base na Eq.(5.6) sabemos que L , na Eq.(5.5), não depende de ϕ , portanto $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$. Significa que o objeto a ser diferenciado em $\left[\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \right]$ é uma grandeza que se conserva ao longo da geodésica.*

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(r^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + \frac{2mra^2 \sin^4 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \dot{\phi} + \left(\frac{-4mra \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \dot{t} \right] = 0. \quad (5.8)$$

- Para (t) : *obs. é análogo ao que ocorre para (ϕ) , também temos outra grandeza que se conserva ao longo da geodésica.*

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(-1 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \dot{t} + \left(\frac{-4m a r \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \dot{\phi} \right] = 0. \quad (5.9)$$

Encontramos duas simetrias do espaço-tempo. Entenda o porquê na seção subsequente à seção precessão do periélio de Mercúrio, que configura como um adendo informativo devido tamanha importância à teoria da gravitação de Einstein.

5.1 Precessão do periélio de Mercúrio

A resolução da equação da geodésica, Eq.(5.2), para uma partícula no plano equatorial, $\theta = \frac{\pi}{2}$, no espaço-tempo de Schwarzschild, Eq.(4.8), leva a obter um dos primeiros resultados que contribuíram à consagração experimental da teoria da relatividade de Einstein, a precessão do periélio de Mercúrio.

Sabemos que antes da teoria de Einstein já se considerava a precessão do periélio, pois um sistema planetário é composto por n-corpos que levam a um efeito de perturbação no movimento de um determinado planeta. Entretanto, a previsão clássica era incompatível à observacional. Cerca de 43 segundos de arco por século era a diferença, que na escala astrofísica representaria um grande erro acumulado.

Na época, como resposta ao problema, julgaram existir um outro planeta (Vulcan) com órbita dentro da órbita de Mercúrio. Todavia Vulcan nunca foi descoberto [9]. O mistério teve fim com a publicação da teoria da gravitação de Einstein. A previsão teórica obtida por Einstein como consequência natural de sua teoria para a precessão do periélio de Mercúrio foi de 42,98 segundos de arco por século [9].

O resultado para a geodésica de um corpo com movimento no plano equatorial leva a um sistema de equações diferenciais [9]. Graças à presença de simetrias ao longo da geodésica, é possível agrupar as equações diferenciais em apenas uma equação e, então, obter $r(\lambda)$ a partir de $u = r^{-1}$ [9]:

$$u \simeq \frac{m}{h^2} \{ 1 + \epsilon \cos[\phi(1 - \epsilon)] \}, \quad (5.10)$$

sendo $h = r^2 \dot{\phi}(\lambda)$ e $\epsilon = \frac{3m^2}{h^2}$ um parâmetro de perturbação.

Tal resultado mostra que a órbita da partícula é aproximadamente uma elipse e com um período de 2π no máximo. A expressão a seguir esclarece melhor o pressuposto, veja [9]:

$$\frac{2\pi}{1 - \epsilon} \simeq 2\pi(1 + \epsilon). \quad (5.11)$$

Essa equação revela que a elipse terá uma variação angular de $2\pi\epsilon$ do eixo menor (periélio) entre dois pontos de maior aproximação. Em outras palavras, significa que a órbita de

tal partícula não é uma elipse fechada. Para o caso da precessão do periélio de Mercúrio, Einstein obteve [9]:

$$2\pi\varepsilon \approx \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}. \quad (5.12)$$

Obs.: a corresponde ao semi-eixo maior da elipse e T representa o período da órbita.

Enfim, a precessão do periélio de Mercúrio é um fenômeno observado na natureza previsto pela relatividade de Einstein, sendo compatível a um dos três Testes Clássicos dessa teoria, sendo eles: a precessão do periélio de Mercúrio, a deflexão da luz e o desvio gravitacional para o vermelho [9]. Na obra *SUBTLE is the LORD* [19], nas palavras de Abraham Pais, físico biógrafo de Einstein, "This discovery was, I believe, by far the strongest emotional experience in Einstein's scientific life, perhaps in all his life. Nature had spoken to him. He had to be right" (PAIS, 2005, p.253). Finalizada essa seção, abordamos aspectos ligados à simetria do espaço-tempo, visando compreender os tensores de Killing na próxima seção.

5.2 Simetria do espaço-tempo

Graças à Eq.(5.3) ficou claro que é possível trabalhar a solução das equações diferenciais da geodésica tanto pela Eq. (5.2) como a partir da equação de Euler-Lagrange. Analisando ambos os formatos, notamos que a resolução a partir do formato de Euler-Lagrange é mais simples, visto que não apresenta derivada de segunda ordem, como ocorre na Eq.(5.2).

Sendo assim, trabalhando a equação de Euler-Lagrange dentro do formalismo tensorial podemos encontrar mais facilmente a geodésica de uma partícula relativística para um dado espaço-tempo. Além disso, esse formato abre espaço para as *simetrias*,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0, \quad (5.13)$$

presentes na geodésica, que indicam grandezas conservadas. Sabemos que teorema de Noether ajuda evidenciar a relação entre simetria e leis de conservação. Para maiores informações a respeito deste teorema consulte ref.[20].

As simetrias simplificam as equações favorecendo o encontro de um caminho mais simples para solucionar equações diferenciais. Apresentam aplicações desde a integrabilidade do movimento geodésico até buracos negros [21]. Além disso, guardam as leis mais fundamentais da natureza, visto que guardam grandezas que se conservam ao longo de geodésicas do espaço-tempo. Possibilitam classificar soluções e simplificam problemas físicos complicados [22]. Já os tensores de Killing são objetos que revelam simetrias ocultas no espaço-tempo, bem como os responsáveis pelas transformações de campo que preservam a métrica, correspondendo a uma isometria [22].

5.3 Isometria e tensores de Killing

Em resumo, isometrias são simetrias contínuas, cuja solução é dada pelas componentes do tensor Stackel-Killing. Os tensores de Killing apresentam-se na forma simétrica ou antissimétrica, nomeados, respectivamente, como Stackel-Killing, $\xi_{(\mu\nu)}$, e Yano-Killing $Y_{[\nu\rho]}$. Vamos focar no tensor de Killing simétrico, embora mais a frente será revelado a relação existente entre ambos objetos tensoriais.

Sabemos que a isometria surge a partir da derivada de Lie da métrica [23], e para relembrar que o tensor de Killing de primeira ordem corresponde a uma isometria:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= 0, \\
&= \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda}, \\
&= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \\
&= \nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = \xi_{(\mu;\nu)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto, temos que a isometria depende dos símbolos de Christoffel, já que envolve derivadas covariantes:

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \tag{5.15}$$

Sendo assim operamos a Eq.(5.15) com base no espaço-tempo de Kerr, Eq.(5.6), para obter as componentes do vetor de Killing, ξ_μ . Consideramos $g_{\mu\nu}(r, \theta)$ e buscamos definir as equações diferenciais resultantes da isometria em questão. Encontramos 10 equações diferenciais, sendo que as menores apresentamos a seguir:

$$\begin{aligned}
(Ptt) \rightarrow & -r^4 \xi_1 + a^2 \cos^2 r^2 \xi_1 + 2mr^3 \xi_1 - 2mra^2 \cos^2 \theta \xi_1 - a^2 r^2 \xi_1 + a^4 \cos^2 \theta \xi_1 \\
& + 2\xi_2 r a^2 \cos \theta \sin \theta = 0,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
(Prt) \rightarrow & -2mar^2 \xi_3 + 2ma^3 \cos^2 \theta \xi_3 - 2mr^2 a^2 \xi_4 - 2mr^4 \xi_4 + 2ma^4 \cos^2 \theta \xi_4 \\
& + 2ma^2 r^2 \cos^2 \theta \xi_4 + r^6 \partial_1 \xi_4 + 2a^2 r^4 \cos^2 \theta \partial_1 \xi_4 - 2r^5 m \partial_1 \xi_4 + r^2 a^4 \cos^4 \theta \partial_1 \xi_4 \\
& - 2mr^3 a^2 \cos^2 \theta \partial_1 \xi_4 + a^2 r^4 \partial_1 \xi_4 + 2r^2 a^4 \cos^2 \theta \partial_1 \xi_4 - 2a^2 mr^3 \partial_1 \xi_4 + a^6 \cos^4 \theta \partial_1 \xi_4 \\
& - 2a^4 m r \cos^2 \theta \partial_1 \xi_4 + 2mr^3 a^2 \sin^2 \theta \partial_1 \xi_4 + 2mra^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \partial_1 \xi_4 = 0,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
(Pt\phi) \rightarrow & -\xi_1 r^4 \sin \theta + \xi_1 r^2 a^2 \cos^2 \theta \sin \theta + 2\xi_1 m r^3 \sin \theta - 2\xi_1 m r a^2 \cos^2 \theta \sin \theta \\
& - \xi_1 a^2 r^2 \sin \theta + \xi_1 a^4 \cos^2 \theta \sin \theta + 2\xi_2 r^3 \cos \theta + 2\xi_2 r a^2 \cos^3 \theta \\
& + 2\xi_2 r a^2 \sin^2 \theta \cos \theta = 0,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
(Prr) \rightarrow & -2mr^3 \partial_1 \xi_1 - 2mra^2 \cos^2 \theta \partial_1 \xi_1 + r^4 \partial_1 \xi_1 + r^2 a^2 \cos^2 \theta \partial_1 \xi_1 + a^2 r^2 \partial_1 \xi_1 \\
& + a^4 \cos^2 \theta \partial_1 \xi_1 + mr^2 \xi_1 - ra^2 \xi_1 + \xi_1 a^2 r \cos^2 \theta - \xi_1 a^2 m \cos^2 \theta \\
& - \xi_2 a^2 \cos \theta \sin \theta = 0,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
(Pr\theta) \rightarrow & r^2\partial_2\xi_1 + a^2\cos^2\theta\partial_2\xi_1 + 2\xi_1a^2\cos\theta\text{sen}\theta - 2r\xi_2 + r^2\partial_1\xi_2 \\
& + a^2\cos^2\theta\partial_1\xi_2 = 0,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
(P\theta\theta) \rightarrow & r^2\partial_2\xi_2 + a^2\cos^2\theta\partial_2\xi_2 - r^3\xi_1 - 2mr^2\xi_1 + a^2r\xi_1 \\
& + a^2\xi_2\cos\theta\text{sen}\theta = 0.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

É nítido que o uso do programa computacional (Maple e GrTensorII) foi uma ferramenta essencial e justificável para termos um controle analítico dos resultados. Note que os resultados para o vetor de Killing na métrica de Kerr são extensos, logo podemos supor que os resultados para o tensor de Killing de ordens superiores serão ainda maiores. Sendo assim, trabalhando o sistema de equações diferenciais resultante da Eq.(5.15) encontramos a solução para a isometria do espaço-tempo de Kerr:

$$\xi_3 = \xi_\phi = \frac{(a^2C_1(r^2 - 2mr + a^2)\cos^2\theta + r(C_1r^3 + a^2C_1r + C_1))\text{sen}^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\xi_4 = \xi_t = & -\frac{1}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)am} \left(a^4mC_1\cos^4\theta + a^2 \left(-2m^2rC_1 + a^2mC_1\text{sen}^2\theta - \frac{1}{2}C_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + r^2mC_1 \right) \cos^2\theta + r \left(ra^2mC_1\text{sen}^2\theta + \left(-\frac{1}{2}r + m \right) C_2 \right) \right).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Obs.: C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Observe que tínhamos encontrado para a geodésica de Kerr duas simetrias, Eq.(5.8) e Eq.(5.9), que indicavam grandezas que se conservam ao longo da geodésica. Sabemos que os objetos conservados estavam associados às coordenadas ϕ e t , portanto era possível constatar que dentre as quatro componentes do vetor de Killing em questão, apenas $\xi_3 = \xi_\phi$ e $\xi_4 = \xi_t$ seriam diferentes de zero.

Além disso, é possível mostrar que o tensor de Stackel-Killing descreve o comportamento de uma classe de grandezas conservadas não triviais quando dado espaço-tempo admite esse objeto, para o vetor de Killing a grandeza conservada é dada por: $Q = p_\mu\xi^\mu = p^\mu\xi_\mu$. Essa característica acaba por revelar que o tensor de Stackel-Killing está ligado a uma geometria dual. Esse fato é comprovado quando operamos a hamiltoniana de uma partícula relativística sem spin num espaço-tempo curvo $H = \frac{1}{2}p_\mu p_\nu g^{\mu\nu}$, implicando na existência de uma grandeza conservada $Q = \frac{1}{2}\xi^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$, cuja evolução temporal é dada por [21, 24, 25]:

$$\begin{aligned}
\{Q, H\} &= \{p_\mu p_\nu \xi^{\mu\nu}, p_\lambda p_\rho g^{\lambda\rho}\}, \\
&= \frac{2}{3}p^\alpha p^\beta p^\lambda \nabla_{(\lambda} \xi_{\alpha\beta)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

O comportamento análogo entre a grandeza conservada e a hamiltoniana revela que estas expressões equivalem a uma relação recíproca entre dois sistemas diferentes [21, 24, 25]. Um

sistema no qual a hamiltoniana é dada por H e a grandeza conservada é dada por Q e outro contrário. Ou seja, o invariante geométrico é dado por H e a hamiltoniana é dada por Q .

O aspecto dual ilustrado é conhecido como dualidade geométrica [21, 24, 25]. Na Física temos vários exemplos de dualidade, correspondência física entre dois sistemas, por exemplo [1]: dualidade onda-partícula, dualidade do campo elétrico e magnético nas equações de Maxwell e dualidade entre leis de superfície e leis de volume na teoria holográfica. É precípuo aclarar que um sistema é dual a outro por manter algumas características simplificadas ou não-triviais descritas com parâmetros e variáveis diferentes [24].

A dualidade geométrica é esclarecida, pois o tensor métrico é, na verdade, um tensor de Stackel-Killing de segunda ordem, e vice-versa. Ou seja, o tensor métrico, também, é solução da isometria estendida $\nabla_{(\lambda}g_{\mu\nu)} = 0$ [25]. Sendo assim, a dualidade implica em uma métrica não-trivial ligada ao espaço-tempo, a métrica dual [24, 25]: $\tilde{g}_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu}$.

Nesse caso, vamos encontrar a métrica dual para o espaço-tempo de Schwarzschild na próxima seção. Pois a experiência com o vetor de Killing, ξ_{μ} , no espaço-tempo de Kerr revelou que obter $\xi_{\mu\nu}$ associado a essa métrica não é viável.

5.4 Métrica dual ao espaço-tempo de Schwarzschild

O procedimento realizado para obter ξ_{μ} , associado ao espaço-tempo de Kerr mostra claramente que, para ordens superiores deste objeto, a isometria resultará em um sistema bastante complexo a ser solucionado. Sendo assim, adotamos a métrica de Schwarzschild com a mudança de variável $u = \cos\theta$ para simplificar ainda mais os cálculos. Aproveitamos para anunciar que fazendo uso pertinente do tensor de Yano-Killing, $Y_{[\mu\nu]}$, que surge da expressão $\nabla_{(\alpha}Y_{\mu)\nu} = 0$, é possível obter $\xi_{(\mu\nu)}$, [23], com menos rigor:

$$\xi_{\mu\nu} = Y_{\mu}^{\alpha}Y_{\alpha\nu}. \quad (5.25)$$

O problema fica simplificado, pois conhecendo as componentes do Yano-Killing é fácil obtermos sua forma mista ($Y_{\mu}^{\rho} = Y^{\rho\nu}g_{\nu\mu}$) e contravariante ($Y^{\mu\alpha} = Y_{\nu\rho}g^{\nu\mu}g^{\rho\alpha}$). Assim, encontrar o tensor de Stackel-Killing a partir das componentes inversas do tensor de Yano-Killing é viável para a método analítico. Todavia os cálculos mostraram que o resultado a partir da Eq.(5.25) é apenas um subconjunto de $\nabla_{(\lambda}\xi_{\mu\nu)} = 0$.

Utilizamos artifícios computacionais para auxiliar o cálculo tensorial do Yano-Killing, pois foi precípuo checar eventuais trocas de fatores numéricos ao longo do processo analítico. Deste modo, para a dada métrica, encontramos as componentes do Yano-Killing de segunda ordem: $Y_{23} = C_1 r^3 = -Y_{32}$, sendo C_1 uma constante. Respeitando a Eq.(5.25), trabalhamos tais componentes e obtemos as componentes do Stackel-Killing, sendo elas:

$$\xi_{22} = \frac{C_1^2 r^4}{1-u^2} \text{ e } \xi_{33} = C_1^2 r^4 (1-u^2). \quad (5.26)$$

Esse resultado representa a solução do Stackel-Killing obtida da solução do Yano-Killing de segunda ordem. Entretanto, obtemos, também, a solução do Stackel-Killing obtida da solução da isometria estendida,

$$\nabla_{(\alpha}\xi_{\mu\nu)} = \nabla_{\alpha}\xi_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}\xi_{\alpha\mu} + \nabla_{\mu}\xi_{\nu\alpha} = 0, \quad (5.27)$$

e encontramos outras componentes não-nulas do objeto, vide Fig.(11), sendo elas: ξ_{11} , ξ_{34} e ξ_{44} . Alertamos que apesar da figura representar as componentes de $\xi_{\mu\nu}$ por $k_{\mu\nu}$, vamos manter a apresentação por $\xi_{\mu\nu}$.

```
> sol:=pdsolve(syskt);
sol:= { k11(r, u) =  $\frac{-C2 r}{r-2 m}$ , k21(r, u) = 0, k22(r, u) =  $\frac{(-C2 + C4 r^2) r^2}{(-1 + u)(u + 1)}$ , k31(r, u) = 0,
k32(r, u) = 0, k33(r, u) = (u + 1)(-1 + u) r^2 ((-C5 u^2 - C5 + C4) r^2 - C2), k41(r, u)
= 0, k42(r, u) = 0, k43(r, u) = -C1(-r + 2 m) r(-1 + u^2), k44(r, u)
=  $\frac{8 \left(-\frac{1}{2} r + m\right)^2 \left((-C2 + C3) m - \frac{1}{2} C3 r\right)}{r^2 (-r + 2 m)}$  }
```

Figura 11 – A solução geral do Stackel-Killing obtida da isometria, $\nabla_{(\alpha}\xi_{\mu\nu)} = 0$ associada à métrica de Schwarzschild modificada, $u = \cos\theta$.

Fonte: extraída do resultado computacional.

Nesse sentido, para obtermos certa compatibilidade entre ambas as vias de obtenção do Stackel-Killing constatamos, a partir das componentes ξ_{11} e ξ_{34} , que a componente Y_{23} não poderia ser a única não-nula. De acordo com a análise tensorial, as componentes Y_{13} , Y_{14} e Y_{24} , também, deveriam ser não-nulas. Entretanto, o pressuposto não ocorre, já que o Yano-Killing de segunda ordem obtido é solução única não trivial para a métrica de Schwarzschild.

De acordo com o resultado geral do Stackel-Killing, Fig.(11), temos constatações imediatas. É um tensor com componentes fora da diagonal principal, sendo não-nulas as componentes: $\xi_{11}(r, u)$, $\xi_{22}(r, u)$, $\xi_{33}(r, u)$, $\xi_{43}(r, u) = \xi_{34}(r, u)$ e $\xi_{44}(r, u)$. Sabemos, também, que existem cinco constantes envolvidas, (C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5), estas serão reescritas como: $C_i (i = 1, \dots, 5)$.

Lembrando que $\tilde{g}_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu}$, levando em conta o resultado apresentado na Fig.(11) temos as componentes do tensor de Stackel-Killing associado ao espaço-tempo adotado, logo obtemos a seguinte métrica dual generalizada para tal espaço-tempo de Schwarzschild:

$$\begin{aligned} \tilde{d}s^2 &= \frac{C_2 r}{r-2m} dr^2 + \frac{(-C_2 + C_4 r^2) r^2}{(u^2 - 1)} du^2 + (u^2 - 1) r^2 ((C_5 (u^2 - 1) + C_4) r^2 - C_2) d\phi^2 \\ &+ 2C_1 (r-2m) r (u^2 - 1) d\phi dt + \frac{(2m-r)(2(C_2 + C_3)m - C_3 r)}{r^2} dt^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Note que a presença das constantes $C_i (i = 1, \dots, 5)$ confere um comportamento generalizado para a métrica dual. Podemos afirmar, então, que temos uma classe de métricas duais. Um resultado importante é que a partir da solução do Stackel-Killing obtida por Holten para métrica de Kerr-Newmann [25], tem-se:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2. \quad (5.29)$$

Obs.: sendo $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^2$ e $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

Podemos inferir uma solução do Stackel-Killing de Schwarzschild aplicando o limite de a, Q indo a zero. Nesse caso, o Stackel-Killing coincide dentro da nossa solução geral para o subconjunto de constantes $C1 = C2 = C3 = C5 = 0$ e $C4 = -1$. Ou seja, o resultado de Holten [25] (com $a, Q = 0$):

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{a^2 \cos^2 \theta \Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a)d\phi - a dt]^2 \\ &\quad - \frac{\rho^2 a^2 \cos^2 \theta}{\Delta} dr^2 + r^2 \rho^2 d\theta^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

é um subconjunto da nossa solução geral.

Para provar que um sistema dual pode manter algumas das propriedades do sistema original, vamos contar com um objeto tensorial conhecido por escalar de Kretschmann. O escalar de Kretschmann é um invariante geométrico dado pela multiplicação interna entre as componentes contravariante e covariante do tensor de Riemann $K = R^{\mu\nu\lambda\beta} R_{\mu\nu\lambda\beta}$, logo o escalar de Kretschmann dual é dado por [24]:

$$\tilde{K} = \tilde{R}^{\mu\nu\lambda\beta} \tilde{R}_{\mu\nu\lambda\beta}. \quad (5.31)$$

Sendo assim, sabemos que para trabalhar com tal objeto é necessário que a métrica dual apresente inversa, logo a métrica deve ser não degenerada (determinante diferente de zero). Deste modo, é satisfeita a matriz identidade, Delta de Kronecker δ_ν^λ , da métrica dual. Tensorialmente, a condição para uma métrica dual não degenerada é dada por [24, 25]: $\tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\lambda\mu} = \delta_\nu^\lambda$.

É importante acentuar que o escalar de Kretschmann, além de indicar singularidades no espaço-tempo, ajuda a comprovar que, de fato, o tensor de Stackel-Killing está associado à geometria dual. Isso porque é possível encontrar o conjunto de constantes do Kretschmann dual que permite obter o mesmo resultado para o Kretschmann do modelo original. Vale grifar que o escalar de Kretschmann para o espaço-tempo de Schwarzschild é dado por [9]:

$$K_{schw} = \frac{48m^2}{r^6}. \quad (5.32)$$

Verificamos que o formato deste objeto no sistema original é bastante trivial quando comparado à forma encontrada para o dual. Mesmo com simplificações computacionais, o invariante geométrico dual apresenta muitos termos, mais de 200 000. Entretanto, a partir da análise comparativa entre a métrica original, Eq.(4.8), e a métrica dual, Eq.(5.28), obtemos o conjunto de constantes que permite retornar ao resultado Eq.(5.32), sendo ele: $\{0\} = (C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = -1, C_4 = 0, C_5 = 0)$. Esse conjunto, $\{0\}$, também, revela de imediato conjuntos triviais, múltiplos da métrica de Schwarzschild ($C_1 = C_4 = C_5 = 0$ e $C_2 = -C_3$), que satisfazem o tensor de Ricci dual nulo, $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$.

Note que são vastas as possibilidades que a métrica dual oferta. Graças ao aspecto generalizado que as constantes possibilitam, a métrica dual é capaz de mapear regiões com muitos comportamentos incluindo resultados não esperados para o sistema original. Para maiores informações vide [26]. A análise detalhada para tal abordagem será objeto de estudo em uma futura publicação. Por fim, foi possível constatar que a métrica dual ao espaço-tempo de Schwarzschild rompe com o aspecto trivial do sistema original.

Conclusões

Concluimos com o presente trabalho, graças ao formalismo tensorial, que Albert Einstein pode estruturar seu estudo acerca do espaço-tempo e então formular a Relatividade Geral. Foi possível observar algumas peculiaridades do cálculo tensorial e, desta forma, notar que há uma série de objetos matemáticos construídos a partir da geometria do espaço-tempo, objetos esses como: símbolo de Christoffel, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel, $R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda}$, tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$ e escalar de curvatura, R .

Boa parte desses objetos foram contruídos oportunizando perceber a relação existente entre os mesmos. Uma relação que claramente foi notada ocorre entre o tensor de curvatura, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. O tensor de Ricci é fruto de uma contração interna específica do tensor de curvatura, objeto originado graças a não comutação do operador derivada covariante ∇_{α} , e o escalar de curvatura ganha gênese a partir da contração total entre o tensor de Ricci e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

A construção desses objetos foi importante para melhor compreensão da estrutura do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, que depende de tais objetos, tensor de Ricci, escalar de curvatura e tensor métrico. Vimos que o tensor de Einstein, também, pode ser representado por um formato mais compacto, que depende apenas de uma constante κ e do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$. Essa relação é o principal resultado de Relatividade Geral, pois deixa claro que o tensor de Einstein descreve a geometria do espaço-tempo a partir do conteúdo de matéria/energia presente no mesmo. Ou seja, foi possível relacionar tais grandezas e então concluir que matéria e energia curvam o espaço-tempo.

Notamos a existência de uma série de peculiaridades acerca do tensor de Einstein, da constante de acoplamento e do tensor energia-momento. Mostramos como obter a famosa solução para o tensor de Einstein nulo, solução de Schwarzschild. Nesse contexto, observamos que o tensor energia-momento também é nulo. Porém, apenas fora da matéria. Isso porque a solução de Schwarzschild trata de um campo gravitacional fora da matéria, porém revela que caso a matéria geradora de tal campo seja comprimida a ponto de ter um raio inferior ao raio de Schwarzschild, obtido graças a constante de acoplamento, nem a luz será capaz de escapar do campo gravitacional gerado por tal corpo, fenômeno rotulado por buraco negro.

Ademais, fizemos questão de abordar sobre a precessão do periélio de Mercúrio, um resultado natural da teoria da gravitação de Einstein que explica o fato observado na natureza. Esse resultado está ligado com a abordagem sobre os tensores de Killing. Estes objetos revelam simetrias não evidentes no espaço-tempo. As simetrias revelam grandezas que se conservam ao longo da geodésica de uma dada partícula, a presença delas facilita a obtenção da solução de problemas físicos.

Vimos que o tensor de Killing, além de revelar essas simetrias, quando dado espaço-tempo admite esse tensor, ele compõe a estrutura da grandeza conservada. Observamos que o tensor de Killing apresenta-se no formato simétrico (tensor de Stackel-Killing) ou antissimétrico (tensor de Yano-Killing). Sobretudo o tensor de Stackel-Killing tem origem distinta do Yano-Killing, surge como solução para isometrias do espaço-tempo. Entretanto, é possível obter um subconjunto da solução da isometria, tensor de Stackel-Killing, a partir das componentes inversas do Yano-Killing. Isso porque, embora esses tensores sejam distintos, existe uma relação entre tais objetos.

Nesse sentido, é notório que a apresentação acerca dos tensores de Killing é avançada e leva a uma série de análises, visto que o tensor de Stackel-Killing de segunda ordem está ligado à geometria dual. Por outro lado, o tensor métrico, também, é solução para a isometria. Esse aspecto é notado graças às grandezas conservadas, já que a condição de conservação destas é satisfeita pela presença da isometria. Calculando a métrica dual ao espaço-tempo de Schwarzschild, conseguimos notar uma compatibilidade entre o nosso resultado e um resultado já publicado para o objeto em pauta, vide subseção 5.4. Além disso, encontramos a combinação de constantes que fazem o sistema dual retornar ao original. As constantes arbitrárias, presentes na métrica dual, mostraram que tal métrica é capaz de mapear regiões com muitos comportamentos, incluindo resultados não esperados para o sistema original.

Por fim, sabemos que nos hodiernos faz-se necessário despertar e encorajar futuros físicos teóricos a contribuir para a evolução da Física. Sendo assim, nosso trabalho foi uma forma de prestar contribuição ao pressuposto, bem como celebrar o centenário da Relatividade Geral. Esperamos com ele, pelo menos, ter feito lembrar que o desenvolvimento de teorias como a teoria da gravitação de Einstein não privilegiam tão somente a expansão da ciência e tecnologia, mas também a nossa evolução cultural científica.

Referências

- [1] LOBO, Matheus P. *Conversa Particular*, 2016.
- [2] CHAVES, Alaor. **Física, v.3: ondas, relatividade e física quântica**. Rio de Janeiro: Reichmann & Affonso, 2001.
- [3] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, v.4: óptica e física moderna**. 7^a Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- [4] PIRES, Antonio S. **Evolução das idéias da física**. 2^a Ed. São Paulo: Editora livraria da Física, 2011.
- [5] TIPLER, Paul; LLEWELLYN, Ralph. **Física moderna**. 3^a Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [6] TIPLER, Paul; MOSCA. **Física, v.3: física moderna: mecânica quântica, relatividade e a estrutura da matéria**. 5^a Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [7] TREFIL, James; HAZEN, Robert. **Física viva, v.3: uma introdução à física conceitual**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [8] MORRIS, Richard. **O que sabemos sobre o Universo: realidade e imaginação científica**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.
- [9] D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's relativity**. United States: Oxford University Press, New York, 1999.
- [10] FLEISCH, Daniel. **A Students Guide to Vectors and Tensors**. United States of America: Cambridge University Press, New York, 2012.
- [11] SEIDEL, P.; CABRAL, L.; BARBOSA, D. Aspectos elementares do cálculo tensorial. In: DAVILA, Liliana (Org.); SOUSA, Regina (Org.). **Divulgando Conhecimentos da Física**. Editora Nagô. cap.7, p.74-83. (Capítulo de livro a ser publicado).
- [12] CATTANI, Mário. Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.20, n.1, p.27-37, mar. 1998. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v20_27.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2013.
- [13] SOARES, Domingos. Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativística. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.35, n.3, p.3302, set.2013. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v35n3/a02v35n3.pdf>>. Acesso em: 20 out. 2013.

- [14] MAPLESOFT. Disponível em: <<http://www.maplesoft.com/products/maple/>>. Acesso em: 10 ago. 2013.
- [15] GRSENSOR II. Disponível em: <<http://grtensor.phy.queensu.ca/>>. Acesso em: 10 ago. 2013.
- [16] BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações diferenciais**. 3^a Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- [17] FRANCO, Edison T. *Conversa Particular*, 2016.
- [18] SÁNCHEZ, Emil. **Cálculo Tensorial**. Rio de Janeiro: Interciência, 2011.
- [19] PAIS, Abraham. **Subtle is the Lord**. United States: Oxford University Press, New York, 2005.
- [20] MARTINS, Adriano. Simetrias e Leis de conservação na Mecânica Clássica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. São Paulo, v.21, n.1, p.33-39, mar. 1999. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v21_33.pdf>. Acesso em: 30 mai. 2016.
- [21] CABRAL, Luís A.; CAPISTRANO, Abraão J. Conserved Quantities and Dualities for Particles in Curved Space-Time. **International Journal of Modern Physics E**, vol.20, p.188, (2011). Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218301311040785>>. Acesso em: 16 mai. 2014.
- [22] FROLOV, Valeri P.; KUBIZNAK, David. Higher-Dimensional Black Holes: Hidden Symmetries and Separation of Variables. **Classical and Quantum Gravity**, vol.25, p.154005, jul. 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/0802.0322v2.pdf>>. Acesso em: 16 mai. 2014.
- [23] CHERVONYI, Yuri; LUNIN, Oleg. Killing(-Yano) Tensors in String Theory. **Journal of High Energy Physics**. vol.09, p.182, set. 2015. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/1505.06154v3.pdf>>. Acesso em: 17 dez. 2015.
- [24] CABRAL, Luís A. Geometrical invariants, conserved currents and new symmetries in a covariant phase-space dynamics. In: 5th INTERNATIONAL SCHOOL ON FIELD THEORY AND GRAVITATION, 20., 2009. Disponível em: <http://pos.sissa.it/archive/conferences/081/075/ISFTG_075.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2015.
- [25] RIETDIJK, Rachael H.; HOLTEN, Jan W. Killing tensors and a new geometric duality. **Nuclear Physics B**, vol.472, p.427, jul. 1996. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/hep-th/9511166v1.pdf>>. Acesso em: 16 mai. 2015.

-
- [26] SEIDEL, Paola; CABRAL, Luís. Dualities and geometrical invariants for static and spherically symmetric spacetimes. **International Journal of Modern Physics D**, v. 25, p. 1641007-1641007-7, 2016.