UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

PROFMAT

VALDEMIRO CARLOS DOS SANTOS SILVA FILHO

UMA ABORDAGEM DO ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

ARRAIAS-TO
2020

VALDEMIRO CARLOS DOS SANTOS SILVA FILHO

UMA ABORDAGEM DO ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante.

ARRAIAS-TO
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586a Silva Filho, Valdemiro Carlos dos Santos .

Uma Abordagem do Estudo de Sequências e Séries Numéricas na Matemática do Ensino Médio. / Valdemiro Carlos dos Santos Silva Filho. – Arraias, TO, 2020.

100 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2020.

Orientador: Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante

1. Sequências numérica. 2. Séries numérica. 3. Convergências. 4. Ensino de Matemática no Ensino Médio. I. Título

CDD 510

VALDEMIRO CARLOS DOS SANTOS SILVA FILHO[1]

UMA ABORDAGEM DO ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS NA MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede (ProfMat) da Universidade Federal do Tocantins (UFT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 28/02/2020

BANCA EXAMINADORA:

____

Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante – UFT/Matemática

Orientador

____

Dr. Edcarlos Domingos da Silva – IME/UFG

Examinador

____

Dra. Keidna Cristiane Oliveira Souza – UFT/Matemática

Examinadora

Arraias - TO

2020

1O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A minha família, aos meus amigos e a todos aqueles que contribuíram para realização deste sonho. Em especial a minha esposa Cléia Rute aos meus filhos, David Carlos, Samuel Carlos e Hellen Ruth e aos meus pais, que não se encontram mais entre nós Sr. Valdemiro Carlos e a Sr^a. Maria Damiana a meus Irmãos, Valter Carlos, Valmir Carlos e Valnei Carlos e a todos os meus amigos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por propiciar as condições necessárias às conquistas e dar a força suficiente para vencer os desafios;

A meu orientador, Prof. Dr. Thiago Rodrigues Cavalcante, que contribuiu significativamente para a construção deste trabalho;

A minha família pela paciência e compreensão;

Aos meus amigos que cobraram a minha presença, mas compreenderam as razões da minha ausência;

Aos meus colegas de curso pelas ajudas múltiplas em todo o percurso e pela amizade a vida toda;

Aos meus professores que transbordaram as barreiras do ensinar: instruíram, muniram;

À UFT pela oportunidade de formação ofertada;

CAPES, que disponibilizou o auxílio financeiro, tão importante neste período;

Enfim, a todos que foram envolvidos de alguma forma e contribuíram para a realização deste trabalho.

A Grandeza do poder de um homem está
na medida de sua entrega a Deus.
(William Booth)

Resumo

A presente pesquisa tem como objetivo estudar Sequências e Séries Numéricas por meio de propostas de atividades para o Ensino Médio. Considerando que Sequências e Séries Numéricas são conteúdos abordados na Educação Básica, como progressões Aritméticas e Geométricas, foram desenvolvidas propostas de atividades para serem executadas pelo professor na introdução do conteúdo Séries Numéricas Infinitas. Assim, partirmos da problemática de que podemos iniciar o conceito de somas infinitas no ensino médio para melhor entendimento discente, como forma de estimular a aprendizagem como sugere o Plano de Desenvolvimento do Educando, para melhor qualidade do ensino. Nessas questões, a pesquisa que mais se adequou ao nosso projeto foi a bibliográfica de uma metodologia exploratória, em que a consulta de materiais como revistas, dissertações e outras fontes, são primordiais. Ao decorrer desse trabalho, apresentamos os aspectos históricos de forma sucinta sobre as Sequências e Séries Numéricas, como seu surgimento e progresso no meio matemático, ao seu desenvolvimento. Ao aprofundar no estudo dessa temática, encontramos fundamentos teóricos necessários para propor as atividades planejadas. Entendemos que essas ações podem ser ferramentas facilitadoras no processo de aquisição do conhecimento matemático por parte dos educando, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico, além de ser possivelmente mais atrativo pela abordagem sugerida. Concluímos o trabalho considerando mais que satisfatória a nossa proposta, podendo servir de base para aprofundamentos e pesquisas posteriores.

Palavras-Chave: Sequência numérica; Séries numéricas; Convergências; Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Abstract

This research aims to study Sequences and Numerical Series through proposed activities for high school. Considering that Sequences and Numerical Series are contents covered in Basic Education, such as Arithmetic and Geometric progressions, activity proposals were developed to be performed by the teacher in the introduction of the Infinite Numerical Series content. Thus, we start from the problem that we can start the concept of infinite sums in high school for better student understanding, as a way to stimulate learning as suggested by the Educando Development Plan, for better teaching quality. In these questions, the research that best suited our project was the bibliography of an exploratory methodology, in which the consultation of materials such as magazines, dissertations and other sources, are paramount. During this work, we present the historical aspects in a succinct way about the Sequences and Numerical Series, as their appearance and progress in the mathematical environment, to their development. When deepening the study of this theme, we found the theoretical foundations necessary to propose the planned activities. We understand that these actions can be facilitating tools in the process of acquiring mathematical knowledge by the students, contributing to the development of logical reasoning, in addition to being possibly more attractive due to the suggested approach. We concluded the work considering our proposal to be more than satisfactory and could serve as a basis for further research and further research.

Keywords: Numeric sequence; Numerical series; Convergences; Teaching of Mathematics in High School.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

Esta pesquisa tem como objetivo realizar um estudo de Sequências e Séries Numéricas em uma breve aplicação no Ensino Médio. O interesse foi despertado no curso Fundamentos de Cálculo, ofertado pelo PROFMAT que nos instigou a pesquisar à respeito dessa temática, e sua aplicação na Educação Básica. As Sequências são abordadas no Ensino Médio como Progressões Aritméticas (P.A.) e Progressões Geométricas (P.G.). Deste ponto, pensamos em construir Propostas de Atividades envolvendo a temática, partindo da seguinte problemática: de que forma podemos introduzir o conceito de somas infinitas no Ensino Médio?

A Proposta de Atividade propõe a introdução de somas infinitas no Ensino Médio por meio de áreas e por somas parciais. Desenvolvemos sugestões de atividade que acreditamos que foge dos padrões tradicionais e que a mesma tenha um potencial facilitador para aquisição do conhecimento no processo de Ensino e Aprendizagem, além de conceber que a forma que se introduz o conteúdo também é fundamental para a mesma.

Partimos da hipótese de que, que através da utilização de áreas de figuras planas, os alunos terão melhor compreensão na introdução dos conceitos de séries geométricas infinitas. E para alcançarmos o Objetivo de pesquisa perpassamos por algumas etapas as quais: Estudar as Sequências e Séries Numéricas bem como suas particularidades; Analisar condição de convergência de Sequências e Séries de Números Reais; Investigar uma possível metodologia para inserir somas infinitas na Educação Básica; Desenvolver uma proposta de atividade envolvendo somas infinitas.

O Plano de Desenvolvimento do Educando (PDE) elaborado pelo MEC traz pontos pertinentes para discutir a respeito da matriz curricular dos conteúdos P.A. e P.G.. Assim, Brasil [5], descreve que a Progressão Aritmética e a Geométrica devem ser ensinadas de formas variadas, para que não haja memorização e sim aprendizagem, mesmo que essa seja por repetição.

> "Como a P.A. e a P.G. são casos particulares de sequências, deve-se iniciar seu estudo a partir da utilização de sequências variadas, inclusive aquelas que não têm uma lei de formação. É fácil mostrar que o conjunto dos números naturais forma uma PA infinita, a partir da sua definição. A demonstração da fórmula do termo geral é bastante simples e deve ser exercitada como alternativa à sua memorização. Vários exemplos de aplicação podem ser usados, como o do treinamento de um corredor, adicionando a cada dia uma distância maior."([5], 2008, p.110).

Brasil [4], descreve que o ensino de progressões sejam elas aritméticas ou geométricas devem ser associadas ao ensino de função, e desta forma, torna-se necessário ao aluno desenvolver a habilidade de deduzir fórmulas para resolver problemas dessa magnitude. Sobre essa mesma visão, Brasil [6] ressalta que

> “com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades”.([6], 2002, p. 121).

Sobre as Progressões Aritméticas, se faz necessário que o aluno se aproprie das propriedades das progressões observando os padrões, para concluir e formular uma expressão que determine a soma de uma quantidade finita de termos. Desta forma o aluno deve ser capaz de “[..] identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos”.([6], 2002, p. 116).

Brasil [6] ressalta que para o ensino das progressões, o professor deve se ater à lei de formação dessas sequências e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Fazendo uma relação às sequências e seus gráficos relacionando com os conceitos de monotonicidade, desta forma, isso deve permitir ao aluno compreender melhor as ideias entrelaçadas, e ao mesmo tempo possibilitá-lo a acompanhar o comportamento de uma sequência sem precisar decorar informações.

As informações contempladas até o momento são parte da pesquisa feita para este trabalho. Mas, como a pesquisa o torna pertinente? O ato de pesquisar traz em si objetivos e benefícios à sociedade, Silva [26] salienta que, a pesquisa científica tem como objetivo, fundamental, contribuir para a evolução do conhecimento humano em toda área de conhecimento. Nesta dissertação a pesquisa tem um caráter muito forte. Ainda sobre este ponto, Silveira e Córdova [13], descrevem que:

> "Pesquisa é a atividade nuclear da Ciência. Ela possibilita uma aproximação e um entendimento da realidade a investigar. A pesquisa é um processo permanentemente inacabado. Processa-se por meio de aproximações sucessivas da realidade, fornecendo-nos subsídios para uma intervenção no real."([13], 2009, p.31)

A pesquisa tem como finalidade conhecer e explicar elementos que ocorrem no mundo real, Ferrari (1974), citado por Silva [26], descreve que a pesquisa tem a:

> "Finalidade conhecer e explicar os fenômenos que ocorrem no mundo existencial, isto é, a forma como se processam as suas estruturas e a sua

> função, as mudanças que provocam e até que ponto podem ser controlados e orientados."(FERRARI, 1974 apud [26], 2015, p. 49).

A junção de todas as informações fornecidas até aqui, retratam um breve quadro sobre o ensino da matemática no que se refere as Progressões Aritméticas e Geométricas e a importância da pesquisa. Agora, iremos nos deslocar no tempo, por meio da consultas de materiais que tem embasamento em elementos teóricos coletados por meio de revisões literárias em revistas, livros, artigos, monografias e dissertações que discutem a temática aqui objetivada, que se faz presente por meio de relatos históricos a respeito dos primeiros registros das P.A e P.G.

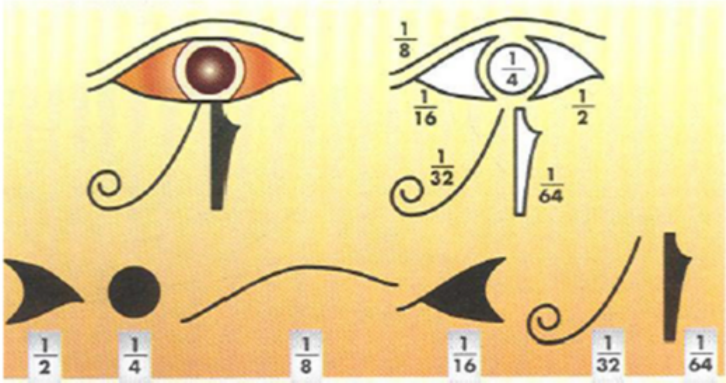
A respeito de nosso tema de estudo, permeamos na busca histórica sobre as séries e sequências numéricas. E sobre essa visão, Arruda [1] descreve que as progressões foram estudadas inicialmente pelos povos babilônicos e pelos povos egípcios, através de observações de alguns padrões, e em especial ao padrão referido às enchentes do Rio Nilo. Essas observações eram necessárias para determinar ou escolher o período de plantio de seus alimentos.

Arruda [1], ainda apresenta que após essas observações, foi percebido que as enchentes ocorriam sempre que a estrela Sirius se levantava a leste, e sempre no período de 365 dias, desta forma, os egípcios criaram o calendário solar de seu povo, formado por 12 meses e cada mês composto por 30 dias, além de mais cinco dias para homenagens aos seus deuses. No entanto, ainda houve a divisão de um ano em três estações sendo-as a época de semear, crescimento e colheita.

Maia [19], relata que os egípcios preservaram muitos dos papiros que contribuíram para o conhecimento da atual matemática, e é em um dos papiros encontrados em Kahun, datado em 1950 a.C. que foi encontrado alguns problemas teóricos de Progressões Aritméticas e Geométricas, sendo o papiro Rhind (ou Ahmes), datado aproximadamente 1650 a.C. a fonte primária sobre a matemática egípcia.

Segundo Maia [19], o papiro de Rhind continha uma progressão geométrica, conhecida como a fração dos olhos do deus Hórus, como ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Olhos de Hórus



Fonte: Maia (2011)

Conta a história que, os egípcios estavam acostumado a fazer somas de progressões geométricas finitas, e como a fração do olhos do deus Hórus é constituída pela sequência $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$. Para realizar essa soma os egípcios multiplicavam todos os termos por 64, e por fim encontrava uma soma $s = \frac{63}{64}$. Note como ilustra a figura cada parte do olho representa uma fração, e para completar um inteiro falta $\frac{1}{64}$ a esse pedaço os egípcios acreditavam que era mágico e não poderia ser visto.

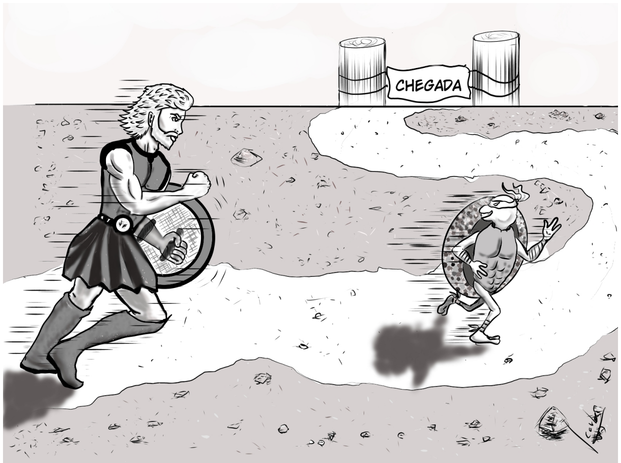
Eves [11] também aponta a existência de conhecimentos a respeito de progressões aritméticas, encontradas no papiro Rhind, tal como o problema: "Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores".

Eves [11] descreve a história das somas das progressões aritméticas, e atribui a Carl Friedrich Gauss, uma façanha ao que hoje concebemos como somas de progressões aritméticas finitas. Conta a história, que um menino de origem alemã, nascido em 1777, onde seu pai era um trabalhador braçal, de opinião teimosa quando nos referimos a educação, porém sua mãe, também uma pessoa inculta, mas encorajava o seu filho aos estudos.

Quanto a façanha, refere Eves [11] a um aluno de 10 anos de idade, estudante de escola pública e inquieto, que segunda a história, o seu professor de matemática para mantê-lo ocupado passou-lhe uma atividade de realizar uma soma de 1 a 100, e quase que de imediato Carl Friedrich Gauss efetuou a soma, apresentando o resultado de forma correta. Em [11], ressalta que Gauss havia calculado mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$, na qual o mesmo observou um padrão, $100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101$ e assim sucessivamente, com os 50 pares possíveis dessa maneira, sendo que a soma, pode ser representada pelo produto, $50 \cdot 101$, logo 5050.

Eves [11] aponta que o filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) chamou a atenção para as dificuldades lógicas ocultas em suas suposições, e por meio de seus paradoxos, na qual esses paradoxos, que tiveram grandes influências na matemática. O filósofo Zenão de Eleia, mostrou a fragilidade da matemática daquela época, exibindo que os conceitos existentes até aquele momento eram insuficientes para esclarecer alguns eventos, e nessa perspectiva, Boyer [7] descreve que o filósofo Zenão de Eleia, enunciou um argumento para mostrar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade, que mais tarde foram estudados por Aristóteles, que os intitulou como Aquiles, Seta, Dicotomia e Estádio, nomes estes quais ficaram conhecidos os paradoxos de Zenão.

Figura 2 – Corrida Aquiles e a Tartaruga



Fonte: Autor

Aqui faremos menção um desses paradoxos, o de Aquiles. Ávila [3] descreve que este paradoxo está relacionado a uma corrida entre o rápido Aquiles e a tartaruga. Na condição em que Aquiles fosse mais rápido, foi dada a tartaruga uma certa vantagem. Então aconteceria da seguinte forma, sempre que Aquiles alcançasse o ponto em que a tartaruga estava, a mesma estaria sempre a frente, e isso acontece sucessivamente, a tartaruga sempre estaria a frente. Zenão usa essa ideia para mostrar a fragilidade da Matemática naquele período. Assim, o paradoxo está na conclusão de que Aquiles nunca alcançaria a tartaruga. Atualmente essa situação é tratada como a soma das Progressões Geométricas infinitas.

Zenão conseguiu mostrar que em um segmento finito, pode ser dividido em infinitos segmentos de reta também de comprimentos finito, que segundo Sampaio [24], isso gerou uma grande discussão a respeito do infinito atual e ao infinito potencial.

Ávila [2] ressalta que o primeiro escrito que veio retratar algo a respeitos das séries infinitas, pode ser encontrado em um dos trabalhos de Arquimedes, ao qual o mesmo calculava a área de uma parábola, fazendo uso de uma série geométrica com razão 1/4. Ávila [2], descreve ainda que o aparecimento das somas infinitas se deu 1500 anos depois no século XIV, e neste período, existiam um grupo de Matemáticos na Universidade de

Oxford que estudava cinemática, ao que parece foi esse estudo que levou a reconsideração das séries infinitas.

As informações fornecidas, retratam o quadro rico/histórico da matemática no que diz respeito as Progressões Aritmética e Geométrica. Assim, essa pesquisa tem um cunho bibliográfico.

Para Gil [14], a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado e, é constituída essencial por livros e artigos científicos. Já Silva [26] descreve que, o objetivo da pesquisa bibliográfica é colocar o pesquisador em contato com tudo o que foi escrito sobre determinada temática, visando colaborar na análise da pesquisa.

Deste modo estruturamos esta dissertação em cinco capítulos. No primeiro capítulo apresentamos a introdução e nele elementos para o ensino de sequências, aspectos históricos e elementos bibliográficos, já o segundo capítulo constitui-se sobre fundamentos primordiais a respeito das sequências numéricas, tais como monotonicidade, limite de uma sequência, além de convergências ou divergências de uma sequência numérica. Sem perder de vista as sequencias estudas na educação básica, fizemos um estudo das Progressões Aritméticas e Geométricas bem como suas propriedades.

O terceiro capítulo descreve as séries numéricas e seus elementos, bem como importantes séries, tais como: geométricas, harmônica e telescópica, além de inferir sobre os testes de convergências e suas demonstrações, acompanhadas de exemplos numéricos.

No quarto capítulo, desenvolvemos três sugestões de atividades didáticas, para a introdução da temática de somas infinitas no Ensino Médio (Séries de Números Reais), descrevemos o passo a passo desse roteiro para auxiliar o docente quanto ao conhecimento matemático e sua prática em sala de aula, e por fim, no quinto capítulo, intitulado como as considerações finais, nela respondemos nosso problema de pesquisa, além de fazer uma reflexão da importância do docente ao mediar a introdução de um conteúdo.

2 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo será realizado um estudo sobre Sequências de Números Reais. Apontaremos alguns exemplos, conceitos e resultados relevantes sobre este tema, com uma abordagem de modo a torná-lo de fácil compreensão ao leitor. Paralelamente a isso, serão abordados os conceitos de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, suas propriedades, exercícios e aplicações aos quais são temas abordados no Ensino Médio.

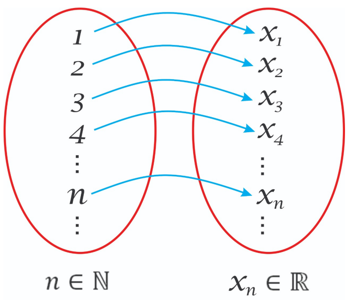
Uma Sequência Numérica é uma lista de números reais ordenada via índices de números naturais. Mais precisamente, uma Sequência de Números Reais é dada por:

$$(x_n) = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4, \cdots, x_n, \ldots)$$

em que cada x_i, é denominado i-ésimo termo da sequência, x_1 é o primeiro termo da sequência, x_2 o segundo termo assim e sucessivamente.

Por outro lado, podemos definir uma sequência de números reais como uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ que toma valores na reta real $\mathbb{R}$, cada $n \in \mathbb{N}$ associa-se um número real $x_n \in \mathbb{R}$. O termo x_n é denominado o termo geral da sequência (x_n).

Figura 3 – Função x_n



Fonte: Autor.

Apesar da Figura 3 exibir uma função que associa a cada índice $n \in \mathbb{N}$ a um termo $x_n \in \mathbb{R}$, nada indica que $x_{n_i} \neq x_{n_j}$, para $i \neq j$, ou seja, a função x não é necessariamente injetiva. Similarmente não conclui-se que a função seja sobrejetiva.

Cada sequência em questão possui suas características e propriedade específicas, as quais serão estudadas posteriormente. Neste momento serão ilustrados alguns exemplos de Sequências de Números Reais.

Exemplo 2.0.1. *Considerando a sequência cujo termo geral é dado por* $(x_n) = n$.

Neste exemplo, o primeiro termo da sequência $x_1 = 1$*, o segundo termo* $x_2 = 2$*, o terceiro termo* $x_3 = 3$*, e assim sucessivamente, portanto temos que os primeiros termos da sequência numérica são*

$$x_n = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

Exemplo 2.0.2. *Sendo que a sequência de termo geral é* $(x_n) = \sqrt[3]{5}$.

No presente exemplo, o primeiro termo da sequência $x_1 = \sqrt[3]{5}$*, o segundo termo* $x_2 = \sqrt[3]{5}$*, o terceiro termo* $x_3 = \sqrt[3]{5}$*, e assim sucessivamente, desta forma, temos que os primeiros termos da sequência numérica são*

$$x_n = (\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \ldots).$$

Exemplo 2.0.3. *Tomando a sequência de o termo geral é dado por* $(x_n) = 2n - 1$.

Aqui o primeiro termo é $x_1 = 1$*, o segundo termo é* $x_2 = 3$*, o terceiro termo é* $x_3 = 5$ *e assim sucessivamente, observe que a sequência numérica aqui descrita é sequência dos números ímpares,*

$$x_n = (1, 3, 5, 7, 9, 11 \ldots).$$

De forma similar, podemos exibir a sequência dos números pares, cujo termo geral é dado por $(x_n) = 2n$*, a saber*

$$x_n = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots).$$

Exemplo 2.0.4. *Escolhendo a sequência cujo o termo geral é* $(x_n) = 1/n$*, teremos*

$$x_n = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots).$$

Exemplo 2.0.5. *Seja* $x_n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ *a sequência da qual tem como termo geral* $(x_n) = (-1)^n$.

Exemplo 2.0.6. *Dado* $(x_n) = (-3)^n$*, a sequência é*

$$x_n = (-3, 9, -27, 81, \ldots).$$

Exemplo 2.0.7. *Seja a sequência cujo o termo geral é* $x_n = \dfrac{3}{n+5}$*. Seus quatro primeiros termos são*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{3}{1+5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
x_2 &= \frac{3}{2+5} = \frac{3}{7} \\
x_3 &= \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8} \\
x_4 &= \frac{3}{4+5} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, a sequência numérica é

$$x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \frac{1}{3}, \ldots\right).$$

Exemplo 2.0.8. *Dada a sequência de termo geral* $x_n = \dfrac{n}{n^2+1}$. *Exibimos os seus primeiros termos*

$$\begin{aligned} x_1 &= = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{2}{2^2+1} = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5} \\ x_3 &= = \frac{3}{3^2+1} = \frac{3}{9+1} = \frac{3}{10} \\ x_4 &= \frac{4}{4^2+1} = \frac{4}{16+1} = \frac{4}{17}. \end{aligned}$$

Logo, a sequência numérica é

$$x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots\right).$$

Exemplo 2.0.9. *Dado a sequência cujo o termo geral é dado por* $(x_n) = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{1} = 2 \\ x_3 &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} = \frac{13}{6} \\ x_4 &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{53}{24} \\ &\vdots \\ x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.10. *Tomando a sequência cujo o termo geral é* $(x_n) = \cos(n\pi)$, *temos que*

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(\pi) = -1 \\ x_2 &= \cos(2\pi) = 1 \\ x_3 &= \cos(3\pi) = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_n = (-1, 1, -1, \ldots).$$

Observe que no Exemplo 2.0.5, Exemplo 2.0.6 e Exemplo 2.0.10 os termos oscilam os sinais consecutivamente termo após termo. Será realizado um estudo mais detalhado sobre sequências que possuem tal propriedade.

Neste momento, falaremos de uma Sequência Numérica importante e bastante conhecida, a Sequência de Fibonacci. A mesma segundo Mol [20] descreve o problema de uma população de coelhos que crescem obedecendo algumas condições.

Exemplo 2.0.11. *(Sequência de Fibonacci)*

A sequência de Fibonacci é definida obedecendo os seguintes critérios

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad com\ n \geq 3,$$

isto é, cada termo é obtido pela adição entre os dois termos anteriores. Desta forma, podemos destacar os primeiros termos dessa sequência. Assim dado $x_1 = 1$ *e* $x_2 = 1$ *temos,*

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + x_1 = 1 + 1 = 2 \\ x_4 &= x_3 + x_2 = 2 + 1 = 3 \\ x_5 &= x_4 + x_3 = 3 + 2 = 5 \\ x_6 &= x_5 + x_4 = 5 + 3 = 8 \\ x_7 &= x_6 + x_5 = 8 + 5 = 13 \end{aligned}$$

e, portanto, obtemos $x_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$.

Observando que cada sequência tem sua particularidade ou um padrão próprio, agora estudaremos Progressões Aritméticas, bem como suas propriedades.

2.0.1 Progressões Aritméticas

Agora estudaremos uma sequência especial, vista no ensino médio como Progressão Aritmética, aqui a definiremos e determinaremos seu termo geral via demonstração, além de exibir e demonstrar propriedades pertinentes da mesma.

Definição 2.0.1. *Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior a este é constante. Essa constante é chamada de razão da Progressão Aritmética, nesse texto será denotada pela letra c. Note que, quanto a quantidade termos podemos ter uma Progressão Aritmética finita ou infinita.*

$$\underbrace{x_n = (x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)}_{P.A.\ finita}$$

$$\underbrace{x_n = (x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots)}_{P.A.\ infinita}$$

Exemplo 2.0.12. *A sequência* $(3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17)$ *é uma Progressão Aritmética finita de razão* $c = 2$.

Exemplo 2.0.13. *A sequência* $(10,7,4,1,\ldots)$ *é uma Progressão Aritmética infinita de razão* $c=-3$.

Nesta seção, demonstraremos o termo geral da Progressão Aritmética e aplicação a exemplos contidos em livros do ensino médio.

2.0.1.1 Termo geral de uma P.A.

Dada uma P.A. $x_n=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ arbitrária, temos que a diferença entre dois termos consecutivos de x_n é constante, igual a razão c,

$$x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3=\ldots=x_{n+1}-x_n=c.$$

Isolando cada um dos termos dessa Progressão, obtemos:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1+c \\ x_3 &= x_2+c \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= x_{n-1}+c. \end{aligned}$$

Reescrevendo as identidades, temos que:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1+c \\ x_3 &= x_1+2c \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= x_1+(n-1)c. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que o termo geral de uma P.A. é dado por

$$x_n=x_1+(n-1)c, \tag{2.1}$$

em que c é a razão da P.A. e x_1 é o seu primeiro termo.

Note que, conhecendo um termo x_k qualquer de uma P.A., e utilizando (2.1), para $n=k$, temos que

$$x_k=x_1+(k-1)c \tag{2.2}$$

Subtraindo (2.1) de (2.2) temos,

$$\begin{aligned} x_n-x_k &= x_1+(n-1)c-[x_1+(k-1)c] \\ x_n-x_k &= x_1+nc-c-x_1-kc+c \\ x_n-x_k &= (n-k)c \\ x_n &= x_k+(n-k)c \end{aligned} \tag{2.3}$$

Que é uma expressão equivalente ao termo geral (2.1). Paralelamente, temos denotado em (2.1), disso segue que aplicado para o elemento $n = k+1$.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_1 + [(k+1)-1]c \\ x_{k+1} &= x_1 + kc. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Abordaremos aqui, certos problemas dentro da temática contidos em alguns livros de matemática, tais como [8] e [9].

Problema 2.0.1. *Seja uma (P.A) de razão $c = 7$, cujo o décimo termo é 67. Determine o vigésimo termo desta (P.A).*

Solução 2.0.1. *Utilizando $x_n = x_k + (n-k)c$, com $n = 20$, $k = 10$, $x_k = 67$ e $c = 7$, temos*

$$\begin{aligned} x_{20} &= 67 + (20-10)\cdot 7 \\ x_{20} &= 67 + 10\cdot 7 = 137. \end{aligned}$$

Problema 2.0.2. *Em uma P.A., o quinto termo vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?*

Solução 2.0.2. *Note que $x_5 = 30$ e $x_{20} = 50$, segue de (2.3) que*

$$\begin{aligned} x_{20} &= x_5 + 15c \\ 50 &= 30 + 15c \\ c &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

De forma semelhante, temos $x_8 = x_5 + 3c$, assim temos que $x_8 = 34$.

Problema 2.0.3. *Determine o termo geral da P.A. dada pela sequência $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$.*

Solução 2.0.3. *Note que o primeiro termo da sequência é $x_1 = 1$, e a razão é 2, assim segue de (2.1) que*

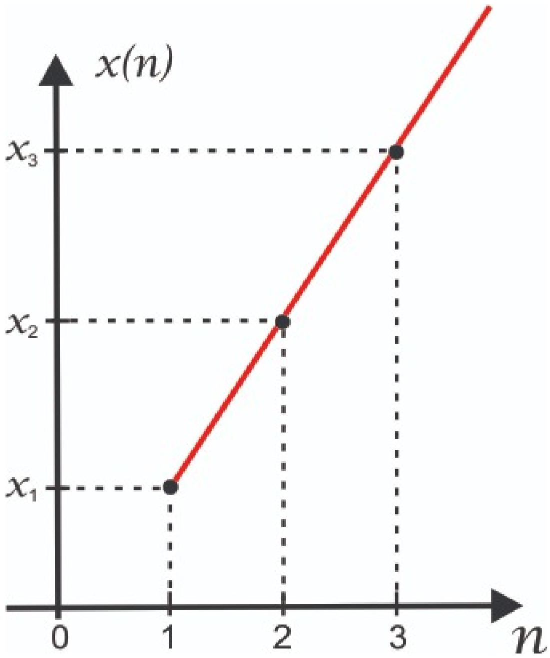
$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)c \\ x_n &= 1 + (n-1)2 \\ x_n &= 1 + 2n - 2 \\ x_n &= 2n - 1, \end{aligned}$$

logo, o termo geral da sequência é $x_n = 2n - 1$.

Além destes problemas, existem outros que podem ser encontrados em [8, 9, 10, 22].

Aqui faremos uma associação de uma (P.A.) a uma função polinomial de grau 1. Segue de (2.1) que o termo geral da Progressão Aritmética é dado por $x_n = x_1 + (n-1)c$, desta forma, podemos pensar nela como uma função que associa cada elemento natural n ao valor x_n. O gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares. Desta maneira, uma sequência (x_n) é uma Progressão Aritmética se e somente se, os pontos do plano que têm as coordenadas $(1,x_1),(2,x_2),(3,x_3),(4,x_4),\ldots$.

Figura 4 – Gráfico da Progressão Aritmética



Fonte: Autor

Para dedução da função que rege uma Progressão Arimética, utilizaremos a fórmula do termo geral (2.1), segue que

$$\begin{aligned} x_n &= x_1+(n-1)c \\ x_n &= x_1+cn-c \\ x_n &= cn+x_1-c \\ x_n &= cn+(x_1-c). \end{aligned}$$

utilizando, $c=a$ e $b=(x_1-c)$, temos $x_n=an+b$, função polinomial de primeiro grau na variável n.

Vamos enunciar e demonstrar algumas resultados sobre as Progressões Aritméticas, e para um melhor entendimento estes resultados, serão acompanhados por aplicações e exemplos.

2.0.2 Propriedade das Progressões Aritmética

Proposição 2.0.1. *Dados três termos consecutivos de uma P.A., o termo médio é a média aritmética dos outros dois termos.*

Demonstração. Considere uma Progressão Aritmética arbitrária $(x_1,\ldots,x_{p-1},x_p,x_{p+1},\ldots)$. Seguem da definição de P.A. as seguintes identidades:

$$x_p = x_{p-1}+c \tag{2.5}$$
$$x_p = x_{p+1}-c$$

Somando as estimativas (2.5), obtemos $2x_p = x_{p-1}+x_{p+1}$. Consequentemente,

$$x_p = \frac{x_{p-1}+x_{p+1}}{2} \tag{2.6}$$

□

Aplicação 2.0.1. *Dada a Progressão Aritmética,* $(x_n) = (2,4,6,8,\ldots)$. *Aplicando Proposição 2.0.1, na Progressão Aritmética* (x_n) *temos*

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_1+x_3}{2} \\ x_2 &= \frac{2+6}{2} = 4. \end{aligned}$$

Assim, como podemos constatar na sequência.

Proposição 2.0.2. *Dada uma Progressão Aritmética finita* $(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_{n-p},\ldots x_n)$. *A soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma P.A. finita, é constante e igual à* x_1+x_n.

Demonstração. Temos que os termos x_{p+1} e x_{n-p} são equidistantes dos extremos, isto é, o número de termos que precede um deles é igual ao número de termos que segue o outro. Seguem de (2.4) as seguintes identidades

$$x_{p+1} = x_1 + p\cdot c \tag{2.7}$$

$$x_{n-p} = x_1 + (n-p-1)\cdot c \tag{2.8}$$

Somando as estimativas (2.7) e (2.8), temos que

$$\begin{aligned} x_{p+1}+x_{n-p} &= x_1+p\cdot c+x_1+(n-p-1)\cdot c \\ x_{p+1}+x_{n-p} &= x_1+x_1+(n-p-1+p)\cdot c \\ x_{p+1}+x_{n-p} &= x_1+(x_1+(n-1)\cdot c). \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$x_{p+1}+x_{n-p} = x_1+x_n.$$

□

Aplicação 2.0.2. *Dada a Progressão Aritmética finita* $(3,6,9,12,15,18,21)$. *Observe que termos extremos desta sequência são* 3 *e* 21. *Tomando dois termos equidistantes aos extremos, aqui tomaremos* $x_3 = 9$ *e* $x_5 = 15$, *segue da proposição 2.0.2 que*

$$x_3 + x_5 = x_1 + x_7$$

Daí, temos que

$$x_3 + x_5 = 9 + 15 = 24$$

$$x_1 + x_7 = 3 + 21 = 24$$

Neste momento, descreveremos interpolação Aritmética.

2.0.2.1 Interpolação Aritmética

Definição 2.0.2. *Dado dois números* a *e* b, *é sempre possível inserir entre eles uma quantidade de* m *qualquer de termos de modo que a sequência resultante seja uma P.A. de extremos* a *e* b. *Desta forma, a P.A. resultante terá* $m+2$ *elementos.*

$$\underbrace{a\ldots\ldots\ldots b}_{m+2}$$

Para conseguirmos interpolar uma Progressão Aritmética, precisamos determinar a razão c. Assim, devemos reescrever (2.1), logo

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (n-1)c \\ x_n - x_1 &= (n-1)c \\ c &= \frac{x_n - x_1}{n-1} \\ c &= \frac{b-a}{m+2-1} \\ c &= \frac{b-a}{m+1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aplicação 2.0.3. *Dados* 15 *e* 30, *queremos interpolar 4 termos aritméticos. Assim devemos considerar que* 15 *e* 30 *são os extremos, acrescentando 4 termos entre eles a sequência desejada será constituída de 6 termo,* $n = 6$, *assim,* $a = 15$ *e* $b = 30$, *logo de* (2.9) *temos*

$$c = \frac{30-15}{4+1} = 3$$

Logo, a Progressão Aritmética de razão $c = 3$ é $(15, 18, 21, 24, 27, 30)$.

Análogo ao estudo das progressões Aritméticas, aqui definiremos, demonstraremos o termos geral de uma Progressão Geométrica, bem como suas propriedades, sempre precedido de exemplos numéricos para melhor compreensão do leitor.

2.0.3 Progressões Geométricas

Definição 2.0.3. *Uma Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência de termos*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

tais que o quociente entre cada termo e o termo anterior é uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão e será representada pela letra q.

Exemplo 2.0.14. *A sequência* $(5, 10, 20, 40, 80, \ldots)$ *é uma progressão geométrica de razão* $q = 2$.

Exemplo 2.0.15. *A sequência* $(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots)$ *é uma progressão geométrica de razão* $q = \frac{1}{2}$.

2.0.4 Termo geral de uma Progressão Geométrica

Dada uma Progressão Geométrica $x_n = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, segue da definição que o quociente entre dois termos consecutivos é constante, igual a razão q.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \cdots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \ldots = q.$$

Isolando cada um dos termos dessa progressão, obtemos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cdot q \\ x_3 &= x_2 \cdot q \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= x_{n-1} \cdot q. \end{aligned}$$

Como observado, note que, as igualdades anteriores aqui podem ser reescrita como

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= x \cdot q \\ x_3 &= x \cdot q^2 \\ x_4 &= x \cdot q^3 \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= x \cdot q^{n-1} \\ x_n &= x_1 \cdot q^{n-1} \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Assim, a fórmula do termo geral de uma Progressão Geométrica arbitrária, $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$, cuja razão é q e primeiro termo x_1.

Problema 2.0.4. *Determinar o* 13^o *termo da Progressão Geométrica* $(64, 32, 16, \ldots)$.

Solução 2.0.4. *Para determinar o* 13^o *termo da progressão usaremos o termo geral da P.G.,* $x_n = x_1 q^{n-1}$*, tendo em vista que o primeiro termo da sequência é* $x_1 = 64$*, a razão é* $q = \dfrac{1}{2}$ *e o termo desejado é o décimo terceiro, ou seja, queremos determinar* x_{13}*, sendo assim, temos* $n = 13$*, logo*

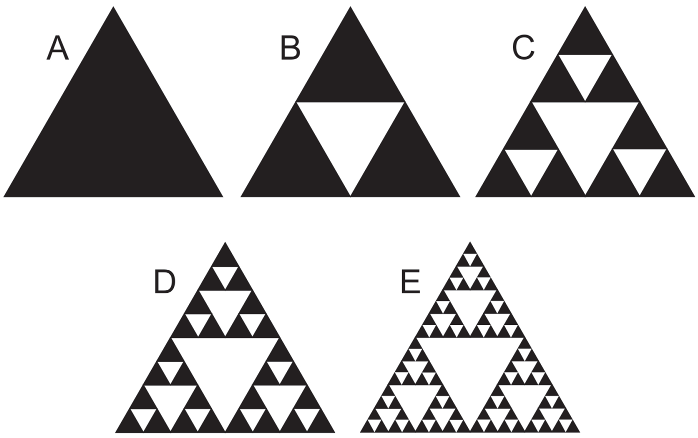
$$\begin{aligned} x_{13} &= x_1 \cdot q^{12} \\ x_{13} &= 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ x_{13} &= 2^6 \cdot \frac{1}{2^{12}} \\ x_{13} &= \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Logo, o décimo terceiro termo da Progressão é $x_{13} = \dfrac{1}{64}$.

Agora, resolveremos um problema envolvendo conceito de Progressões Geométricas a área de figuras planas.

Problema 2.0.5. *Observe a sequência de figuras e determine uma expressão a qual expresse o termo geral que representa a área da região pintada de preto.*

Figura 5 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: Autor

Solução 2.0.5. *Analisando a sequência de figuras, podemos observar a área da figura A, note que a mesma está completa. Já na figura B, a mesma foi dividida em 4 triângulos equiláteros e retirado o triângulo de seu centro, desta forma, ficaremos com* $\dfrac{3}{4}$ *da área inicial, agora considerando a figura C, observamos apenas um dos triângulos e dividindo em 4 partes iguais, e assim faremos para os triângulos restantes desta forma, teremos* $\dfrac{9}{16}$

da área original ou $\left(\frac{3}{4}\right)^2$*, de forma similar faremos com as figuras D e E, respectivamente encontraremos as áreas* $\frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ *e* $\frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$*. Desta forma, para facilitar a resolução, tomaremos o primeiro índice da sequencia como* $n = 0$*, e área inicial, ou seja, a área da figura A igual* N*.*

Para $n = 0$*, temos a área total igual* N*, como ilustra o triângulo A.*

Para $n = 1$*, temos a área restante é igual* $\frac{3}{4}N$ *como ilustra o triângulo B.*

Para $n = 2$ *a área restante é* $\left(\frac{3}{4}\right)^2 N$*, como ilustra o triângulo C.*

Para $n = 3$ *a total restante é* $\left(\frac{3}{4}\right)^3 N$*, como ilustra o triângulo D.*

Segue que

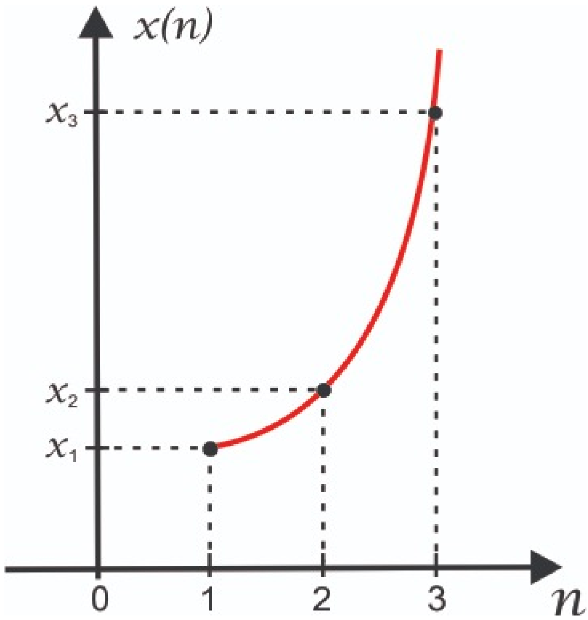
$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & N \\ x_1 & = & \left(\frac{3}{4}\right) \cdot N \\ x_2 & = & \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot N \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n & = & \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot N \end{array}$$

Desta maneira, podemos expressar a sequência que determina a área pintada para cada índice é $x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot N$*.*

Agora faremos um estudo semelhante ao que foi feito nas Progressões Aritméticas, aqui associaremos Progressão Geométrica a uma função.

De (2.10) temos que, o termo geral da Progressão Geométrica é dado por $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$, desta forma, podemos pensar nesta progressão como uma função que associa número natural n ao valor x_n. Desta maneira, uma sequência (x_n) será P.G. se e somente se, os pontos do plano que têm as coordenadas $(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \ldots$, pertencem ao gráfico de uma função do tipo exponencial, ou seja, o termo geral de uma P.G. pode ser visto como uma função do tipo exponencial, como ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Gráfico da Progressão Geométrica



Fonte: Autor

Com base no que foi apresentado anteriormente com relação as Progressões Aritméticas, de forma semelhantes estudaremos aqui resultados a respeito das Progressões Geométricas.

2.0.5 Propriedade das Progressões Geométricas

Proposição 2.0.3. *Dado três termos consecutivos de uma P.G. de termos positivos, o termo médio é a média geométrica dos outros dois termos.*

Demonstração. Tomando a P.G. $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n, \ldots)$; pela definição decorre que:

$$\begin{aligned}\frac{x_p}{x_{p-1}} &= \frac{x_{p+1}}{x_p}\\ {x_p}^2 &= x_{p+1} \cdot x_{p-1}\\ x_p &= \sqrt{x_{p+1} \cdot x_{p-1}}\end{aligned}$$

□

Aplicação 2.0.4. *Considere a Progressão Geométrica* $(1,3,9,27,81,\ldots)$*, tomando os termos consecutivos* $3,9,27$*, segue da Proposição 2.0.3 que* 9 *é a média geométrica de* 3 *e* 27*, como descrevemos a seguir.*

$$\sqrt{3 \cdot 27} = 9 = x_3$$

Proposição 2.0.4. *Em toda P.G. o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.*

Demonstração. Seja a P.G. $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{n-p}, \ldots, x_n)$, os termos x_{p+1} e x_{n-p} são equidistantes dos extremos. Segue da equação (2.10), que

$$x_{p+1} = x_1 q^p \tag{2.11}$$

e

$$x_{n-p} = x_1 q^{(n-p)-1} \tag{2.12}$$

Daí, se multiplicarmos membro a membro de (2.11) com (2.12) , temos:

$$\begin{aligned} x_{p+1} \cdot x_{n-p} &= x_1 q^p \cdot x_1 q^{n-p-1} \\ x_{p+1} \cdot x_{n-p} &= x_1 \cdot x_1 q^{n-1} \\ x_{p+1} \cdot x_{n-p} &= x_1 \cdot x_n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

□

Aplicação 2.0.5. *Dada a progressão geométrica finita* $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256)$*, tomando os termos equidistantes* 4 *e* 64*, segue da Proposição 2.0.4que*

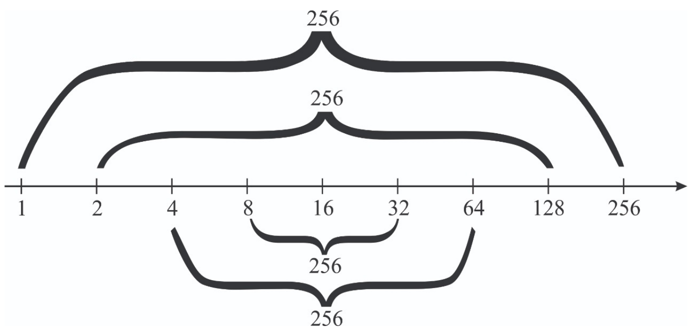
$$x_3 \cdot x_7 = x_1 \cdot x_9$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} x_3 \cdot x_7 &= 4 \cdot 64 = 256 \\ x_1 \cdot x_9 &= 1 \cdot 256 = 256 \end{aligned}$$

Para ilustrar, segue a figura.

Figura 7 – Produto dos termos equidistantes as extremidades



Fonte: Pesquisador

Portanto, independente dos termos que equidista os extremos nesta sequência o produto sempre será igual 256.

Proposição 2.0.5. *Produto dos n termos de uma Progressão Geométrica.*

Demonstração. Dado a P.G. $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$; vamos calcular o produto dos n primeiros termos:

$$P_n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \tag{2.14}$$

$$P_n = x_n \cdot x_{n-1} \cdot x_{n-2} \cdot \ldots \cdot x_2 \cdot x_1 \tag{2.15}$$

Multiplicando membro a membro de (2.18) com (2.19), temos

$$P_n{}^2 = (x_1 \cdot x_n) \cdot (x_2 \cdot x_{n-1}) \cdot (x_3 \cdot x_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} \cdot x_2) \cdot (x_n \cdot x_1)$$

Note que em cada parentese, os termos são equidistantes dos extremos, segue da Proposição 2.0.4 que os produtos são iguais, daí

$$\begin{aligned} P_n{}^2 &= (x_1 \cdot x_n) \cdot (x_1 \cdot x_n) \cdot (x_1 \cdot x_n) \cdot \ldots \cdot (x_1 \cdot x_n) \cdot (x_1 \cdot x_n) \\ P_n{}^2 &= (x_1 \cdot x_n)^n \end{aligned}$$

ou

$$|P_n| = \sqrt{(x_1 \cdot x_n)^n}. \tag{2.16}$$

□

Aplicação 2.0.6. *Dada a progressão geométrica $(1/2, 1, 2, 4, 8, \ldots)$, de termo geral 2^{n-2} para calcularmos o produtos dos 5 primeiros termos dessa sequência. Como $x_1 = 1/2$ e $x_5 = 8$, então segue de (2.16), que*

$$\begin{aligned} |P_5| &= \sqrt{(\frac{1}{2} \cdot 8)^5} \\ |P_5| &= \sqrt{4^5} \\ |P_5| &= 2^5 = 32. \end{aligned}$$

Assim, temos que o produto dos 5 primeiros termos da Progressão Geométrica é 32.

No momento atual, visto que foram estudadas propriedades da P.G. precedidas de aplicações, agora estudaremos à Interpolação Geométrica.

2.0.6 Interpolação Geométrica

Definição 2.0.4. *Dados dois números a e b, podemos interpolar uma quantidade m de termos, de modo que a sequência resultante seja uma Progressão Geométrica de extremos a e b, com $m+2$ elementos.*

Então:

$$\underbrace{a\ldots\ldots\ldots b}_{m+2}$$

Pelo o termo geral da Progressão Geométrica vem que $b = aq^{m+1}$. Para resolver problemas dessa natureza deve ser calculado a razão q que depende diretamente dos valores de a e b e da quantidade m. Mas o problema nem sempre apresenta uma solução; Por exemplo, se $a \cdot b < 0$ e $m+1$ é par.

Aplicação 2.0.7. *Inserir sete meios geométricos entre -1 e 1. Note que* $a = -1$*;* $b = 1$*;* $m = 7$*;* $q = ?$ *Como* $b = aq^{m+1}$*, vem que*

$$\begin{aligned} 1 &= -1 \cdot q^8 \\ q^8 &= -1 \\ q &= \sqrt[8]{-1}. \end{aligned}$$

assim temos, que q *não pertence ao conjunto dos números reais. Nessas condições, é impossível inserir sete meios geométricos entre* -1 *e* 1*, ou o problema não admite soluções reais.*

Aplicação 2.0.8. *Interpolar três meios geométricos entre* 2 *e* $\frac{1}{8}$.

Observe que $a = 2$*;* $b = \frac{1}{8}$*;* $m = 3$*;* $q = ?$

Como $b = aq^{m+1}$*, vem que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= 2 \cdot q^4 \\ q^4 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

assim temos, $q = \frac{1}{2}$ *e* $q = -\frac{1}{2}$*. Portanto, as progressões são* $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ *ou* $\left(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

Aqui estudamos as Sequências Numéricas, e apresentamos suas particularidades bem como as Progressões Aritméticas e Geométricas.

Analisando o que foi dito anteriormente, verificamos que cada Sequência de Números Reais possui suas particularidades e propriedades específicas. Neste momento, vamos à algumas definições e resultados do estudo de Sequência de Números Reais.

2.1 Monotonicidade de uma Sequência

Inicialmente, iremos analisar se uma dada Sequência possui uma ordem nos valores dos seus elementos. No sentido de que, dado um termo arbitrário de uma sequência (x_n), este ser maior ou menor do que o termo consecutivo a ele e assim sucessivamente. A noção de maior ou menor é oriunda da ordenação dos números reais $\mathbb{R}$. Mais precisamente, nesta seção iremos analisar se, dado uma sequência de números reais (x_n), seus termos estão *crescendo*, *decrescendo* ou não alteram seus valores reais.

Definição 2.1.1. *Uma sequência (x_n) é dita não decrescente, ou seja, ela cresce ou seus elementos mantém o mesmo valor, quando*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots,$$

isto é, quando $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se a desigualdade anterior for estrita, ou seja, $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência é dita estritamente crescente, ou mais precisamente crescente.

Exemplo 2.1.1. *Seja* $(x_n) = n + \dfrac{2}{n}$

$$x_n = (3, 3, 11/3, 18/4, 27/5, \ldots)$$

Note que, os primeiros termos nos sugere que a sequência seja não decrescente.

Exemplo 2.1.2. *Dado* $(x_n) = \dfrac{n}{n+1}$

$$x_n = (1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \ldots)$$

Analisando os primeiros termos da sequência tudo indica que esta seja crescente. Mas, não podemos concluir isso apenas analisando uma quantidade finita termos.

Definição 2.1.2. *Uma sequência (x_n) é dita não crescente se os seus elementos decrescem ou mantém o mesmo valor,*

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \ldots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \ldots,$$

isto é, quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando a desigualdade acima for estrita, ou seja, $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência é dita estritamente decrescente, ou decrescente.

Exemplo 2.1.3. *Seja* $x_n = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$. *Note que, os primeiros termos nos sugere que a sequência seja não crescente.*

Exemplo 2.1.4. *Seja* $(x_n) = \dfrac{n}{n^2+1}$.

$x_n = (\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \ldots)$ *Analisando, os primeiros termos da sequência, podemos supor que esta seja decrescente.*

Exemplo 2.1.5. *Seja* $(x_n) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$x_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots)$ *Como no Exemplo anterior, os primeiros termos nos sugere que a sequência seja decrescente.*

Definição 2.1.3. *Quando a sequência* (x_n) *é tal que* $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x_{n+1}$, *ou seja, quando* $x_n = x_{n+1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *ela é uma sequência constante.*

Exemplo 2.1.6. *Seja* $(x_n) = \sqrt[3]{5}$

$x_n = (\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}, \ldots)$

Exemplo 2.1.7. *Seja* $(x_n) = 1$

$x_n = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$

Temos que o Exemplo 2.1.6 e Exemplo 2.1.7, nos sugere que ambas sequências sejam constantes.

Definição 2.1.4. *Uma sequência* (x_n) *é dita alternada se seus termos alternam os sinais termo após termo consecutivamente, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.1.8. *Seja* $(x_n) = (-1)^n$

$(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

Exemplo 2.1.9. *Seja* $(x_n) = (-2)^{n-1}$

$(x_n) = (1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes e constantes são denominadas Sequencias Monótonas. É importante observar que a monotonicidade de uma quantidade finita de elementos de uma sequência não garante a monotonicidade da sequência.

Existem técnicas para demonstrar a monotonicidade de uma sequência e neste texto serão apresentadas três delas. Discutiremos sobre o método indutivo, a comparação dos termos consecutivos e a utilização da função real associada à sequência, isto é, a função que satisfaz $f(n) = x_n$.

O método indutivo se dá avaliando o resultado para o primeiro termo x_1 no caso para $n = 1$. Supõe que o resultado seja válido para um certo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, para o k-ésimo termo x_k e mostramos o resultado para o próximo elemento x_{k+1}. Para ilustrar este caso, vamos ao seguinte exemplo:

Exemplo 2.1.10. *Dado $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 6)$, temos a seguinte sequência, dada por*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= \frac{1}{2}(x_1 + 6) = 4 \\ x_3 &= \frac{1}{2}(x_2 + 6) = 5 \\ x_4 &= \frac{1}{2}(x_3 + 6) = \frac{11}{2} \\ x_5 &= \frac{1}{2}(x_4 + 6) = \frac{23}{4}. \end{aligned}$$

Assim, os primeiros termos da sequência x_n é

$$x_n = (2, 4, 5, 11/2, 23/4, \cdots)$$

Estes primeiros termos da sequências nos sugerem que a sequência seja crescente. Para verificarmos tal fato, ou seja, provar que $x_n < x_{n+1}$, para todo, $n \geq 1$, vamos utilizar indução matemática.

Demonstração. i) Note que o resultado é válido para $n = 1$, pois $x_1 = 2 < 4 = x_2 = 2$.

ii) Suponhamos a validade para para $n = k$, ou seja,

$$x_k < x_{k+1} \tag{2.17}$$

iii) Devemos mostrar a validade para o sucessor de $n = k$, isto é, mostraremos que $x_{k+1} < x_{(k+1)+1} = x_{k+2}$.

Somando 6 e dividindo por 2 a desigualdade (2.17), temos que

$$\frac{1}{2}(x_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(x_k + 6)$$

$$x_{k+1} < x_{k+2}.$$

Logo, a desigualdade é verdadeira para todo n.

□

O segundo método é avaliar o valor da divisão dos termos consecutivos da sequência (x_n), isto é, o valor de

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \tag{2.18}$$

No caso em que a divisão (2.18) é maior do que 1, ou seja, $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$, temos que a sequência (x_n) é decrescente. Por outro lado se (2.18) for menor do que 1, ou seja,

$\dfrac{x_n}{x_{n+1}} < 1 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$ então a sequência (x_n) é dita crescente. Finalmente, para o caso em que (2.18) foi igual a 1, ou seja, $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = 1 \Rightarrow x_n = x_{n+1}$, concluímos que a sequência (x_n) em estudo é constante.

Exemplo 2.1.11. *Vamos mostrar que a sequência* $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *é decrescente.*

Observe que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1!}{1^1} = 1 \\ x_2 &= \frac{2!}{2^2} = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{3!}{3^3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

portanto, temos que os primeiros termos da sequência são

$$x_n = (1, 1/2, 2/9, \ldots)$$

Assim temos $x_1 > x_2 > x_3$*, isso nos sugere que a sequência seja decrescente. Vamos demonstrar esse fato, ou seja, vamos mostrar que* $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} > 1$*. Para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Calculando a razão $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{x_{n+1}} &= \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} \\ &= \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n!} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1, \qquad \forall\ n\ \in\ \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Portanto, $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, ou seja, a sequência x_n é decrescente. □

Exemplo 2.1.12. *Vamos provar que a sequência* $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ *é crescente. Note que*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \\ x_3 &= \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

observe que os primeiros termos da sequência são $x_n = (1/2, 2/3, 3/4, \ldots)$ *Observando cada elemento, temos* $x_1 < x_2 < x_3$. *Para verificarmos a monotonicidade de* x_n *que usaremos a fato que* $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} < 1$.

Demonstração.

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1} \Leftrightarrow n[(n+1)+1] < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2+2n < n^2+2n+1 \Leftrightarrow 0 < 1 \quad (2.20)$$

Logo temos que a desigualdade (2.20) é verdadeira, portanto a sequência é crescente. □

O terceiro método para a analisar a monotocidade de uma sequência (x_n) é considerar a função associada a sequência, isto é, uma função f que satisfaz $f(n) = x_n$; $n \in \mathbb{N}$.

Nesse sentido, analisamos a função

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ f(x) \end{aligned}$$

E aplicamos o teste da derivada, mais precisamente, se $f'(x) > 0$, então f é crescente. De modo semelhante, quando $f'(x) < 0$, a função f é decrescente.

Após determinarmos os intervalos $I_1 = \{x \in \mathbb{N}; f'(x) > 0\}$ e $I_2 = \{x \in \mathbb{N}; f'(x) < 0$ restringimos estes aos números naturais $x \in \mathbb{N}; x \geq 1$. Se estes números estão contidos em I_1 e I_2 então, ao associarmos estes a sequência (x_n) garantimos o crescimento ou decrescimento da sequência.

Exemplo 2.1.13. *Seja a sequência* $(x_n) = n + \dfrac{2}{n}$, *vamos verificar sua monotonicidade.*

Verifique que, os primeiros termos da sequência $(x_n) = (3, 3, \frac{11}{3}, \frac{18}{4}, \frac{27}{5}, \ldots)$. *Note que* $x_1 = x_2 < x_3 < x_4$, *isso nos induz a pensar que* (x_n) *é não decrescente.*

Seja $f(x)$ *a função associada* (x_n), *isto é,* $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$ *podemos reescrever a função* f, *como* $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$.

Calculando a derivada de f, *temos que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x)\cdot x - (x^2+2)\cdot 1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2 - (x^2+2)}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2-2}{x^2} \end{aligned}$$

Observe que $f'(x) > 0$ *se, e somente se,* $x^2 > 2$. *Em particular que* $x > \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, *temos que* $f'(x)$ *é positiva, segue* (x_n) *é crescente para todo* $n > 2$.

Neste momento classificaremos as Progressões Ariméticas e Geométricas quanto a sua monotonicidade. Dado o termo Geral da Progressão Aritmética, ou seja,

$$x_n = x_1 + (n-1)c.$$

Tomando a função associada de x_n, temos que

$$f(x) = x_1 + (x-1)c; \quad \text{com } x \in \mathbb{N}$$

Note que

$$f'(x) = 0 + (1-0)c = c$$

Podemos concluir que

i) Se $f'(x) > 0$ se, e somente se, $c > 0$.

ii) Se $f'(x) < 0$ se, e somente se, $c < 0$.

Concluímos que uma P.A. é crescente para a razão $c > 0$ e decrescente o caso contrário.

Exemplo 2.1.14. *Seja a Progressão Aritmética* $x_n = (-3,-1,1,3,5,\ldots)$, *então* $c = 2 > 0$, *portanto* x_n *crescente.*

Exemplo 2.1.15. *Dada a Progressão Aritmética* $x_n = (15,10,5,0,-5,\ldots)$, *então* $c = -5 < 0$, *portanto* x_n *é decrescente.*

Diferente do que realizamos com as Progressões Aritmética, aqui vamos analisar a monotonicidade das Progressões Geométricas, através da razão dos termos consecutivos. Observe que, caso a razão $q < 0$ não teremos monotonicidade, pois obteremos uma sequencia alternada, por exemplo, veja o Exemplo 2.1.8 e Exemplo 2.1.9.

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_1 \cdot q^{n-1}}{x_1 \cdot q^n} \tag{2.21}$$

Nessas condições devemos analisar x_1 e q para inferir sobre o seu crescimento. Já que queremos verificar se $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} < 1$ ou $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} > 1$.

i) Se $x_1 > 0$, então de (2.21) segue que

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{q}.$$

Então $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow q > 1$

Portanto, temos que $x_1 > 0$ e $q > 1$, logo P.G. será crescente.

ii) Se $x_1 > 0$, então de (2.21) segue que

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{q}.$$

Então $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow q < 1$

Por conseguinte, temos que $x_1 > 0$ e $0 < q < 1$, logo P.G. será decrescente.

iii) Se $x_1 < 0$, então de (2.21) segue que

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{q}.$$

Então $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow q > 1$

Assim sendo, temos que $x_1 < 0$ e $q > 1$, logo (P.G.) será decrescente.

iv) Se $x_1 < 0$, então de (2.21) segue que

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{q}.$$

Então $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow q < 1$

Consequentemente, temos que $x_1 < 0$ e $0 < q < 1$, logo P.G. será crescente.

Exemplo 2.1.16. *Seja a Progressão Geométrica* $(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots)$, *em que* $x_1 = \frac{1}{2}$ *e* $q = 2$; *É uma Progressão Geométrica crescente.*

Exemplo 2.1.17. *Dado a Progressão Geométrica* $(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots)$, *em que* $x_1 = 8$ *e* $q = \frac{1}{2}$; *É uma Progressão Geométrica decrescente.*

Exemplo 2.1.18. *Tomando a Progressão Geométrica* $(-1, -2, -4, -8, \ldots)$, *em que* $x_1 = -1$ *e* $q = 2$; *É uma Progressão Geométrica decrescente.*

Após o estudo da monotonicidade e sua aplicação nas progressões. No momento atual, mostraremos uma aplicação das Progressões Geométricas na Matemática Financeira.

Aplicação 2.1.1. *Encontrar a expressão que determinar o montante no período finito* n *sobre o regime de Juros Compostos.*

Note que é sabido que o montante é a soma de um capital investido adicionado com juros de um determinado período. Assim, calculando o montante mês a mês, temos

$$\begin{aligned}
M_1 &= C+Ci = C(1+i)\\
M_2 &= M_1+M_1 i = M_1(1+i) = C(1+i)^2\\
M_3 &= M_2+M_2 i = M_2(1+i) = C(1+i)^3\\
M_4 &= M_3+M_3 i = M_3(1+i) = C(1+i)^4\\
\vdots &= \vdots\\
M_n &= M_{n-1}+M_{n-1} i = M_{n-1}(1+i) = C(1+i)^{n-1}(1+i) = C(1+i)^n
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão que determinar o montante para n meses é $M_n = C(1+i)^n$.

Observe que, $(M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots)$, representa uma sequência e em especial uma Progressão Geométrica em que o primeiro termo da mesma é $M_1 = C(1+i)$ e a razão $q = (1+i)$.

Discutimos nas seções anteriores a respeito de Sequências Numéricas e suas particularidades, e nelas exibindo uma gama de exemplos e aplicações que podem auxiliar o docente da Educação Básica. Agora, realizaremos um estudo sobre as Subsequência.

2.2 Subsequência

Definição 2.2.1. *Dada uma sequência $x_n = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, define-se uma subsequência de x_n uma restrição de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k \ldots\} \subset \mathbb{N}$, tal que*

$$x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'} = (x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots).$$

Exemplo 2.2.1.

$$\begin{aligned}
x_n &= (-1)^n\\
&= (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)
\end{aligned}$$

Observe que a sequência admite duas subsequências $x_{2n+1} = -1$ e $x_{2n} = 1$.

Exemplo 2.2.2.

$$\begin{aligned}
x_n &= n\\
x_n &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)
\end{aligned}$$

Neste exemplo, a sequência possui duas subsequências, $x_{2n+1} = (1, 3, 5, 7, \ldots)$ e $x_{2n} = (2, 4, 6, 8, \ldots)$.

Neste momento iremos avaliar o comportamento dos valores reais dos elementos de uma sequência (x_n), quando o índice n é suficientemente grande. Mais precisamente, estaremos interessados em verificar se estes valores ficam "bem"próximos de um certo número ou crescem/decrescem de maneira incontrolável.

2.3 Limite de uma Sequência

Intuitivamente, afirmar que um número real L é o limite de uma sequência (x_n) é o mesmo que falar que, quando n se torna suficientemente grande, os valores (x_n) se aproximam e se mantêm próximos de L, tão perto de L quanto se queira. Antes de partir para a definição formal de limite de sequência, vamos a algumas definições preliminares.

Definição 2.3.1. *Uma sequência (x_n) diz-se limitada inferiormente quando existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 2.3.1. *A sequência $x_n = (\ldots,-3,-2,-1,0)$ é limitada superiormente por* 0.

Definição 2.3.2. *Uma sequência (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 2.3.2. *A sequência $x_n = (1,2,3,\ldots)$ que é limitada inferiormente por* 1.

Definição 2.3.3. *Se uma sequência (x_n) for limita inferiormente e superiormente, então (x_n) é dita Limitada.*

Observação 2.3.1. *Note que, tomando $K = \max\{|a|,|b|\}$, onde a e b seguem das definições Definição 2.3.1 e Definição 2.3.2, tem-se que $|x_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, toda sequência constante é limitada.*

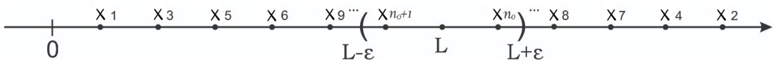
Observação 2.3.2. *Podemos pensar em uma sequência (x_n) é limitada, quando o conjunto dos valores de seus termos for limitado, isto é, quando existem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a,b]$.*

Vamos introduzir agora um conceito que é de suma importância, e é central nos principais resultados referentes à sequências numéricas, o conceito de convergência de um sequência, mais precisamente estaremos interessados em estudar o limite de uma sequência arbitrária x_n quando n cresce indefinidamente.

Definição 2.3.4. *Uma sequência arbitrária (x_n) é dita convergente, quando existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Em outras palavras, uma sequência converge, quando existe um número real L para o qual os valores de (x_n) se aproximam de L, quando o índice n assume valores "muito grandes"e neste caso dizemos que (x_n) converge para L e denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$*

ou $x_n \longrightarrow L$ *quando* $n \longrightarrow \infty$ *ou* $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. *Caso, contrário, dizemos que a sequência diverge (ou é divergente).*

Figura 8 – Convergência na reta real



Fonte: Pesquisador

Vamos aprofundar um pouco a definição anterior e formalizaremos a definição formal de limite de sequência, a qual será utilizada na demostração dos principais resultados desta seção. Neste sentido, iremos estabelecer o quanto queremos que os termos da sequência se aproximem do limite L e este valor implicará diretamente no índice da sequência x_n.

Dada uma sequência x_n, dizemos que esta sequência converge para um número real L, ou seja, que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = L$ se, dado qualquer número real $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - L| < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0. \tag{2.22}$$

Analisando o módulo da desigualdade (2.22), tomando índices $n \geq n_0$, podemos rescrevê-la da seguinte maneira:

$$-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon$$
$$L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon,$$

donde concluímos que, analisando os índices $n \geq n_0$, os elementos $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Anteriormente foi abordado conceitos de limitação de uma sequência, porém, agora, destacaremos as propriedades de limites para Sequências.

2.3.1 Propriedades do Limite para Sequências

Teorema 2.3.1. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências convergentes e* c *uma constante, então*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} c = c$

iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$ *se* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^p = [\lim\limits_{n\to\infty} x_n]^p$ *se* $p > 0$ *e* $x_n > 0$

Aqui demonstraremos o item *i)*, as demais demonstrações podem ser encontradas em [17] e [18].

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrário tal que, exista um índice n_1 de tal forma que, tomando $n > n_1$, teremos

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.23}$$

De forma análoga, devemos garantir a existência de n_2, de tal forma que, tomando $n > n_2$, temos que

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.24}$$

Aplicando a definição de limite em simultaneamente em (2.23) e (2.24) temos,

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)|$$

Segue da desigualdade triangular que

$$|(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

□

Exemplo 2.3.3.

$$x_n = \frac{n}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$*, existe um índice* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\begin{aligned} |x_n - 1| &< \varepsilon, \ \forall\ n \geq n_0 \\ \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &< \varepsilon, \ \forall\ n \geq n_0 \end{aligned}$$

Note que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

Utilizando o fato de que $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $n+1 > n$*, logo*

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \quad n>\frac{1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Então, tomando $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$, *segue que*

$$\varepsilon > \frac{1}{n_0} > \frac{1}{n_0+1} = \left|\frac{-1}{n_0+1}\right| \tag{2.25}$$

Consequentemente, temos que

$$\varepsilon > \left|\frac{-1}{n_0+1}\right| = \left|\frac{n_0-(n_0+1)}{n_0+1}\right| = \left|\frac{n_0}{n_0+1}-1\right|$$

Segue que para todo $n \geq n_0$, $|x_n - 1| < \varepsilon$ *como queríamos demonstrar*

Exemplo 2.3.4.

$$x_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Devemos provar que dado $\varepsilon > 0$, *existe um índice* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *tal que*

$$\begin{aligned}|x_n - 0| \quad &< \quad \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_0\\ \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| \quad &< \quad \varepsilon,\ \forall\ n \geq n_0\end{aligned}$$

Observe que

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|<\varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\varepsilon\end{aligned}$$

Como $n+1 > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *então*

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$$

Devido a função $f(x) = \sqrt{x}$ *ser contínua, Logo*

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$$

Daí segue que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |x_n - 0| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4\varepsilon^2} < n \end{aligned}$$

Basta tomarmos $n_0 \in \mathbb{N}$; $n_0 > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$. *Logo, temos que*

$$x_n \longrightarrow 0$$

Exemplo 2.3.5. *A sequência* $x_n = (-1)^n$ *diverge.*

Para mostrar este fato, devemos provar que não vale a definição de limite para essa sequência, isto é, mostrar que não existem $\varepsilon > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$|x_n - L| \quad \geq \quad \varepsilon, \ \forall \ n \geq n_0.$$

Equivalentemente, devemos provar que para nenhum número real L *para quaisquer* $\varepsilon > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$, *existem termos* $(x_n) \in \mathbb{N}$, *tais que*

$$|x_n - L| < \varepsilon, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Note que,

$$|x_n - L| + |x_{n+1} - L| = |x_n - L| + |L - x_{n+1}|$$

Segue da desigualdade triangular que

$$|x_n - L| + |L - x_{n+1}| \geq |(x_n - L) + (L - x_{n+1})| = |x_n - x_{n+1}|.$$

Como $x_n = (-1)^n$, *então*

$$|x_n - L| + |L - x_{n+1}| \geq |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = |(-1)^n(1-(-1))| = |(-1)^n||2| = 2.$$

Portanto, $|x_n - L| + |L - x_{n+1}| \geq 2$.

De maneira equivalente, temos que

$$|x_n - L| \geq 1 \text{ ou } |x_n - L| \geq 1.$$

O que implica que, para $0 < \varepsilon < 1$, não temos que $|x_n - L| < \varepsilon$, um n suficientemente grande, ou seja, (x_n) é divergente.

No intuito de aprofundar o entendimento da definição formal de limite de sequência, que de modo geral é algo de difícil compreensão para uma grande maioria dos leitores, vamos enunciar e demonstrar alguns dos principais resultados do tema deste capítulo.

Teorema 2.3.2 (Unicidade do Limite de uma Sequência)**.** *Se uma sequência x_n é convergente, ou seja, existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, então esse limite é único.*

Demonstração. Por hipótese, temos que o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe, então denotemos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. A tese deste Teorema é que este limite é único. A técnica de provarmos essa tese é a demonstração por contradição, na qual contrariamos a tese e obtemos uma contradição com a hipótese, chegando assim em um absurdo e concluímos que a tese é verdadeira.

Vamos supor que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ não seja único, então existem L_1 e L_2 com $L_1 \neq L_2$ e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L_1 \tag{2.26}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L_2 \tag{2.27}$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número arbitrário. Segue da definição formal (2.22) aplicada na convergência (2.26) que irá existir um índice n_1 de tal forma que, tomando $n \geq n_1$, teremos

$$| x_n - L_1 | \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2.28}$$

Aplicando o mesmo processo para a convergência dada em (2.27), garantimos a existência de um índice n_2 de tal forma que, tomando $n \geq n_2$, temos que

$$| x_n - L_2 | \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2.29}$$

Note que, nas estimativas (2.28) e (2.29), tomamos $| x_n - L_i | \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para $i = 1, 2$ e $n > n_1, n_2$ e isso foi feito de modo a facilitar as operações posteriores.

Utilizando a desigualdade triangular e técnicas básicas de operações com módulo, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} | L_1 - L_2 | &= | L_1 - x_n + x_n - L_2 | \\ &= | -(x_n - L_1) + (x_n - L_2) | \\ &\leq | x_n - L_1 | + | x_n - L_2 | . \end{aligned} \tag{2.30}$$

Observe que os dois termos do lado direito da estimativa (2.30) são os mesmos de (2.28) e (2.29). Entretanto essas últimas desigualdades não são satisfeitas para todos os índices

$n \in \mathbb{N}$, apenas para $n \geq n_1$ em (2.28) e $n \geq n_2$ em (2.29). Deve ser tomado um índice que satisfaça ambas estimativas e este é o maior dos índices n_1 e n_2, mais precisamente $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Temos que n_0 só pode assumir dois valores n_1 ou n_2. Em todo caso, para $n \geq n_0$, temos que $n \geq n_1$ e $n \geq n_2$. Deste fato, temos que tomando $n \geq n_0$, $\mid x_n - L_1 \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e $\mid x_n - L_2 \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Combinando este fato com (2.30), obtemos que

$$\mid L_1 - L_2 \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Temos que $0 \leq \mid L_1 - L_2 \mid < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ tomado suficientemente pequeno o quão se queira. Deste modo, podemos pensar em $\varepsilon = \frac{1}{k}$, como uma sequência que tende pra zero, quando o argumento k tende a infinito. Então podemos concluir que $\mid L_1 - L_2 \mid = 0$. Donde segue que $L_1 = L_2$, o que é uma contradição com a hipótese de que $L_1 \neq L_2$. Portanto o limite é único, como queríamos demonstrar. □

No que segue, enunciaremos, demonstraremos e serão dadas algumas aplicações de uma dos teoremas mais clássicos e conhecidos do estudo de limite de sequências, o Teorema do Confronto, também conhecido Teorema do Sanduíche.

Teorema 2.3.3. *(Teorema do Confronto) Supondo que três sequências* (a_n), (b_n) *e* (c_n) *satisfazem* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *, para* n *suficientemente grande e que os limites* $\lim a_n = L_1$ *e* $\lim b_n = L_2$ *existam com* $L_1 = L_2 = L$*. Então, obrigatoriamente deve-se ter* $\lim b_n = L$.

Demonstração. Por hipótese, temos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$ e $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} c_n = L$. Segue da definição formal de limite, que dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ relativo a sequência a_n e $n_2 \in \mathbb{N}$ com respeito a sequência b_n tais que:

$$n > n_1 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \Rightarrow b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, logo $\lim b_n = L$. □

Aplicação 2.3.1. *A sequência* $(x_n) = \dfrac{sen(n^2)}{n}$ *converge para* 0.

Demonstração. Segue da definição da função seno que $-1 \leq \text{sen}(\theta) \leq 1$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Em particular, temos que

$$-1 \leq \text{sen}(n^2) \leq 1.$$

Dividindo ambos lados da desigualdade anterior por $n > 0$,

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\text{sen}(n^2)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Como $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ e $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Então pelo Teorema do Confronto, temos que $\lim x_n = 0$.

$\square$

Aplicação 2.3.2. *Seja (x_n) uma sequência de números reais, tal que existem números reais $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < x_n < b$, a partir de um $n_0 \in \mathbb{N}$. Então $(x_n)^{1/n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $a < x_n < b$ e a sequência assume apenas valores positivos. Segue deste fato que:

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{b} \tag{2.31}$$

Observando a estimativa (2.31), nota-se que basta mostrarmos que os extremos $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ convergem para 1, via Teorema do Confronto, concluímos que $\sqrt[n]{x_n} = (x_n)^{1/n} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Aqui, vamos manipular o termo $\sqrt[n]{a}$ de tal forma que o limite seja calculado de uma maneira direta. Note que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Aplicando a função logarítmica na base e em ambos os lados e utilizando propriedades da função ln, obtemos

$$\ln \sqrt[n]{a} = \ln(a^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(a).$$

Com o intuito de voltar a $\sqrt[n]{a}$, vamos aplicar a função inversa da ln nas estimativas anteriores,

$$\sqrt[n]{a} = e^{ln \sqrt[n]{a}} = e^{\frac{1}{n} \ln(a)}.$$

Portanto, temos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(a)}$. Utilizando que a função exponencial é contínua, temos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = e^{0 \cdot \ln a} = e^0 = 1.$$

Analogamente provamos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$ e, portanto, pelo Teorema do Confronto, temos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = 1$. $\square$

Aplicação 2.3.3. *A sequência $x_n = \dfrac{2^n}{n^n}$ converge para 0.*

Note que $x_n = \dfrac{2^n}{n^n} = \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$, pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$x_n = \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right)^{n-1}.$$

Pela definição da sequência x_n, temos que $0 < x_n = \left(\dfrac{2}{n}\right) \left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, observe que $\dfrac{2}{n} \leq 1$, para $n \geq 2$. Como o estudo da convergência de *sequências de números reais não é influenciado por um número finito de termos desta, temos que*

$$\left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} \leq 1^{n-1} = 1, \text{ para } n \geq 2.$$

Consequentemente,

$$0 < x_n = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} < \left(\frac{2}{n}\right) \cdot 1$$

Daí segue que,

$$0 < x_n < \frac{2}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto $x_n \longrightarrow 0.$

Agora, estamos interessados em relacionar o estudo da limitação de sequência de números reais com a convergência da sequência.

Teorema 2.3.4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja x_n uma sequência convergente, isto é, temos que o limite $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ existe, para algum $L \in \mathbb{R}$. Vamos provar que x_n é limitada. Neste sentido, vamos utilizar a definição formal de limite e analisar o comportamento dos elementos da sequência quando seus índices formam uma quantidade finita de termos.

Segue da definição de limite, que existe $n_0 \in N$, tal que para índices $n > n_0$, temos que $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Em todo caso, temos que

$$x_n \leq |L| + \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{2.32}$$

Observe que o conjunto infinito $\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2} \ldots\}$ de elementos da sequência são limitados devido à (2.32). Resta portanto, limitar os termos do conjunto finito de números reais $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-1}\}$. Como se trata de um conjunto finito de números reais, obrigatoriamente existe o maior e o menor elemento deste conjunto. Considerando $M = \max\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-1}\}$, temos que

$$x_n \leq M, \quad \text{para todo} \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1. \tag{2.33}$$

Tanto $|L| + \varepsilon$ quanto M são números reais. Utilizando um raciocínio análogo ao feito na obtenção da estimativa (2.33), garantimos a existência de $K = \max\{|L| + \varepsilon, M\}$. Combinando as estimativas (2.32) e (2.33) e utilizando o valor de K, obtemos

$$x_n \leq K, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N},$$

o que implica na limitação de (x_n). □

Observação 2.3.3. *A recíproca deste resultado não é verdadeira. O resultado garante que toda sequência convergente é limitada, logo sua recíproca seria de que toda sequência limitada fosse convergente.Entretanto, a sequência alternada* $x_n = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ *é limitada já que* $| x_n | \leq 1$*, mas não é convergente, já que os termos ímpares da sequência* (x_n) *são todos constantes iguais a* 1 *e os pares iguais a* -1*, não garantindo a convergência da mesma, devido à essa alternância.*

No sentido da Observação 2.3.3, cabe aqui fazer um breve estudo sobre sequências *contidas* em outras sequências, como aconteceu na sequência $x_n = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, que os termos $x_{2n+1} = -1$ e $x_{2n} = 1$. Portanto vamos definir, exemplificar e estudar resultados referentes às Subsequências de sequências de números reais, que será feito posterior ao próximo resultado.

O próximo resultado é de suma importância no estudo de sequência no sentido de que ele completa o teorema anterior. No Teorema 2.3.4 a limitação não garante a convergência, então o próximo resultado coloca a hipótese necessária, além da limitação para garantir a convergência, no caso a monotonicidade.

Teorema 2.3.5. *Toda sequência monótona limitada converge.*

Antes de partir para a demonstração, é importante salientar que a sequência citada na Observação 2.3.3 $x_n = (-1)^n$ não é monótona. Então esta sequência não é um contra exemplo para este resultado.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona. Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência (x_n) seja não decrescente, isto é,

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$$

Além disso, por hipótese a sequência x_n é limitada. Este fato implica que exista um número $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$| x_n | \leq K \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.34}$$

Temos, via completude do espaço $\mathbb{R}$ que dado $\varepsilon > 0$, $K - \varepsilon < K$ e além disso, pela definição da sequência x_n, existirá algum índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K - \varepsilon < x_n$, para todo $n \geq n_0$. Além disso, como a sequência x_n é não decrescente e existem infinitos índices n, temos que

$$K - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n, \tag{2.35}$$

para todos $n \geq n_0$. Combinando as estimativas (2.34) e (2.35), temos que

$$K - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq K < K + \varepsilon, \, \forall \, n \geq n_0. \tag{2.36}$$

Note que as desigualdades (2.36) implicam em

$$K-\varepsilon \leq x_n \leq K+\varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0.$$

e esta última implica que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = K$, ou seja, x_n é convergente. $\square$

Neste momento via indução, demostraremos a monotonicidade e o limite de uma sequência particular, afim de estudar o seu comportamento.

Aplicação 2.3.4. *A sequência* $(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots)$ *é convergente. Note que,*

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \sqrt{2} \\ x_2 & = & \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1} \\ x_3 & = & \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2+x_2} \\ \vdots & = & \vdots \\ x_n & = & \sqrt{2+x_{n-1}} \end{array}$$

Vamos provar que (x_n) é monótona e limitada e concluir sua convergência, devido ao Teorema 2.3.5.

Para garantir a monotonicidade da sequência (x_n), vamos utilizar indução sobre o índice $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que (x_n) é uma sequência crescente. Note que

i) $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2$, *logo o primeiro passo indutivo é satisfeito.*

ii) *(Hipótese de Indução) Suponhamos que $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

iii) *(Tese) Vamos provar que $x_{n+1} < x_{n+2}$.*

Segue da definição de (x_n) que

$$\begin{array}{rcl} x_{n+2} & = & \sqrt{2+x_{n+1}} \\ x_{n+2} & = & \sqrt{2+\sqrt{2+x_n}}. \end{array}$$

Utilizando a Hipótese de Indução para o índice $n-1$, temos que

$$\begin{array}{rcl} x_{n+2} & = & \sqrt{2+\sqrt{2+x_n}} > \sqrt{2+\sqrt{2+x_{n-1}}} \\ x_{n+2} & = & \sqrt{2+\sqrt{2+x_n}} > \sqrt{2+x_n} \\ x_{n+2} & = & \sqrt{2+\sqrt{2+x_n}} > x_{n+1} \\ x_{n+2} & > & x_{n+1}, \end{array}$$

provando assim que a sequência é crescente, isto é,

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots$$

Neste momento, vamos garantir a limitação de (x_n). *Verificaremos que* $(x_n) < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Novamente vamos utilizar indução sobre* n.

Temos que

i) $x_1 = \sqrt{2} < 2$, *donde temos que o primeiro passo indutivo é satisfeito.*

ii) (Hipótese de Indução) Seja $x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii) (Tese) Será provado que $x_{n+1} < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pela hipótese indutiva, temos que:

$$\begin{aligned} x_n &< 2 \\ x_n + 2 &< 4 \end{aligned}$$

Por outro lado, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da estimativa anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x_n+2} &< \sqrt{4} \\ \sqrt{x_n+2} &< 2 \\ x_{n+1} &< 2 \end{aligned}$$

Logo, (x_n) *é limitada e pelo Teorema 2.3.5* (x_n) *é convergente e consequentemente*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L, \textit{ para algum } L \in \mathbb{R}.$$

Agora, vamos determinar explicitamente o valor deste limite L. *Fazendo* n *tender ao infinito na definição de* x_n, *mais precisamente em*

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$$

tem-se

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{2+L} \\ L^2 &= 2+L \\ L^2 - L - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau acime, obtemos $L_1 = -1$ *e* $L_2 = 2$. *Como estamos trabalhando apenas com valores positivos de* x_n, *devemos ter* $L = 2$.

Exemplo 2.3.6. *A sequência* $x_n = \dfrac{n^2}{2n+1}\, sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ *converge para* $\dfrac{\pi}{2}$. *Note que*

$$x_n = \frac{n^2}{2n+1}\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{2n+1} n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Não é difícil verificar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$. *Por outro lado, queremos calcular*

$$\lim_{n\to\infty} n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{2.37}$$

multiplicando e dividindo (2.37) *por* $\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, *disso segue*

$$\lim_{n\to\infty} n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \pi$$

Donde concluímos, dos limites anteriores que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1}\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Para finalizar este Capítulo vamos enunciar e dar uma ideia da demonstração de um dos Teoremas mais importantes no estudo de sequências de números reais, o *Teorema de Bolzano-Weierstrass* .

Teorema 2.3.6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

No intuito de demonstrar este resultado, devemos provar que dada um sequência limitada a_n, isto é, existe um número real M tal que $-M < a_n < M$, esta admite uma subsequência $a_{n_j} \subset a_n$ convergente. Segue que $-M < a_{n_j} < M$, ou seja, é limitada. Para garantir a convergência, basta verificar a monotonicidade de a_{n_j}, devido ao **Teorema 2.3.5.** Neste momento que utilizamos conceitos e resultados referentes aos conceitos de Ínfimos e Supremo de Conjuntos, o que não cabe neste trabalho. A demonstração completa deste resultado pode ser encontrada em diversos livros de cálculo e de análise, dentre eles podemos citar [12, 16, 21] e referências contidas nos mesmos.

3 SÉRIES DE NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, estaremos interessados em analisar somas infinitas dos elementos de sequências de números reais. Diferentemente do que foi feito no capítulo anterior, aqui estaremos interessados em analisar a convergências das séries e para tal estudaremos alguns Testes de Convergência. Aqui será tratado de maneira sucinta as somas das Progressões, bem como resultados relevantes no estudo e exercícios aplicados em atividades para alunos do ensino médio.

3.1 Séries numéricas infinitas

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Analisando a soma de seus termos, obtemos uma expressão, a qual é denominada **Série Numérica** e denotada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$$

Exemplo 3.1.1. *Considere a Série de Números Reais* $1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1)+\ldots$*, note que essa série é constituída pela sequência de números ímpares, ou podemos pensa-la como a soma de uma Progressão Aritmética de primeiro termo* $x_1 = 1$ *e razão* $c = 2$*. Perceba que essa série pode ser denotar por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) = 1+3+5+7+9+\ldots$$

Exemplo 3.1.2. *Veja a Série de Números Reais* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+2^{1-n}+\ldots$*, observe que a mesma é constituída por elementos de uma Progressão Geométrica de* $x_1 = 1$ *e razão* $q = \frac{1}{2}$*. Note também que essa série poderá ser denotada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Neste momento definiremos Somas Parciais, pois a mesma é de grande valia no estudo de resultados da soma de uma Série de Números Reais.

Definição 3.1.1. *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$*, denotaremos por* s_n *sua n-ésima soma parcial:*

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i - \textbf{\textit{n-ésima soma parcial}}$$

Se (s_n) for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, ou seja, existir como um número real, então a série $\sum x_n$ é dita convergente, e denotaremos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots = s$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s,$$

em que o número s é a soma da série. Caso essa soma não exista como um número real, dizemos que a série é divergente.

Portanto, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Assim, ao escrevermos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = s$, isto é, ao somarmos um número suficiente de termos da série, podemos chegar quão próximo de s quanto quisermos. Logo, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = s.$$

Observe o Exemplos 3.1.1, analisando suas somas parciais

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1+3=4 \\ s_3 &= 1+3+5=9 \\ s_4 &= 1+3+5+7=16. \end{aligned}$$

Percebemos que na proporção que n aumenta, sua soma se torna muito grande, ou seja, a série em questão diverge, pois não existe como número real. Mas, por outro lado, analise a série do Exemplos 3.1.2, avaliaremos suas somas parciais

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ s_3 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4} \\ s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Para melhorar compreendimento, note a tabela a seguir, a qual descrevemos os valores decimais de cada soma parcial. A medida que temos n grande, as somas parciais se tornam mais próxima de 2. Isso nos sugere que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+2^{1-n}+\ldots = 2.$$

Tabela 1 – Somas Parciais

n	Soma dos n primeiros termos
1	1
2	1,5
3	1,75
4	1,875
5	1,9375
6	1,96875
10	1,998046875
30	1,9999999981374

Fonte: Autor

Exemplo 3.1.3. *Dado a série* $1-1+1-1+\ldots$*, de termo geral* $(-1)^{n+1}$*, é divergente pois a soma parcial* s_n *é igual a zero quando* n *é par, e igual a* 1 *quando* n *é ímpar. Portanto não existe* $\lim s_n$*.*

Neste momento, definiremos e demonstraremos resultados clássicos das Séries de Números Reais, bem como um estudo sobre as convergências. Não tão importante quanto as demais, porém de grande significância para a nossa pesquisa, além de ser um conteúdo do Ensino Médio aqui destacaremos as Progressões e em especial as Séries Geométricas, pois a compreensão de tais conceitos é necessário para o entendimento das Propostas de Atividades que será desenvolvida no capítulo seguinte.

3.1.1 Série Geométrica

Aqui realizaremos um estudo de uma série especial, a Série Geométrica, sendo que a mesma é de suma importância para inferir em alguns testes e será nossa base o desenvolvimento da proposta de Atividade Didática.

$$x+xq+xq^2+\ldots+\ldots+xq^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}xq^{n-1},\ \text{com } x\neq 0$$

Segue da definição que cada termo é obtido a partir da multiplicação do termo anterior por q, em que o mesmo representa a razão. Assim, temos que, $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ representa uma Progressão Geométrica definida na seção 2.0.4, e indicaremos a soma dos n termos por:

$$S_n \;=\; x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n \tag{3.1}$$

Com intuito de determinar uma expressão geral para a soma das progressões e saber as condições de convergência, aqui realizaremos algumas operações.

Note que, se multiplicarmos os membros de (3.1) por q, obteremos

$$q \cdot S_n = x_1 \cdot q + x_2 \cdot q + x_3 \cdot q + \ldots + x_{n-1} \cdot q + x_n \cdot q \tag{3.2}$$

desta forma, podemos reescrever (3.2) como

$$q \cdot S_n = x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n + x_{n+1}. \tag{3.3}$$

Subtraindo (3.1) de (3.3) temos,

$$S_n - q \cdot S_n = x_1 - x_{n+1}$$

note que $x_{n+1} = x_1 \cdot q^n$, daí segue que:

$$\begin{aligned} S_n - q \cdot S_n &= x_1 - x_1 \cdot q^n \\ S_n \cdot (1-q) &= x_1 \cdot (1-q^n) \\ S_n &= x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}. \end{aligned}$$

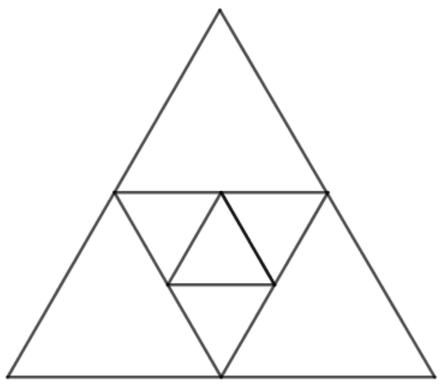
Observe que, se $0 < |q| < 1$, quando $n \to \infty$ então $q^n \to 0$, disso segue que

$$S_n = \frac{x_1}{1-q} \tag{3.4}$$

Assim, a série será convergente. Note também que, se $|q| > 1$, então $q^n \to \infty$ desta forma a série será divergente.

Aplicação 3.1.1. *A medida do lado de um triangulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Vamos calcular a soma dos perímetros de todos esses triângulos.*

Figura 9 – Triângulo equilátero



Fonte: Autor

Note que

Perímetro do primeiro triangulo é $30u.c.$

Perímetro do segundo triangulo é $15u.c.$

Perímetro do terceiro triangulo é $\frac{15}{2}u.c.$

$$\vdots$$

Devemos calcular a soma dos termos da PG infinita $(30, 15, \frac{15}{2}, \cdots)$, *qual* $x_1 = 30$ *e* $q = \frac{1}{2}$, *daí*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = \lim_{n\to\infty} 30 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{30}{1/2} = 60 \tag{3.5}$$

Portanto, a soma dos perímetro é $60u.c.$.

Exemplo 3.1.4. *Considerando a dízima periódica* $0,5555\ldots$. *Note que podemos reescrevê-la como*

$$0,5555\ldots = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \cdots = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \cdots. \tag{3.6}$$

Percebam que a série é constituída por uma Progressão Geométrica infinita

$$\left(\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \ldots\right)$$

na qual o primeiro termo $x_1 = \frac{5}{10}$ *e* $q = \frac{1}{10}$. *A fração corresponde*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{10} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9/10} = \frac{5}{9} \tag{3.7}$$

Portanto, a fração procurada é $\frac{5}{9}$.

Observe que, desenvolvida a teoria no Ensino Médio, este exemplo, poderia ser resolvido utilizando (3.4). *Percebam que temos o primeiro termo e a razão, desta forma segue que a soma dos infinitos termos é*

$$S_\infty = \frac{5/10}{1-1/10} = \frac{5}{9}.$$

Neste momento, demonstraremos a soma dos n-termos de uma Progressão Aritmética. Observe que a soma dos termos de uma Progressão Aritmética só será convergente para um número finito de termos, caso $n \to \infty$, a soma não existirá como número real, assim a série será divergente.

3.1.2 Soma dos termos de uma Progressões Aritméticas

Dada a P.A. $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, indicaremos a soma dos n termos por:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n \tag{3.8}$$

ou

$$S_n = x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_2 + x_1 \tag{3.9}$$

Somando (3.8) e (3.9)

$$\begin{aligned} 2S_n &= (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + (x_3 + x_{n-2}) + \ldots + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1) \\ 2S_n &= n \cdot (x_1 + x_n) \\ S_n &= \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.5. *A soma dos* 20 *primeiros termos da progressão aritmética* $2, 6, 10, \ldots$ *vale* 800.

Note que, precisamos determinar o vigésimo termo da sequência, daí temos

$$\begin{aligned} x_{20} &= x_1 + 19c \\ x_{20} &= 2 + 19 \cdot 4 \\ x_{20} &= 78. \end{aligned}$$

Assim, temos que a soma dos vinte primeiros termos da sequência, pode ser expressa por

$$S_{20} = \frac{(2+78) \cdot 20}{2} = 800.$$

Portanto, a somados dos vinte primeiros termos da sequência é 800.

Aqui estudaremos resultado sobre a convergência da Série Harmônica, pois precisaremos de seu resultado para análise dos testes de convergência e em especial o teste da comparação.

3.1.3 Série Harmônica

Dada a Série Harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Para o estudo da série em questão, iremos considerar por conveniência as somas parciais de índice múltiplo de 2, $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$, em que observamos que as mesmas se tornam grandes a medida que o índice cresce.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1\\
s_2 &= 1+\frac{1}{2}\\
s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2}\\
s_8 &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+\frac{3}{2}\\
s_{16} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{8}\right)\\
&+ \left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)=1+\frac{4}{2}
\end{aligned}
$$

Analogamente, teremos que $s_{32}>1+\frac{5}{2}$, $s_{64}>1+\frac{6}{2}$, e, em geral,

$$s_{2^n}>1+\frac{n}{2} \tag{3.10}$$

Isso mostra que $s_{2^n}\to\infty$ quando $n\to\infty$ e assim s_n é divergente. Portanto, a série harmônica diverge.

Aqui a estudaremos resultado sobre a convergência da Série Telescópica, pois igualmente a série anterior precisaremos de seu resultado para análise de convergência e em especial o teste da comparação.

3.1.4 Série Telescópica

Dada a série Telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

aqui estudaremos a respeito de sua convergência. Note que, há um padrão nas somas parciais que possa levar a uma fórmula para s_k. Desta forma, é possível escrever a soma parcial como

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Assim temos, que

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Daí,

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \tag{3.11}$$

resolvendo (3.11), reduziremos a soma para

$$s_k = 1 - \frac{1}{k+1} \tag{3.12}$$

Desta forma, se $k \to \infty$, então $s_k \to 1$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \tag{3.13}$$

Portanto, a série é convergente, pois sua soma é um número finito.

Agora realizaremos um estudo dos testes de convergência, pois nem toda série é possível uma manipulação igual as séries harmônicas, telescópicas e geométricas, neste momento iniciaremos o estudo dos testes de convergência.

3.2 Testes de convergência

Teorema 3.2.1. *Se uma série* $\sum_{i=1}^{n} x_n$ *converge, então* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstração. Para mostrar este resultado, considere $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, a sequência formada pela soma parcial dos termos gerais $\sum x_n$.

Por hipótese, a série $\sum x_n$ é convergente, então

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \ \ para \ \ algum \ \ s \in \mathbb{N}$$

note que

$$s_{n-1} \ = \ x_1 + x_2 + x_3 + x_{n-1} \tag{3.14}$$

e

$$s_n \ = \ x_1 + x_2 + x_3 + x_n. \tag{3.15}$$

Subtraindo (3.15) de (3.14), temos

$$s_n - s_{n-1} = x_n$$

disso, segue que

$$\lim s_n - s_{n-1} = \lim x_n$$

$$s - s = \lim x_n$$

$$\lim x_n = s - s = 0.$$

$\square$

Observação 3.2.1. *Observe que a recíproca do Teorema 3.2.1 não é válida, tome por exemplo a série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$*, temos que o* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$*, mas* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Portanto o teorema anterior não garante convergência.*

Exemplo 3.2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 + 2n^2 + 5}$

Dividindo numerador e o denominador por n^4*, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n}{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^4}}$$

daí segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^4}} = 0$$

Logo, a série pode ser convergente.

Teorema 3.2.2. *(Teste para a divergência) Se o* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *não existe ou se* $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$*, então a série* $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ *diverge.*

Exemplo 3.2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2 - n^2}$

Dividindo numerador por n^2*, temos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{2}{n^2} - 1}$$

daí segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{n^2} - 1} = -1$$

Logo, a série é divergente.

Teorema 3.2.3. *Se* $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *são séries convergentes, então as séries* $\sum cx_n$ *(em que* c *é uma constante),* $\sum(x_n+y_n)$ *e* $\sum(x_n-y_n)$ *também serão convergentes.*

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} cx_n = c\sum_{i=1}^{\infty} x_n$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(x_n+y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n + \sum_{i=1}^{\infty} y_n$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(x_n-y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n - \sum_{i=1}^{\infty} y_n$

Aqui não realizaremos as demonstrações das propriedades, mas aqueles interessados podem encontra-las em [29] e [30].

Aplicação 3.2.1. *Calcular a soma da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

Observe que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *é uma série geométrica de primeiro termo* $x_1=\dfrac{1}{2}$ *e razão* $q=\dfrac{1}{2}$*, sobre esta perspectiva, seque de* (3.4) *que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$*. Por outro lado, temos de i) que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$*. Segue de* (3.13) *que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$*. Portanto* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+1)}=3$*. Logo, pelo do Teorema 3.2.3 item (ii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=4$.

Assim, como visto, os teoremas citados acima, não garantem a convergência. Por exemplo, tomando o limite na série harmônica, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, mas por outro lado, sabemos que a série harmônica é divergente. A fim de convergência, faremos um estudo dos testes de convergência.

Teorema 3.2.4. *(Teste da integral)*

Seja $f:[1,\infty]\longrightarrow\mathbb{R}$ *uma função continua, positiva e decrescente para todo* $n\in\mathbb{N}$*. Se* $x_n=f(n)$*, então*

i) se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *for convergente, então* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_n$ *converge.*

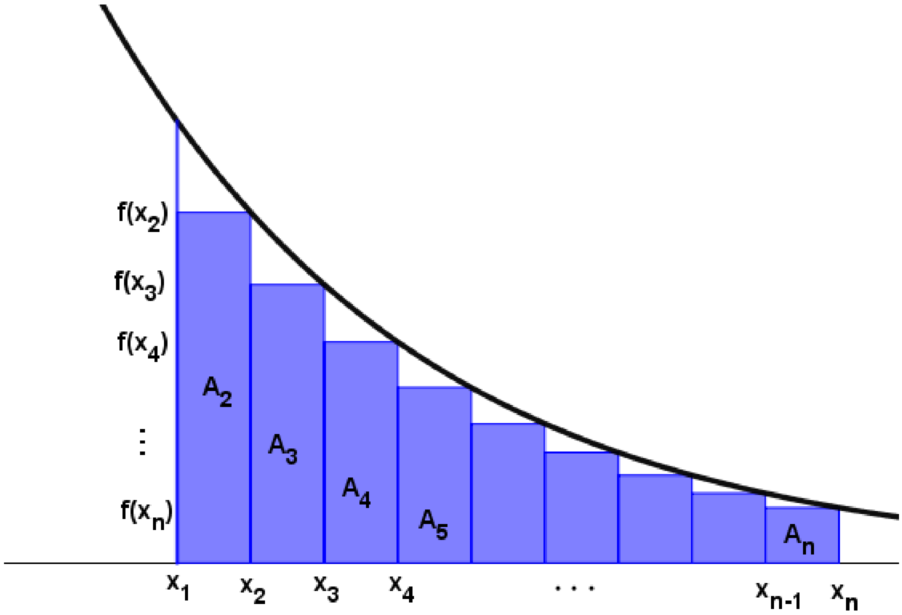
ii) se $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *for divergente, então* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_n$ *diverge.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{N} &\longrightarrow \ \mathbb{N}\\ x &\longmapsto \ f(x)\end{aligned}$$

uma função contínua, decrescente como o gráfico é dado por

Figura 10 – Soma inferior



Fonte: Autor

Denotado por

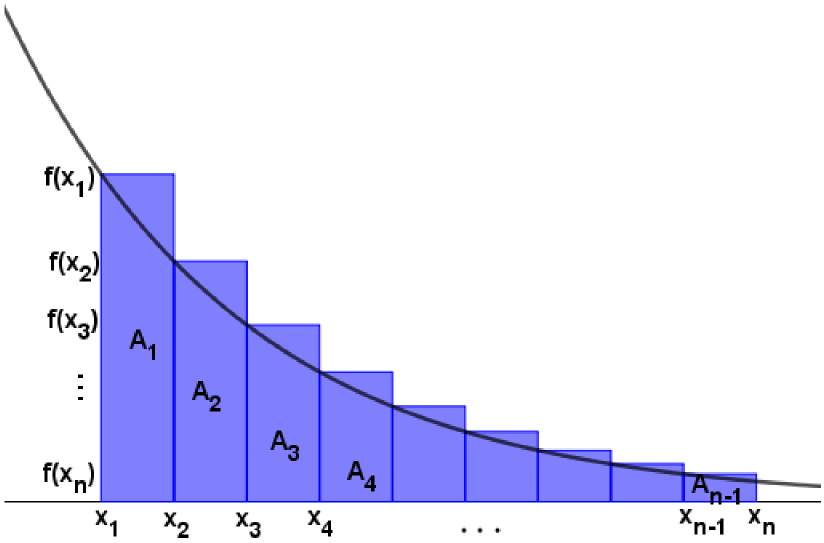
$$\begin{aligned} A_2 &= (x_2 - x_1) \cdot f(x_2) \\ A_3 &= (x_3 - x_2) \cdot f(x_3) \\ \vdots &= \vdots \\ A_n &= (x_n - x_{n-1}) \cdot f(x_n) \end{aligned}$$

temos que

$$A_2 + A_3 + \ldots + A_n \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

Por outro lado,

Figura 11 – Soma superior



Fonte: Autor

daí, temos as respectivas áreas

$$\begin{aligned} A_1 &= (x_2 - x_1)\cdot f(x_1) \\ A_2 &= (x_3 - x_2)\cdot f(x_2) \\ A_3 &= (x_4 - x_3)\cdot f(x_3) \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n-1} &= (x_n - x_{n-1})\cdot f(x_n) \end{aligned}$$

segue que

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} \geq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

Vamos considerar dois casos, quando a integral impropria $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ converge e o caso em que $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ diverge.

i) Se $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ for convergente.

Segue de (3.16) que

$$\sum_{i=2}^{n} A_i \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

Pois, por hipótese $f(x) \geq 0$. Portanto,

$$s_n = A_1 + \sum_{i=2}^{n} A_i \leq A_1 + \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = A_1 + c = M$$

Segue que

$$s_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Donde segue (s_n) é uma sequência limitada.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= A_1 + \sum_{j=2}^{n+1} A_j \\ &= A_1 + \sum_{j=2}^{n} A_j + A_{n+1} \\ &= s_n + A_{n+1} \end{aligned}$$

Segue que $s_{n+1} > s_n$; $(s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_n < s_{n+1})$. Concluindo que (s_n) é uma sequência monótona limitada. Segue do Teorema 2.3.5 que a (s_n) converge. Portanto a série $\sum x_n$ é convergente.

ii) $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ for divergente

Neste caso, $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \longrightarrow \infty$, pois $f(x) \geq 0$. Segue de (3.17) que

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x)\mathrm{d}x &\leq A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \\ \int_1^n f(x)\mathrm{d}x &\leq \sum_{i=1}^{n-1} A_i = s_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Fazendo n tender ao infinito em (3.18), temos

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \tag{3.19}$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \infty.$$

Logo, $\sum x_n$ diverge. $\square$

Aplicação 3.2.2. *Dado a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$*, teste-a quanto a convergência ou a divergência.*

Note que a série a verificar é a Série Harmônica, e como já visto a mesma é divergente. Aqui aplicaremos outro teste.

Seja a sequência $x_n = \frac{1}{n}$ *sua função associada é* $f(x) = \frac{1}{x}$*, e como* $f(x)$ *contínua, positiva e decrescente em* $[1, \infty)$ *usaremos o Teste da integral. Daí segue*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty. \tag{3.20}$$

Logo, a série é divergente.

Teorema 3.2.5. *A p-série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *é convergente se* $p > 1$ *e divergente se* $p \leq 1$*.*

Sabemos que da Aplicação 3.2.2 onde $p = 1$ *a série é divergente, mas por outro lado, devemos supor um* $p \neq 1$*. Desta forma como* $\frac{1}{n^p}$ *é contínua, positiva e decrescente em* $[1, \infty)$ *usaremos o Teste da integral. Logo,*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-p} \mathrm{d}x$$

integrando em x*, temos*

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty} \int_1^t x^{-p} \mathrm{d}x &= \lim_{t \to \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_{x=1}^{x=t} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{t^{-(p-1)}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1-p} \cdot t^{-(p-1)} - \frac{1}{1-p} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1-p} \left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right]
\end{aligned}$$

Observe que se $p > 1$*, então* $p - 1 > 0$*; desta forma quando* $t \to \infty$*,* $t^{p-1} \to \infty$*, assim* $\frac{1}{t^{p-1}} \to 0$*. Logo,*

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} \text{ , se } p > 1$$

e, nesse caso, a integral é convergente. Mas se $p<1$, *então* $p-1<0$, *de tal forma que se* $t\to\infty$, *então* $\dfrac{1}{t^{p-1}}\to\infty$, *portanto a integral será divergente.*

Agora, vamos ilustrar este teste com os seguintes exemplos.

Exemplo 3.2.3. *Dado a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, *temos que a série é convergente, pois ela é uma p-série com* $p=3>1$.

Exemplo 3.2.4. *Dado a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, *temos que a série é divergente, pois ela é uma p-série com* $p=\dfrac{1}{2}<1$

Teorema 3.2.6. *(Teste da comparação)*

Suponha que $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *sejam séries com termos positivos.*

i) Se $\sum y_n$ *for convergente e* $x_n\leq y_n$ *para todo* n, *então* $\sum x_n$ *também será convergente.*

ii) Se $\sum y_n$ *for divergente e* $x_n\geq y_n$ *para todo* n, *então* $\sum x_n$ *também será divergente.*

A demonstração do teste pode ser encontrado em [29].

Observação 3.2.2. *Para utilizarmos o Teste da Comparação é interessante identificarmos algumas séries conhecidas no intuito de comparar, pois estas já sabemos sobre sua convergência.*

Exemplo 3.2.5. *Dado a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$, *verificaremos a convergência ou a divergência da mesma.*

Aqui tomaremos $x_n=\dfrac{1}{n^2+n+1}$ *e* $y_n=\dfrac{1}{n^2}$. *Note que* $x_n<y_n$, *mas por outro lado, sabemos que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ *é convergente pela p-série. Logo pelo item (i) do Teste da comparação* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ *é convergente.*

Exemplo 3.2.6. *Dado a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3n-1}$, *verificaremos a convergência ou a divergência da mesma.*

Tomaremos $x_n=\dfrac{3}{3n-1}$ *e* $y_n=\dfrac{3}{3n}$ *a critério de comparação. Note que* $x_n>y_n$, *por outro lado, sabemos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{3n} = \frac{3}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Portanto, pela a p-série y_n *é divergente, pois* $p = 1$. *Logo* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n-1}$ *é divergente pelo item (ii).*

Teorema 3.2.7. *(Teste na comparação no limite)*

Suponha que $\sum x_n$ *e* $\sum y_n$ *sejam séries com termos positivos. Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c$$

sendo c um número finito e positivo, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Demonstração. Sejam m e M números inteiros positivos tais que $m < c < M$. uma vez que $\frac{x_n}{y_n}$ está próximo de c para um n grande, existe um inteiro N tal que

$$m < \frac{x_n}{y_n} < M \qquad \text{quando } n > N.$$

Multiplicando a desigualdade por y_n

$$my_n < x_n < My_n \qquad \text{quando } n > N.$$

Se $\sum y_n$, convergir, então $\sum My_n$ também converge. Dessa forma, $\sum x_n$ converge pela parte (i) do Teste da Comparação. Se $\sum y_n$ divergir, então $\sum my_n$ também diverge, e a parte (ii) do Teste da Comparação mostra que $\sum x_n$ diverge. □

Exemplo 3.2.7. *Teste a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ *quanto a convergência ou divergência. Usando o teste de Comparação no Limite, tomaremos*

$$x_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

e

$$y_n = \frac{1}{2^n}$$

fazendo $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, *temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n-1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-1/2^n} = 1 > 0. \tag{3.21}$$

Como o limite existe e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *é uma série geométrica convergente, assim a série dada é convergente pelo teste do limite.*

Exemplo 3.2.8. *Determine se a série* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}$ *é convergente ou divergente. Note que a parte dominante no denominador* n^5 *e a parte dominante no númerador é* $2n^2$ *e, isso nos sugere que*

$$x_n = \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \tag{3.22}$$

$$y_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}} \tag{3.23}$$

Tomando o limite, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2}+3n^{3/2}}{2\sqrt{5+n^5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{2\sqrt{\frac{5}{n^5}+1}} = \frac{2+0}{2\sqrt{0+1}} = 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 2\sum \frac{1}{n^{1/2}}$, *pela a p-série temos que ela é divergente, portanto a série dada é divergente pelo teste da Comparação no Limite.*

Teorema 3.2.8. *(Teste da série alternada)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots \qquad x_n > 0.$$

Satisfazer

i) $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* n

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

então, a série é convergente.

Demonstração. Primeiro consideramos as somas parciais pares:

$$\begin{aligned} s_2 &= x_1 - x_2 \geq 0 \\ s_4 &= s_2 + (x_3 - x_4) \geq s_2 \\ \vdots &= \vdots \\ s_{2n} &= s_{2n-2} + (x_{2n-1} - x_{2n}) \geq s_{2n-2}. \end{aligned}$$

Então,

$$0 \leq s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq \ldots .$$

Mas podemos escrever também

$$s_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \cdots - (x_{2n-2} + x_{2n-1}) - x_{2n}$$

Note que cada termo entre parênteses é positivo, assim $s_{2n} \leq x_1$ para todo n. Dessa forma, a sequência s_{2n} de somas parciais pares é crescente e limitada superiormente. Assim, a mesma é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona. Tomando s como o limite, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Agora, por outro lado, calculando o limite das somas parciais ímpares:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + x_{2n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} \\
&= s + 0 \\
&= s
\end{aligned}$$

Como ambas as somas parciais pares e ímpares convergem para s, temos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, logo a série é convergente. $\square$

Exemplo 3.2.9. *Prove que a série alternada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$ *é convergente.*

A série dada é

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

mas como $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, para todo n inteiro positivo, e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Logo, pelo Teorema 3.2.8 a série será convergente.

Definição 3.2.1. *Uma série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge absolutamente (é absolutamente convergente) se a série de valores absolutos correspondentes,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$, *converge.*

Exemplo 3.2.10. *Observe que a série geométrica alternada*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

essa série geométrica converge absolutamente, pois a série de valores absolutos correspondentes

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

converge.

Definição 3.2.2. *Uma série que converge, mas não converge absolutamente, converge condicionalmente.*

Agora, observe a série harmônica

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

essa série harmônica alternada não converge absolutamente, pois a série de valores absolutos correspondentes é a série harmônica e a mesma é divergente como descrevemos na seção 3.1.3. Logo, temos que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente.

Teorema 3.2.9. *(Teste da Convergência Absoluta) Se* $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ *converge.*

A demonstração do Teorema 3.2.9 deixaremos a cargo do leitor, a mesma pode ser encontrada em [30].

O teste que aqui será estudado neste momento, geralmente é utilizado para determinar se a série é absolutamente convergente.

Teorema 3.2.10. *(Teste da Razão)*

Seja $\sum_{i=1}^{\infty}x_n$ *uma série infinita de termos* x_n *não nulos. Então*

i) Se o $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L < 1$, *então a série* $\sum_{i=1}^{\infty}x_n$ *é absolutamente convergente,(logo é convergente).*

ii) Se o $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L > 1$, *ou se* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty$, *então a série* $\sum_{i=1}^{\infty}x_n$ *é divergente.*

iii) Se o $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L = 1$, *o teste é não conclusivo.*

Demonstração. i) Para o estudo em questão, precisaremos utilizar as séries geométricas convergentes. Como $L < 1$, podemos escolher um número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L \text{ e } L < r$$

o quociente $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ eventualmente será menor que r; isto é, existe um inteiro k tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < r \text{ sempre que } n \geq k$$

ou, equivalentemente,

$$|x_{n+1}| < |x_n| r \quad \textit{sempre que } n \geq k. \tag{3.24}$$

Colocando n sucessivamente igual a $k, k+1, k+2, \ldots$ em (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} |x_{k+1}| &< |x_k|\ r \\ |x_{k+2}| &< |x_{k+1}|\ r < |x_k|\ r^2 \\ |x_{k+3}| &< |x_{k+2}|\ r < |x_k|\ r^3. \end{aligned}$$

E, em geral, temos que

$$|x_{k+c}| < |x_k| r^c \quad \textit{para todo } c \geq 1. \tag{3.25}$$

Agora, vamos analisar a série

$$\sum_{c=1}^{\infty} |x_k| r^c = |x_k| r + |x_k| r^2 + |x_k| r^3 + \cdots .$$

Note que $\sum_{c=1}^{\infty} |x_k| r^c$ é uma Série Geométrica, com $0 < L < r < 1$, isto é, é convergente. Assim a desigualdade (3.25), junto com o teste da comparação, nos mostra que a série

$$\sum_{n=c+1}^{\infty} |x_k| = \sum_{c=1}^{\infty} |x_{k+c}| = |x_{k+1}| + |x_{k+2}| + |x_{k+3}| + \cdots$$

é convergente também. Segue que a série $\sum_{n=c+1}^{\infty} |x_k|$ é convergente. Observe que uma quantidade finito de termos não afeta a convergência. Portanto a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

ii) Se $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to L > 1$ ou $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \to \infty$, então o quociente $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ eventualmente será maior que 1; isto é, existe um inteiro N tal que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \quad \textit{sempre que } n \geq k.$$

Isso significa que $|x_{n+1}| > |x_n|$, quando $n \geq k$, e assim

$$\lim_{n \to \infty} x_n \neq 0$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge pelo teste da Divergência.

iii) A demonstração desse item, pode ser encontrada em [15].

□

Observação 3.2.3. *A parte (iii) do Teste da Razão dissertou que, se* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$, *o mesmo é inconclusivo. Analise por exemplo a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, *que pelo Teorema 3.2.5 a mesma converge. Mas observe aplicando o teste da razão*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^2} \to 1 \ \ \textit{quando } n \to \infty.$$

Analisando a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$, *já citada em 3.1.3, sabemos que a mesma diverge. Ao aplicarmos o Teste da Razão obtemos*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{(n+1)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \ \ \textit{quando } n \to \infty.$$

Portanto, se $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$, *a série* $\sum x_n$ *pode convergir ou divergir. Nesse caso o teste da razão falha e devemos usar outro teste.*

Exemplo 3.2.11. *Considere a série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^n}$, *temos que* $x_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{2^n}$ *e* $x_{n+1} = (-1)^{n+2}\dfrac{n+1}{2^{n+1}}$, *logo*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Assim, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, pelo teste da razão a série é absolutamente convergente, isto é, ela é convergente.

Exemplo 3.2.12. *Seja a série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$, *note que*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{n+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Logo, pelo teste da razão a série dada é divergente.

Neste momento, estudaremos sobre o teste da raiz, e vale ressaltar que a sua aplicação é conveniente para verificar séries com potências de expoente n.

Teorema 3.2.11. *(Teste da Raiz)*

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *uma série infinita dada para a qual todos* x_n *é não nulo. Então*

i) Se o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L < 1$, *então a série* $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ *é absolutamente convergente.*

ii) Se o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L > 1$, *ou se o* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \infty$, *então a série é divergente.*

iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L = 1$, *o teste é não conclusivo.*

Demonstração. (i) $L < 1$. Selecione um $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que $L + \varepsilon < 1$. Como $\sqrt[n]{x_n} \to L$, os termos $\sqrt[n]{x_n}$ acabam se aproximando de L a menos de ε. Em outras palavras, existe um índice $M \geq N$ tal que

$$\sqrt[n]{x_n} < L + \varepsilon \qquad \text{quando } n \geq M.$$

Portanto, também é verdade que

$$x_n < (L + \varepsilon)^n \qquad \text{quando } n \geq M.$$

Agora, $\sum_{n=M}^{\infty} (L+\varepsilon)^n$, uma série geométrica com razão $(L+\varepsilon) < 1$, converge. Por comparação, $\sum_{n=M}^{\infty} x_n$ converge; o que nos levar a concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} x_n$$

converge.

(ii) $1 < L \leq \infty$. Para todos os índices além de algum inteiro M, temos que $\sqrt[n]{x_n} > 1$, de modo que $x_n > 1$ para $n > M$. Os termos da série não convergem para 0. A série diverge pelo teste n-ésimo termo.

(iii) Para $L = 1$. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ mostram que o teste não é conclusivo quando $L = 1$. A primeira série diverge e a segunda converge, mas em ambos os casos $\sqrt[n]{x_n} \longrightarrow 1$. □

Exemplo 3.2.13. *Teste a convergência da série* $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

Seja $x_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$, *então*

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2n+3}{3n+2}.$$

Daí, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1$$

Logo, a série dada é convergente pelo teste da raiz.

Neste capítulo foi desenvolvido um estudo sobre os testes de convergência, nele foram apresentados resultados significativos para este estudo, e em especial, o estudo das Séries Geométricas, vislumbrando que a mesma é abordada no Ensino Médio, e nos dará suporte para o desenvolvimento do próximo capítulo.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos três propostas de atividade para ser desenvolvida pelo professor do Ensino Médio. Visto que as Sequências e Séries de Números Reais são tratadas como as Progressões Aritméticas e Geométricas na Educação Básica, mas aqui, nos atentaremos apenas as Séries Geométricas pois a mesma é base para construção das nossas sugestões de atividade.

Nossa proposta de atividade propõe a introdução de somas infinitas no Ensino Médio por meio de áreas e por somas parciais. Desenvolvemos sugestões de atividade que acreditamos que foge dos padrões tradicionais e que a mesma tenha um potencial facilitador para aquisição do conhecimento no processo de Ensino e Aprendizagem, além de conceber que a forma que se introduz o conteúdo também é fundamental para a mesma.

Neste momento será desenvolvida as propostas de atividades para o ensino de convergência; Somas dos termos de Progressões Geométricas infinitas.

4.1 Propostas de atividades didática 01

Proposta 01: Convergência de somas infinitas.

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo: Soma dos Infinitos termos de Progressão Geométrica.

Objetivo: Desenvolver nos alunos noção intuitiva de somas infinitas convergentes.

Pré-requisitos: Elementos da Progressão Geométrica (primeiro termo e razão da Sequência).

Duração: 3 horas aula.

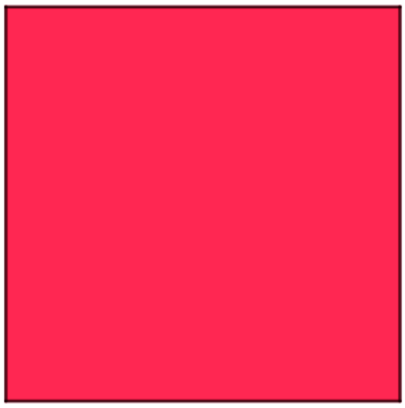
Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, computadores, recursos multimídia, pincel e apagador.

Desenvolvimento da atividade:

Inicialmente, o professor apresentará um quadrado de lado com medidas conhecidas, $4cm$, como ilustrado abaixo.

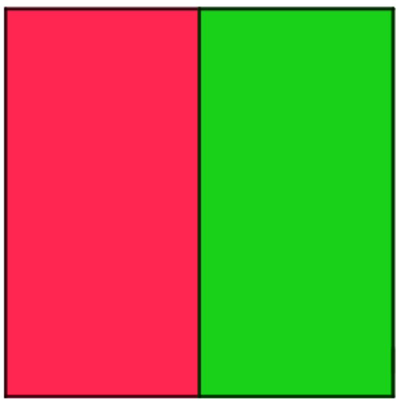
Figura 12 – Quadrado 01



Fonte: Pesquisador

Em seguida, o professor determinará a área dessa figura que será igual a 16 cm^2. Após conhecer a área da figura o mediador realizará divisões sucessivas como será descrito a seguir. Após determinar a área o professor dividirá a figura em duas partes iguais como ilustra a figura abaixo, na qual realizará as seguintes perguntas "Foram obtidas quantas áreas após essa divisão?"e "Quais são as medidas das novas áreas? Se somarmos essas novas áreas qual valor será encontrado e o que ele representa? É de grande valia que junto as suas indagações proferidas o professor deve afirmar que a figura foi divida em duas partes iguais onde cada áreas mede 8 cm^2, e que se somarmos as novas áreas será obtido o valor de 16 cm^2 que representa a área do quadrado original.

Figura 13 – Quadrado 02



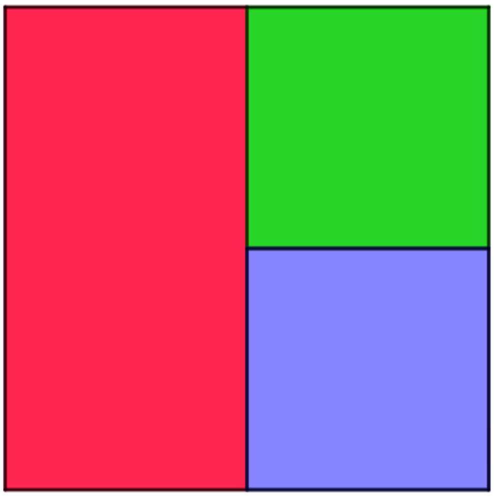
Fonte: Autor

Em seguida, será escolhida uma das duas novas áreas encontradas, onde será realizado uma nova divisão em iguais tamanhos, obtendo duas novas áreas ambas com 4 cm^2 cada, como ilustra a seguir.

Após a realização da divisão, o professor deverá fazer os questionamentos "a figura original ficou divida em quantas partes? e "Quais são as medidas das áreas aqui exibidas? Se somarmos todas essas áreas qual valor será encontrado e o que ele representa?

Novamente junto aos alunos o professor deve afirmar que foram obtidas 3 áreas, sendo-as com as seguintes medidas 8 cm^2, 4 cm^2 e 4 cm^2, e que a soma delas é igual 16 cm^2 que representa a área do quadrado original.

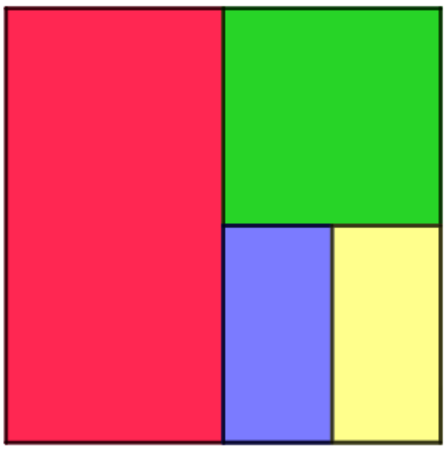
Figura 14 – Quadrado 03



Fonte: Autor

Em seguida, deverá realizar a divisão de uma das áreas obtidas anteriormente, e assim sendo o processo análogo aos já feitos, após essa divisão nas áreas encontradas anteriormente serão obtidas novas áreas sendo que ambas com medidas iguais 2 cm^2.

Figura 15 – Quadrado 04



Fonte: Autor

Novamente o professor deverá realizar perguntas pertinentes, como as anteriores sendo-as "a figura original ficou divida em quantas partes? e "Quais são as medidas das áreas aqui exibidas? Se somarmos todas essas áreas qual valor será encontrado e o que ele representa? Novamente junto aos alunos, o professor deverá afirmar que foram obtidas 4 áreas, sendo-as com as seguintes medidas 8 cm^2, 4 cm^2, 2 cm^2 e 2 cm^2, e que a soma delas é igual 16 cm^2 que representa a área do quadrado original.

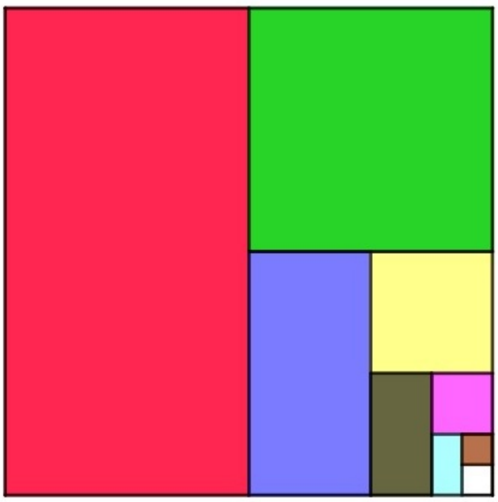
De forma análoga aos casos anteriores, o professor realizar as divisões sucessivas e sempre em duas partes iguais e deixando sempre claro a soma de todas as áreas ali presentes. Realizando essas divisões sucessivas, obteremos as somas

$$\begin{aligned}8+4+2+1+1 &= 16\\ 8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} &= 16\\ 8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} &= 16\\ 8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} &= 16\\ 8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} &= 16.\end{aligned}$$

Após a realização dessas somas, o professor deverá enfatizar que é esse processo será realizado infinitas vezes. Descrevendo a soma para os alunos

$$8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Figura 16 – Quadrado 05



Fonte: Autor

Logo após essa explanação, o professor os seguintes questionários.

Primeiro questionamento

Qual a área do quadrado?

Segundo questionamento

O que estamos determinando ao somarmos todas essas áreas?

Terceiro questionamento

A soma $8+4+2+1+1/2+1/4+\ldots$ é igual ?

Quarto questionamento

se realizar essa divisão 10 vezes seguindo esse padrão qual será a somas dessas novas áreas? se realizarmos 100 divisões seguindo o mesmo padrão? e realizarmos 1000 divisões seguindo o mesmo padrão? e se realizarmos essa divisão em infinitas partes seguindo esse mesmo padrão?

O que esperamos que as respostas aqui a serem dadas pelos alunos sempre será igual 16.

Após o professor concluir esses questionamentos, o professor deve frisar que independente da quantidade de divisões realizadas, a somas das mesmas sempre será igual 16. Assim o professor deve frisar que a soma de uma série caso exista é o limite da sequência de somas parciais. Como contra exemplo, de uma soma que não existe o professor pode citar as sequências de números ímpares e pares $x_n = 2n+1$ e $y_n = 2n$, analisando que a medida que o índice cresce sua soma também cresce de tal forma que a soma não existe como número real.

Logo em seguida, o professor deverá deduzir a expressão algébrica que determina a soma dos n-termos uma Progressão Geométrica.

$$S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}.$$

Após a dedução da expressão, o professor deve aplica-lá no caso mencionado junto aos alunos.

Posteriormente, o professor deverá ampliar a ideia da soma agora não as somas parciais, mas sim, a soma infinitas além de apontar a condição para que está soma exista.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{x_1}{1-q}$$

ou podemos denotar como

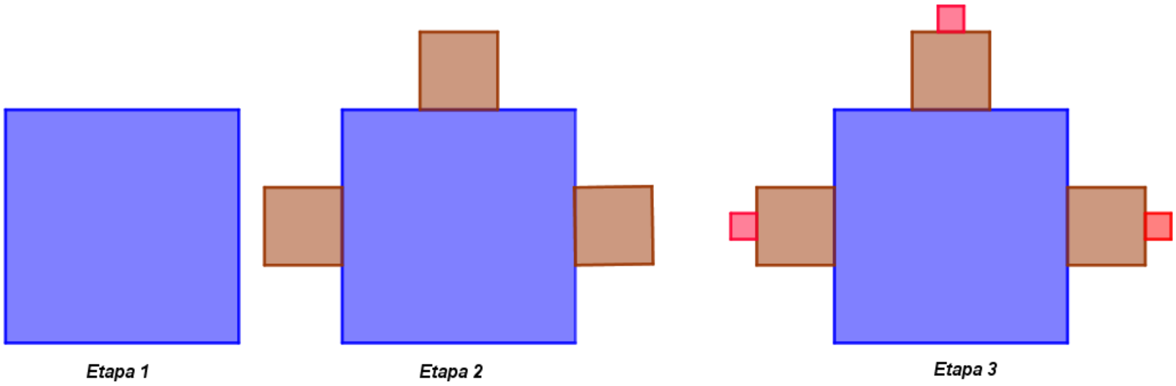
$$S_\infty = \frac{x_1}{1-q}.$$

Após definir a soma infinita, a situação inicial deve ser realizada pelo professor utilizando a expressão $S_\infty = \dfrac{x_1}{1-q}$. Por fim, o professor deve usar exemplos para fixar a ideia.

Exemplos de fixação:

Situação 01: [25]

A região Fractal F, construída a partir de um quadrado de lado 1 cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (1) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado l/3. As três primeiras etapas de construção de F são apresentadas a seguir.



Fonte: Autor

Calcule a área de F.

Solução: Observe que o segundo o enunciado, teremos uma infinidade de quadrados sendo que logo após o primeiro que tem lado com medida igual a $1cm$, os demais quadrados sempre terá lado $1/3$ da medida do anterior. Além disso, percebam também em que cada etapa são acrescido de mais 3 quadrados e cada lado do quadrado anterior. Como o problema solicita a medida da área de F, segue que

Note que a área de etapa 1 é $1cm^2$;

Já da etapa 2, a área será $1+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$;

Na terceira etapa, temos $1+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+9\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^2$;

Neste padrão segue que a etapa 4 será $1+3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+9\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^2+27\cdot\left(\dfrac{1}{27}\right)^2$;

Assim, para determinar a área da região F, realizaremos a soma dos infinitos quadrados seguindo esse padrão. Logo a área F pode ser escrita como

$$1+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+27\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^2+\cdots$$

Simplificando a expressão anterior teremos,

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Assim, tem-se uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{3}$. Usando a expressão

$$S_\infty=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{2}=1,5cm^2.$$

Portanto, a área da região F é $1,5cm^2$.

Situação 02:

Dadas as progressões geométricas e sabendo que a soma dos infinitos termos dessa sequência existe como um número real, ou seja, é série uma covergente. Determine as somas das sequências abaixo.

a) $1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$

b) $0,777\ldots$

Solução (a):

Inicialmente identificaremos o primeiro termo e a razão da sequência numérica. Assim temos que o primeiro termo é $x_1 = 1$ e a razão é $q=\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{2}$. Como sabemos que a soma dos infinitos termos de uma sequencia é dada por $S_\infty=\frac{x_1}{1-q}$, daí segue a soma dos infinitos termos da sequência é dada por

$$S_\infty=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=2.$$

Portanto a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $x_1 = 1$ e razão $q=\frac{1}{2}$ é 2.

Solução (b):

Observe que podemos reescrever a dízima periódica, $0,777\ldots=\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{7}{10^4}+\cdots$.

Mas por outro lado, note que a série é composta pela sequência $\left(\frac{7}{10}, \frac{7}{10^2}, \frac{7}{10^3}, \frac{7}{10^4}, \dots\right)$, em termo o primeiro termo é $x_1 = \frac{7}{10}$ e a razão é $q = \frac{1}{10}$.

Como a soma dos infinitos termos de uma sequencia é dada por $S_\infty = \frac{x_1}{1-q}$, daí segue a soma dos infinitos termos é

$$S_\infty = \frac{\left(\frac{7}{10}\right)}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)} = \frac{7}{9}.$$

Portanto a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $x_1 = \frac{7}{10}$ e razão $q = \frac{1}{10}$ é $\frac{7}{9}$.

4.2 Propostas de atividades didática 02

Proposta 02: Convergência de somas infinitas

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo: Soma dos Infinitos termos de Progressão Geométrica.

Objetivo: Desenvolver nos alunos noção intuitiva de somas infinitas convergentes.

Pré-requisitos: Elementos da Progressão Geométrica (primeiro termo e razão da Sequência).

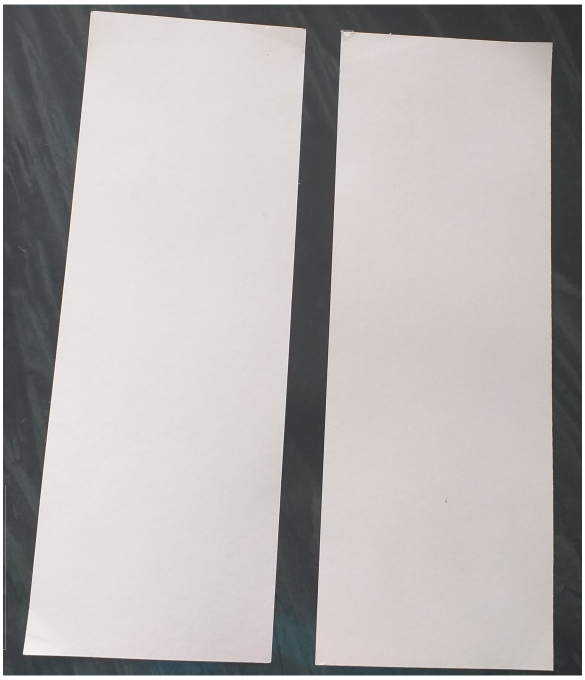
Duração: 3 horas aula.

Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, computadores, recursos multimídia, pincel, apagador, papel, tesoura e cola.

Inicialmente, o professor irá entregar uma uma folha de papel aos alunos, e junto ao mesmos, solicitará que realizem a divisão da folha de papel em duas partes iguais. Assim será obtidos dois retângulos, desta forma, fixaremos a medida das áreas obtidas na divisão da folha de papel.

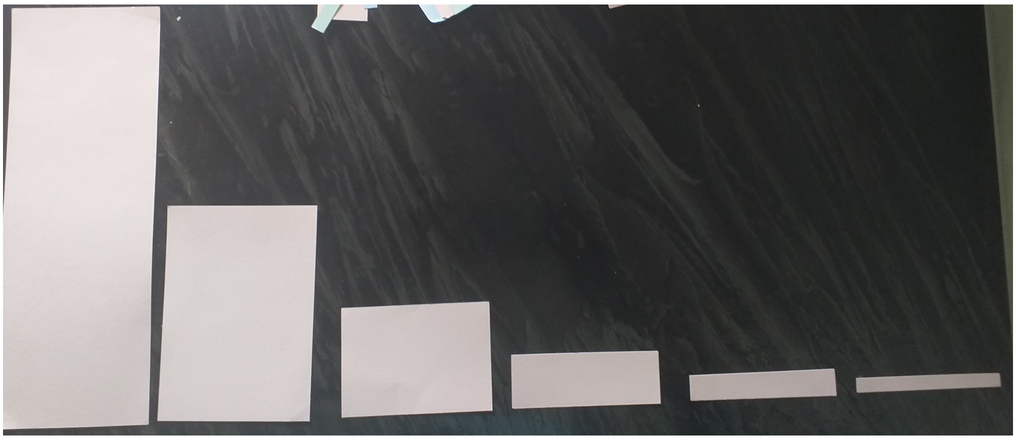
Figura 17 – Divisão da figura inicial



Fonte: Autor

Tomando uma das novas áreas, o Professor junto aos alunos tomará uma das novas áreas e dividirá novamente. Esse procedimento deverá ser realizado até o momento em que o aluno não consiga dividir mais o papel usando a tesoura.

Figura 18 – Divisões a ser realizadas



Fonte: Autor

Após esse procedimento, o menor pedaço de papel, e com ele o professor deverá argumentar com os alunos, que mesmo não podendo corta usando a tesoura para encontra uma quase perfeição, esse papel ainda poderá ser divido em infinitas frações seguindo esse padrão.

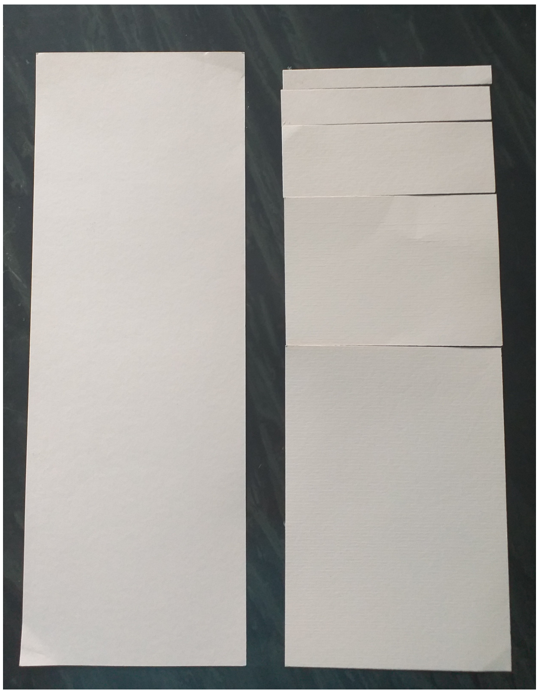
Em seguida, o professor solicitar as alunos que remonte o papel que foi divida em vários outros pedaços e não cole o último pedaço que foi considerado como infintas frações, de tal forma

Figura 19 – Remontagem

Fonte: Autor

Neste momento o professor solicitar para o aluno pegar o papel que não foi divido, para finalidade de comparação.

Figura 20 – Comparação entre os Retângulos



Fonte: Autor

Agora, o professor deve registrar a medidas das divisões sendo que no início da atividade deve ser fixada a medida da área do retângulo aqui fixaremos $1u.a$, assim as será obtida a sequência que representa as áreas

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots\right)$$

O professor deve frisar para o aluno, que a soma as áreas fazendo o comparativo algébrico

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Tende a ser igual a $1u.a$, ou seja

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$$

Que corresponde a área inicial.

Logo em seguida, o professor deverá deduzir a expressão algébrica que determina a soma dos n-termos uma Progressão Geométrica.

$$S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}.$$

Após a dedução da expressão, o professor deve aplica-lá no caso mencionado junto aos alunos.

Posteriormente, o professor deverá ampliar a ideia da soma agora não as somas parciais, mas sim, a soma infinitas além de apontar a condição para que está soma exista.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{x_1}{1-q}$$

ou podemos denotar como

$$S_\infty = \frac{x_1}{1-q}.$$

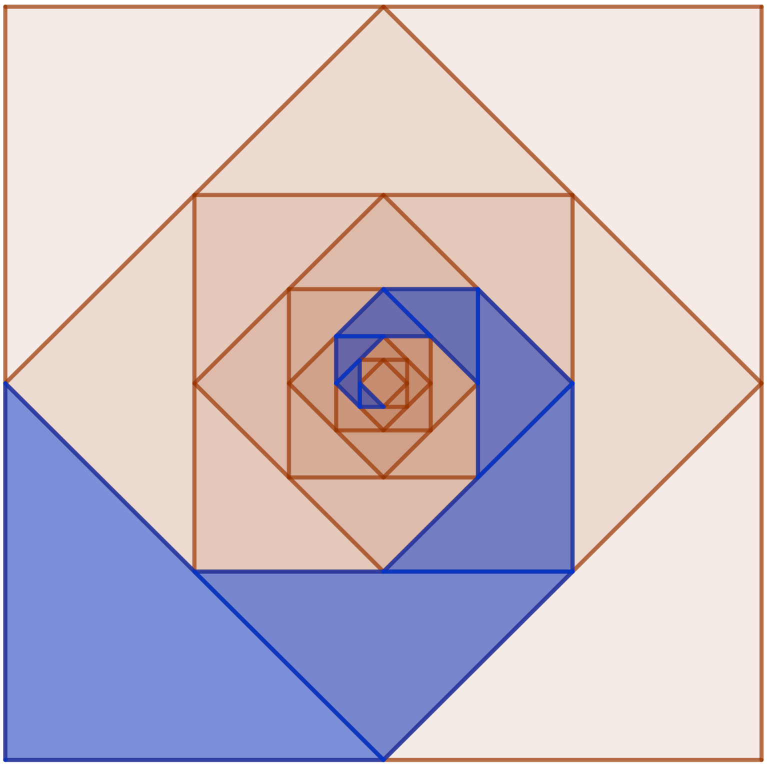
Após definir a soma infinita, a situação inicial deve ser realizada pelo professor utilizando a expressão $S_\infty = \dfrac{x_1}{1-q}$. Por fim, o professor deve usar exemplos para fixar a ideia.

Exercício de fixação:

Situação 01:

(Ufrgs 2017) Na figura abaixo, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado Q_1 tem lado 1. O quadrado Q_2 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_1; o quadrado Q_3 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_2 e, assim, sucessiva e infinitamente.

Figura 21 – P.G. no quadrado



Fonte: Autor

A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é:

a) 1/2

b) 1/4

c) 1/8

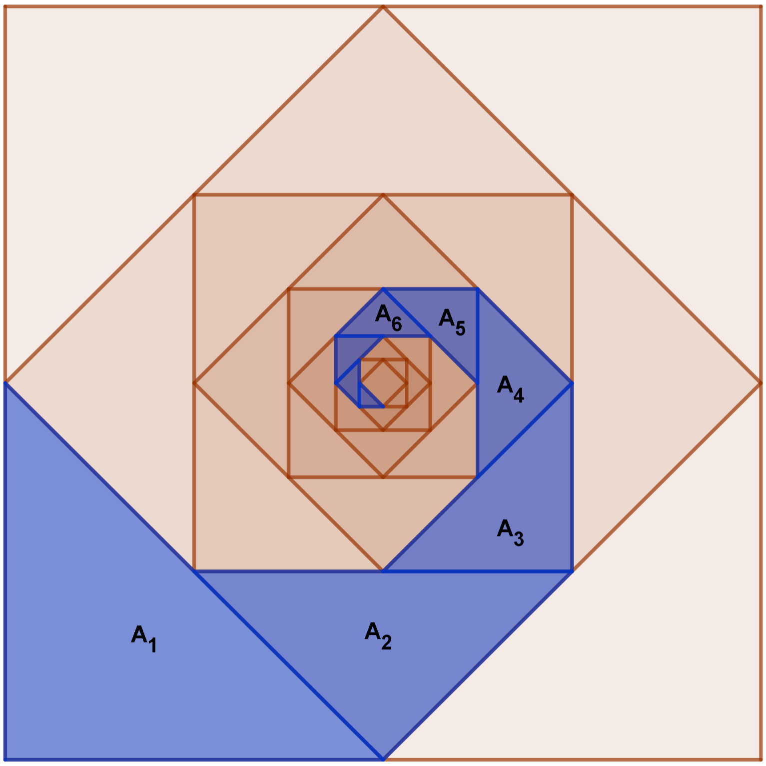
d) 1/16

e) 1/32

Solução :

A área de cada quadrado, a partir do segundo, é metade da área do quadrado anterior. Portanto, as áreas dos triângulos retângulos assinalados formam um PG infinita de razão 1/2.

Figura 22 – P.G. no quadrado 01



Fonte: Autor

A sequência $A_1, A_2, A_3, ...$ é uma PG infinita de razão $1/2$

Calculando a área A_1, temos: $A_1 = (1/2 \cdot 1/2)/2 = 1/8$.

Portanto, a soma de todas as áreas dos triângulos retângulos será dada

por: $S = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + \cdots = (1/8)/(1 - 1/2) = 1/4$ Logo, a alternativa correta é a letra b.

Situação 02:

Dadas as progressões geométricas e sabendo que a soma dos infinitos termos dessa sequência existe como um número real, ou seja, é série uma covergente. Determine as somas das sequências abaixo.

a) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

b) $0,555\ldots$

Solução (a):

Inicialmente identificaremos o primeiro termo e a razão da sequência numérica. Assim temos que o primeiro termo é $x_1 = 3$ e a razão é $q = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{3}$. Como sabemos que a soma dos infinitos termos de uma sequencia é dada por $S_\infty = \dfrac{x_1}{1-q}$, daí segue a soma dos infinitos termos da sequência é dada por

$$S_\infty = \frac{3}{\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{2}$$

Portanto a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $x_1 = 3$ e razão $q = \dfrac{1}{3}$ é $\dfrac{9}{2}$.

Solução (b):

Observe que podemos reescrever a dízima periódica, $0,555\ldots = \dfrac{5}{10} + \dfrac{5}{10^2} + \dfrac{5}{10^3} + \dfrac{5}{10^4} + \cdots$.

Mas por outro lado, note que a série é composta pela sequência $\left(\dfrac{5}{10}, \dfrac{5}{10^2}, \dfrac{5}{10^3}, \dfrac{5}{10^4}, \ldots\right)$ onde o primeiro é $x_1 = \dfrac{5}{10}$ e a razão é $q = \dfrac{1}{10}$.

Como a soma dos infinitos termos de uma sequencia é dada por $S_\infty = \dfrac{x_1}{1-q}$, daí segue a soma dos infinitos termos é

$$S_\infty = \frac{\left(\frac{5}{10}\right)}{\left(1-\frac{1}{10}\right)} = \frac{5}{9}$$

Portanto a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $x_1 = \dfrac{5}{10}$ e razão $q = \dfrac{1}{10}$ é $\dfrac{5}{9}$.

4.3 Propostas de atividades didática 03

Proposta 03: Convergência de somas infinitas

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Conteúdo: Soma dos Infinitos termos de Progressão Geométrica.

Objetivo: Desenvolver nos alunos noção intuitiva de somas infinitas convergentes.

Pré-requisitos: Elementos da Progressão Geométrica (primeiro termo e razão da Sequência).

Duração: 3 horas aula.

Avaliação: A avaliação será processual e contínua, observando aspectos quantitativos e qualitativos como um todo. A qualidade será através do acompanhamento do desempenho do aluno no que se refere a sua participação, produtividade, interesse, colaboração, clarezas de ideias e no desenvolvimento das atividades orais e escritas no decorrer das aulas.

Recursos Pedagógicos: Lousa, computadores, recursos multimídia, pincel, apagador e calculadora.

O Professor deve solicitar aos alunos que determinem os 15 primeiros termos da sequência regida pela lei $x_n = 2^{3-n}$, daí será obtida os termos $x_n = (4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots)$. Após a determinação dos 15 primeiros termos, será solicitado aos alunos que realizem as somas parciais, como aparece abaixo.

$$\begin{aligned}
s_1 &= 4 \\
s_2 &= 4+2=6 \\
s_3 &= 4+2+1=7 \\
s_4 &= 4+2+1+\frac{1}{2}=7,5 \\
s_5 &= 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=7,75 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

Logo após a realização das somas parciais, será solicitado aos alunos a construção de uma tabela, exibindo os índices e suas respectivas somas, como ilustrada a seguir.

Tabela 2 – Somas Parciais 01

n	Soma dos n primeiros termos
1	4
2	6
3	7
4	7,5
5	7,75
6	7,875
7	7,9375
8	7, 96875
9	7,984375
10	7, 9921875
15	7,999755859375

Fonte: Autor

Após a construção da tabela, será solicitado aos alunos a analise de cada somas parcial. Posteriormente o professor deverá realizar alguns questionamentos.

1º) Qual é soma dos 5 primeiros termos da sequência?

2º) Qual é soma dos 6 primeiros termos da sequência?

3º) Qual é soma dos 8 primeiros termos da sequência?

4º) Qual é soma dos 10 primeiros termos da sequência?

5º) Qual é soma dos 15 primeiros termos da sequência?

6º) A medida que n cresce o que se observa com as somas parciais?

7º) Qual é o valor dessa soma quando n for tão grande quanto queiramos?

Após o professor concluir que quando n for tão grande quanto queiramos "∞"a soma desses termos será igual 8. Assim o professor deve frisar que a soma de uma série caso exista é o limite da sequência de somas parciais. Como contra exemplo, de uma soma que não existe o professor pode citar as sequências de números ímpares e pares $x_n = 2n+1$ e $x_n = 2n$, analisando que a medida que o índice cresce sua soma também cresce de tal forma que a soma não exista como número real.

Logo em seguida, o professor deverá deduzir a expressão algébrica que determina a soma dos n-termos uma Progressão Geométrica.

$$S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)}$$

Após a dedução da expressão, o professor deve aplica-lá no caso mencionado junto aos alunos.

Posteriormente, o professor deverá ampliar a ideia da soma agora não as somas parciais, mas sim, a soma infinitas além de apontar a condição para que está soma exista.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = x_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{x_1}{1-q}$$

ou podemos denotar como

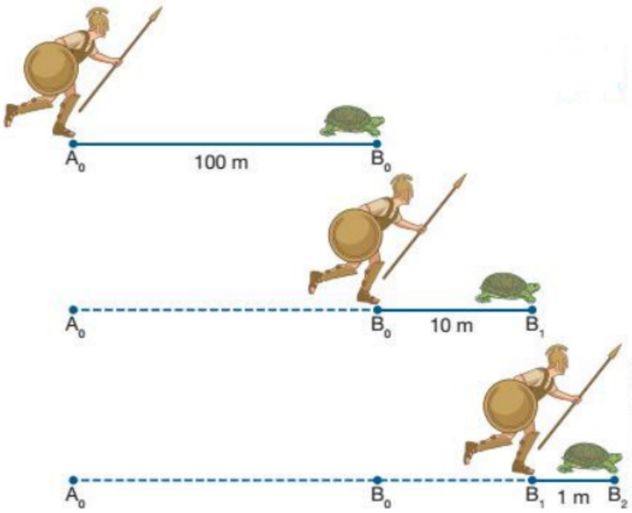
$$S_\infty = \frac{x_1}{1-q}$$

Após definir a soma infinita, a situação inicial aplicaremos a ideia da soma infinta para saber a soma quando o índice tende ao infinito. Por fim, o professor deve usar exemplos para fixar a ideia.

Exercício de fixação:

Situação 01:([27], 2016)

O paradoxo de Aquiles e a tartaruga, proposto por Zenão, por volta de 450 a.C., retrata uma situação hipotética em que, numa corrida entre os dois personagens, Aquiles jamais alcançaria a tartaruga, embora sua velocidade fosse maior que da tartaruga. Para que se entenda melhor esse paradoxo, vamos supor que Aquiles esteja em um ponto A_0, e a tartaruga, em um ponto B_0, $100m$ á frente de A_0 e, ainda, que a velocidade de Aquiles seja dez vezes a da tartaruga. Então, quando Aquiles parte de A_0 e chega à B_0, a tartaruga terá se movido um décimo dessa distância e estará em B_1, $10m$ à frente de B_0. Quando Aquiles Percorrer esses $10m$, a tartaruga estará em B_2, e assim sucessivamente. Aquiles estará sempre se aproximando da tartaruga, mas nunca estarão no mesmo ponto simultaneamente.



A partir do paradoxo apresentado, resolva.

a) Determine, em metros, a distância entre:

B_0 e B_1

Solução : $10m$

B_1 e B_2

Solução : $1m$

B_2 e B_3

Solução : $0,1m$

b) A sequência de distancia obtidas no item a) foma uma P.G.? Justifique.

Solução : Sim, pois cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado pela razão $\frac{1}{10}$.

c) A soma dos termos dessa sequência é convergente? Qual é essa soma?

Solução : Note que o primeiro termo 10 e razão é $\dfrac{1}{10}$, disso segue que

$$S_\infty = \frac{10}{\left(1-\dfrac{1}{10}\right)} = \frac{100}{9}$$

Logo, a sequência é convergente e sua soma é igual a $\dfrac{100}{9}$.

Situação 02: Dadas as progressões geométricas e sabendo que a soma dos infinitos termos dessa sequência existe como um número real, ou seja, é série uma covergente. Determine as somas das sequências abaixo.

a) $4, 2, 1, 1/2, 1/4, \ldots$

b) $0,888\ldots$

Solução (a):

Inicialmente identificaremos o primeiro termo e a razão da sequência numérica. Assim temos que o primeiro termo é $x_1 = 4$ e a razão é $q = \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{2}$. Como sabemos que a soma dos infinitos termos de uma sequencia é dada por $S_\infty = \dfrac{x_1}{1-q}$, daí segue a soma dos infinitos termos da sequência é dada por

$$S_\infty = \frac{4}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)} = 8$$

Portanto a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $x_1 = 4$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$ é 8.

Solução (b):

Observe que podemos reescrever a dízima periódica, $0,888\ldots = \dfrac{8}{10} + \dfrac{8}{10^2} + \dfrac{8}{10^3} + \dfrac{8}{10^4} + \cdots$.

Mas por outro lado, note que a série é composta pela sequência $\left(\dfrac{8}{10}, \dfrac{8}{10^2}, \dfrac{8}{10^3}, \dfrac{8}{10^4}, \ldots\right)$ onde o primeiro é $x_1 = \dfrac{8}{10}$ e a razão é $q = \dfrac{1}{10}$.

Como a soma dos infinitos termos de uma sequencia é dada por $S_\infty = \dfrac{x_1}{1-q}$, daí segue a soma dos infinitos termos é

$$S_\infty = \frac{\left(\dfrac{8}{10}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{10}\right)} = \frac{8}{9}$$

Portanto a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $x_1 = \dfrac{8}{10}$ e razão $q = \dfrac{1}{10}$ é $\dfrac{8}{9}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção deste trabalho com a temática Séries e Sequências numéricas e propostas para o ensino de Matemática aplicável no Ensino Médio foi desafiadora, utilizamos uma metodologia exploratória que nos permitiu fazer desconstruções de um ensino de matemática rígido e atomizado ao qual estávamos acostumados já que somos frutos da "escola tradicional".

Como Professor da Educação Básica, cursar o PROFMAT foi essencial para desenvolver um novo olhar sobre os conteúdos matemáticos e a didática a ser aplicada para o Ensino. Na percepção de que fomos instruídos a perceber os conteúdos nas mais diferentes formas, a resolver e a propor situações problemas, tal formação nos permite aprofundar os conteúdos e identificar o que realmente é relevante. Assim, nossos alunos serão beneficiados, porque nossa prática em sala de aula será renovada, visando o desenvolvimento de alunos que se tornam protagonistas do seu processo de aprendizado, já que também farão trabalhos do tipo exploratório o que melhora e aprofunda os conhecimentos, facilitando o entendimento dos conteúdos subsequentes.

No decorrer dos capítulos foram desenvolvidas toda teoria necessária para a realização das propostas de atividade, em que a mesma visa a introdução de forma intuitiva das séries geométricas no Ensino Médio. As atividades aqui desenvolvidas procuraram mostrar a existência de recursos que podem influenciar positivamente no ensino de Séries Geométricas, vislumbrando que a mesma consiste num paralelo de figuras planas geométricas.

Acreditamos que no trabalho desenvolvido, as sugestões de atividades indicadas, podem ser consideradas um dos os pilares para fazer entrosamento do conceito de somas infinitas convergentes. Assim, acreditamos no potencial das propostas, e que as mesmas são portadoras de um potencial facilitador para o entendimento da temática. Portanto, nosso trabalho cumpre também o papel de dar embasamento teórico e didático em consonância com BNCC para os professores de Matemática da Educação Básica, sobretudo do Ensino Médio.

Nessas percepções, responderemos nosso problema de pesquisa: de que forma podemos introduzir o conceito de somas infinitas no Ensino Médio? Acreditamos que a melhor forma de inserir a temática séries geométricas é através do paralelo áreas de figuras planas.

Afinal, para que a educação seja de qualidade, alguns requisitos são necessários e a formação continuada torna-se imprescindível para que a ação docente seja dinâmica, interligada com inovações para ressignificar conteúdos, tornando de fato o papel do professor mediador do conhecimento possibilitando aos educandos uma melhor conexão e apreensão dos conteúdos e uma postura ativa na construção de sua própria aprendizagem.

Enfim, nossa pesquisa não acaba aqui, prosseguiremos em um estudo de sequência do tipo $(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots)$, porém de forma mais ampla, através de sua generalização, especificamente, estamos interessados em estudar convergências de sequências desse padrão. Como continuidade, iremos desenvolver as atividades aqui propostas em sala de aula e elaborar outras para o conteúdo em questão assim como outros.

Referências

[1] ARRUDA, Alexandre Goulart. **Ensino de Juros Compostos, Progressão Geométrica e Função exponencial**. Viçosa-MG, 2013.

[2] ÁVILA, Geraldo. ***Várias faces da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura geral***. São Paulo: 2 ed. Blucher, 2010.

[3] ÁVILA, Geraldo. **O paradoxo de Zenão**. Revista Professor de Matemática (RPM), 2004.

[4] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

[5] BRASIL, Ministério da Educação. **PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação : SAEB : ensino médio : matrizes de referência, tópicos e descritores**. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

[6] BRASIL, PCN+ Ensino Médio, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. MEC/SEMTEC, Brasília, 2002.

[7] BOYER, Carl B. ***História da matemática***. São Paulo, Edgar Blucher 2. ed. 1996.

[8] CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O. ***Matemática discreta***, coleção PROFMAT, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] CHAVANTE, E.; PRESTES, D. ***Quadrante Matemática***, 1º ano: ensino Médio, São Paulo: Edições SM, 2016.

[10] DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática*** São Paulo: 1 ed. Ática, 2004.

[11] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H**. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[12] FIGUEIREDO, Djairo G. ***Análise I***, LTC, 1996.

[13] GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. ***Métodos de pesquisa***. Plageder, 2009.

[14] GIL, A. Carlos. ***Como elaborar projetos de pesquisa***. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

[15] LEITHOLD, Louis. ***O cálculo com Geometria Analítica: volume 2***. Rio de Janeiro: Editora Harbra Ltda, 1994.

[16] LIMA, Elon Lages. ***Análise Real Volume 1***. Projeto Euclides, IMPA, 2004.

[17] LIMA, Elon Lages. ***Análise Real, Funções de Uma Variável Volume 1***. Rio de Janeiro: 11. ed. IMPA, 2012.

[18] LIMA, Elon Lages. ***Curso de análise Volume 1***. Rio de Janeiro: 14. ed. IMPA, 2016.

[19] MAIA, Rodolfo José Diniz. ***Progressões aritméticas e geométricas***. Campina Grande- PB, 2011.

[20] MOL, Rogério Santos. ***Introdução à história da matemática***. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[21] MUNIZ NETO, A. C. ***Fundamentos de Cálculo***, SBM,Coleção PROFMAT, 2015.

[22] PIERRO NETO, Scipione Di. ***Matemática 2º grau, Volume 2***. São Paulo: editora Scipione, 1984.

[23] ROONEY, Anne. ***A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito***. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012.

[24] SAMPAIO, Patrícia Alexandra. ***Infinito uma história a contar***. Millenium, Instituto Politécnico de Viseu. 2008. 205p.–222p.

[25] Portal da Matemática. Soma dos Termos de uma PG Infinita ***Youtube***. 9 de out. 2017. 4min55s Disponível: <https://www.youtube.com/watch?v=LNXrwzZuC40>. Acesso em: 08 de mar. 2020.

[26] SILVA, Marques da. ***Metodologia da Pesquisa*** . 2ª edição. Revisada. Fortaleza-Ceará, 2015.

[27] SOUZA, J. R. de; Garcia, J. da S.. 1. Ed, ***Contato Matemática***. vol.3. São Paulo: FTD 2016.

[28] STEWART, J. ***Cálculo Volume I***. [tradução EZ2 Translate]. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.

[29] STEWART, J. ***Cálculo Volume 2*** . 7.ed. tradução EZ2 Translate. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.

[30] THOMAS, George Brinton. ***Cálculo volume 2***. Tradução Carlos Scalici; revisão técnica Claudio Hirofume Asano. – 12. ed. – São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.