UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MARCELO CORREIA LISBOA

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA GEOMETRIA FRACTAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ARRAIAS-TO
2019

MARCELO CORREIA LISBOA

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA GEOMETRIA FRACTAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Alcione Marques Fernandes.

ARRAIAS-TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L769p Lisboa, Marcelo Correia.

Uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica. / Marcelo Correia Lisboa. – Arraias, TO, 2019.

59 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2019.

Orientadora : Alcione Marques Fernandes

1. Fractais. 2. Geometria Fractal. 3. Ensino de geometria no Brasil. 4. Ensino de Matemática no Ensino Médio. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MARCELO CORREIA LISBOA[1]

UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM DA GEOMETRIA FRACTAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede (ProfMat) da Universidade Federal do Tocantins (UFT), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 06/12/2019

BANCA EXAMINADORA:

Dra. Alcione Marques Fernandes – UFT/Matemática
Orientadora

Dr. Joubert Lima Ferreira – CCET/UFOB
Examinador

Dr. Kaled Sulaiman Khidir – UFT/Matemática
Examinador

Arraias - TO
2019

1O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Aos meus familiares, aos meus amigos e a todos aqueles que contribuíram, de forma direta ou indireta, para realização deste sonho. Em especial às minhas filhas Leticia e Sarah, aos meus pais, Sr. Deoclides e Sra. Odete e às minhas irmãs Denise, Dirlene e Tatiane.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, por propiciar as condições necessárias às conquistas e dar a força suficiente para vencer os desafios;

A minha orientadora, Profª. Drª. Alcione Marques Fernandes, que contribuiu significativamente para viabilizar este trabalho;

A minha família pela paciência e compreensão;

Aos meus amigos que cobraram a minha presença, mas compreenderam as razões da minha ausência;

Aos meus colegas de curso pelas ajudas múltiplas em todo o percurso e pela amizade para a vida;

Ao amigo incentivador Leniedson;

Aos meus professores que transbordaram as barreiras do ensinar: instruíram, muniram;

À Universidade Federal do Tocantins (UFT), pela oportunidade de formação ofertada;

Enfim, a todos que foram envolvidos de alguma forma e contribuíram para a realização deste trabalho.

"O presente trabalho foi realizado com o apoio da coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior – Brasil (CAPES) – Código de financiamento 001".

"A Geometria Fractal fará com que você veja as coisas diferentes. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas,rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma".

Michael Barnsley em seu livro "Fractals Everywhere"

Resumo

Há poucos anos Benoît Mandelbrot, precursor Geometria Fractal, percebeu características fractais em várias partes da natureza (como nuvens, relevo, árvore, plantas e rios), do corpo humano, de figuras geométricas e de construções do computador. A partir disso, os fractais começaram a ser estudados e sistematizados em uma geometria própria - a Geometria Fractal - e, em consequência da relevância das descobertas a respeito deles, esses objetos geométricos passaram a ter grande valor científico. Por isso, apresentamos aqui uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica. Essa proposta consiste em ações que inserem elementos da Geometria Fractal em conteúdos matemáticos do Ensino Médio para introduzir ou fixar conceitos. Assim, o objetivo dessa proposta é a inclusão dessa nova Geometria no Ensino Médio como ferramenta para auxiliar o ensino de conteúdos matemáticos, tendo em vista a possibilidade dessa ação potencializar a aprendizagem da matemática, tornando-a mais significativa para os alunos. Para tanto, propõe resgatar um pouco da história da Geometria, do ensino de Geometria no Brasil e da Geometria Fractal, tentando identificar suas origens e compreender contexto do surgimento. Através de pesquisas bibliográficas e exploratórias baseadas principalmente em Boyer (1996), Valente (1999), Pavanello (1993), Barbosa (2005), Janos (2008) e Smole e Diniz (2016), percorremos a história das geometrias até a inserção da Geometria Fractal no Ensino Médio. Em consequências dos estudos, percebemos que a Geometria Fractal oferece ampla possibilidade de aplicabilidade na Educação Básica, desde o apelo visual à formação de padrões, que são importantes para o desenvolvimento do raciocínio que conduz às soluções de alguns problemas matemáticos.

Palavras-chaves: Fractais; Geometria Fractal; Ensino de Geometria no Brasil; Ensino de Matemática no Ensino Médio.

Abstract

A few years ago Benoît Mandelbrot, a precursor to Fractal Geometry, noticed fractal features in various parts of nature (such as clouds, relief, trees, plants and rivers), the human body, geometric figures and computer constructions. From this, fractals can be studied and systematized into their own geometry - a Geometry Fractal - and, as a consequence of the relevance of the discoveries about them, these geometric objects suffered with great scientific value. Therefore, we present here a proposal of approach of Fractal Geometry in Basic Education. This proposal consists of actions that insert elements of Fractal Geometry in high school mathematical contents to display or fix concepts. Thus, the purpose of this proposal is the inclusion of this new Geometry in High School, as a tool for teaching mathematical materials, in view of the possibility of this action to enhance the learning of mathematics, the most significant use for students. To do so, ask for a little history of geometry, teaching of geometry in Brazil and fractal geometry, trying to identify their origins and understand the context of the treatment. Through bibliographical and exploratory research mainly in Boyer (1996), Valente (1999), Pavanello (1993), Barbosa (2005), Janos (2008) and Smole and Diniz (2016), they record the history of geometries until the insertion of Geometry. High School Fractal. As a consequence of the studies, we realize that the Geometry Fractal offers wide scope for application in Basic Education, from the visual appeal to the formation of patterns, which are important for the development of reasoning and lead to solutions of some mathematical problems.

Key-words: Fractals; Fractal geometry; Geometry Teaching in Brazil; High School Mathematics Teaching.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Em consonância com o objetivo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) de "proporcionar formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico", neste trabalho apresentamos uma pesquisa de mestrado que consiste em uma proposta de abordagem da Geometria Fractal para o Ensino Médio, considerando e explorando os aspectos peculiares dos fractais envolvidos no propósito de auxiliar o ensino da matemática. Abordaremos o tema Geometria Fractal, assunto ainda pouco explorado pelos professores de Matemática.

A Geometria Fractal é a parte da matemática que estuda o comportamento e as propriedades dos fractais. Esta recente Geometria começou a ser formalizada a partir dos estudos de Benoit Mandelbrot nos anos 70 do século XX. A denominação surgiu através do neologismo fractal, originário do verbo latim *fractus*, que significa irregular ou quebrado. Os fractais são formas geométricas abstratas, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita, que, segundo Pimentel, Costa e Urban (2003, p. 17), "preservam em cada uma de suas partes a singular propriedade de representar o todo".

Enquanto os elementos e as figuras da Geometria euclidiana tem dimensão topológica inteira - por exemplo; o ponto, a reta, um quadrado e um cubo, que têm dimensão 0, 1, 2 e 3, respectivamente - na Geometria Fractal as dimensões podem ser intermediária. Os fractais, diferentemente dos objetos da Geometria euclidiana, apresentam figuras irregulares em todas as escalas e possuem sempre algum tipo de auto-similaridade.

Pensar na forma de introduzir ou abordar certos conteúdos matemáticos com foco na aprendizagem do aluno, atraindo a sua atenção para os conceitos importantes do objeto de estudo, aguçando sua curiosidade em compreender possíveis regularidades e/ou padrões e perceber propriedades, induz à consideração de novas metodologias de ensino. Principalmente considerando as dificuldades pelos estudantes na área de matemática verificada pelo professor no dia a dia da sala de aula e pelas avaliações externas como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), coordenada pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Nesse aspecto, a Geometria fractal apresenta-se como rica fonte de exploração, mostrando-se útil para auxiliar no processo escolar educativo.

No desenvolvimento deste trabalho buscamos descobrir de que forma a Geometria Fractal pode auxiliar na abordagem de conceitos matemáticos no Ensino Médio. Para isso, contamos com o seguinte objetivo geral: propor atividades sobre a Geometria Fractal que auxiliem o ensino da Matemática e/ou da Geometria no Ensino Médio, ajudando a introdução conteúdos matemáticos e geométricos, considerando o seu relevante potencial exploratório no processo de ensino e aprendizagem. Além desse, destacamos outros objetivos. Estes pontuam questões mais específicas do trabalho. São eles: Levantar dados relevantes relativos ao ensino de Geometria no Brasil; Apresentar alguns fractais clássicos destacando as características fractais deles; Compreender o processo de formação de alguns fractais, identificando possíveis padrões.

Através da metodologia de pesquisa bibliográfica e exploratória, foram realizadas leituras relacionadas ao tema Geometria Fractal e assuntos afins, História da Matemática, História da Educação no Brasil, assistidos seminários e documentários sobre os fractais e a Geometria Fractal e foi verificado em alguns livros didáticos como os conteúdos matemáticos são introduzidos e abordados no Ensino Médio. A partir daí, foi elaborada uma proposta de atividade abordando a Geometria Fractal em alguns conteúdos do Ensino Médio em que a sua presença oferecia possibilidade de vantagem à aprendizagem daquele conteúdo.

O Capítulo 2 busca resgatar um pouco da história da Geometria a fim de compreender o contexto de seu surgimento e poder estabelecer um comparativo paralelo com a nova Geometria dos fractais. Aqui também é discutido a razão que motivou a criação da Geometria, passando pelas razões que motivaram o seu desenvolvimento ao longo de milhares de anos por vários povos em diferentes tempos.

Ainda no Capítulo 2 abordamos o ensino de Geometria no Brasil. Começamos fazendo uma análise do atual cenário da educação brasileira no tocante à matemática e, em especial, à Geometria. Depois de constatados resquícios de desvalorização desse importante campo do conhecimento humano, buscamos compreender, nos contextos históricos, os rumos tomados pela educação escolar e suas prioridades em cada época, desde o início da trajetória do ensino de Geometria, que se deu depois de cerca de 200 anos da chegada dos portugueses. As necessidades da guerra motivaram o estabelecimento do ensino de Geometria no Brasil e, anos depois, com a chegada da Família Real, vivenciamos o seu período de ascensão, que logo é freada pelo crescimento populacional e os novos desafios da educação no início do século XX. Neste mesmo século vivenciamos a desvalorização gradativa e o abandono da Geometria.

No Capítulo 3 apresentamos, como tema central, a Geometria e os seus objetos de estudos: os fractais. Percorremos um pouco pela história, pelo contexto e pela motivação do surgimento dessa nova Geometria. Neste capítulo também são destacados alguns fractais clássicos, seus processos de construção, suas dimensões, algumas propriedades e características.

O Capítulo 4 ficou reservado a uma sugestão de abordagem do tema fractal no Ensino Médio. Aqui são apresentados alguns conteúdos matemáticos em forma de atividade em que o uso da Geometria fractal potencializa o raciocínio que leva à solução do problema proposto.

Por último, no Capítulo 5, trazemos as considerações finais sobre a pequisa.

2 BREVE HISTÓRICO DA GEOMETRIA

Neste capítulo, voltamos um pouco no tempo a fim de conhecer as circunstâncias que deram origem à Geometria, buscando compreender o contexto em que os povos antigos perceberam a importância dessa área do conhecimento humano, hoje largamente utilizada. Partindo do início da prática geométrica, passamos pelos os férteis terrenos de sua aplicação e desenvolvimento para alcançar posições de destaque.

2.1 O surgimento da Geometria

A importância da Geometria atualmente é incontestável, pois convivemos cercados por suas formas e elementos oriundos das Geometrias criadas pela natureza e pelos homens ao longo da história da humanidade. A sua presença é constante no dia a dia das pessoas e se manifesta através do espaço e das formas nos cercam. Para todo lugar que se olha é possível contemplar as formas ou os elementos geométricos.

O entendimento genérico de Geometria é antigo. Ele surgiu em várias culturas para atender às necessidades práticas de um povo, ainda que, por longo período, essa Geometria ainda não tivesse sido formalizada. Ela tem presença marcante nas atividades humanas e na nossa afirmação como ser cultural, sendo elemento indispensável na comunicação, principalmente na linguagem artística, desde a pré-história. A respeito disso, Boyer (1996, p. 5), destaca que “o homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu o caminho para Geometria”.

O “lazer” e a “necessidade de medir terras”, embora ambos poucos, estão entre as principais possíveis motivações para a criação da Geometria. Aristóteles [1] acreditava que o desenvolvimento da Geometria se deu pelo lazer, já Heródoto[2] acreditava que a justificativa para tal desenvolvimento estava nas necessidades práticas de um povo.

[1] Aristóteles foi um importante filósofo para a Grécia Antiga e para o Ocidente em geral, visto que a importância dada por ele ao conhecimento empírico e as suas classificações sistemáticas do conhecimento muito influenciaram a Filosofia Escolástica e Moderna e as ciências modernas que surgiram a partir do século XVI. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/aristoteles.htm>. Acessado em 14 de Dez. de 2019.

[2] Historiador grego (485-425 a.C.). Foi somente por meio de seus relatos que podemos ter informações precisas sobre a Antiguidade.

Também conhecido como o "Pai da História". Enquanto muitos homens recebem o crédito de terem "moldado"a história, há um de quem se pode dizer que a "criou". Heródoto desenvolveu os meios pelos quais nós, do mundo ocidental, podemos saber e avaliar a história e seus momentos mais importantes.. Disponível em: <https://www.sohistoria.com.br/biografias/herodoto/>. Acessado em 14 de Dez. de 2019

> Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria [...] (BOYER, 1996, p. 4).

Tanto Heródoto quanto Aristóteles pode ter razão em relação à motivação da criação da Geometria, porém as evidências deixadas pelo homem pré-histórico que chegaram até nós, mostram que eles se equivocaram ao subestimar o período do início desse tema. Estas não são as únicas hipóteses para a criação da geometria. Existem outras e uma delas, segundo Boyer (1996, p. 5), de acordo com os mais antigos resultados encontrados na Índia, "[...] é que a geometria, como a contagem, tivessem origem em rituais primitivos".

Apesar dos estudos investigativos já realizados, é impreciso afirmar qual é a origem da Geometria e quais razões motivaram o seu surgimento, mas é sabido que o uso dela precede a organização da escrita. Boyer (1996, p. 4) argumenta que "foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma de escrita". Ou seja, a escrita que é usada comumente para registrar informações e fatos importantes a respeito de um tema, ainda não havia sido desenvolvida no momento em que as pessoas começaram a ter e fazer uso das primeiras noções geométricas.

2.2 O desenvolvimento da Geometria

À medida que a espécie humana foi evoluindo tanto em aspectos biológicos quanto socioculturais, a Geometria foi saindo da condição de mero elemento comunicativo e estético para tornar-se componente de uma lógica prática na interpretação e resoluções de problemas do cotidiano das pessoas. Para Boyer (1996, p. 4) "as primeiras manifestações da Geometria matematicamente consistentes são datadas nos últimos seis milênios entre os egípcios".

O uso de conhecimentos relacionados à Geometria ao longo do tempo ficou evidenciado pelos rastros deixados na sua materialização empregada nas atividades práticas de um povo. Sobre isso, Rooney (2012, p. 74), observa que "Documentos de aproximadamente 3100 a. C. revelam que os egípcios e babilônios já tinham algumas regras matemáticas para medir recipientes de armazenamento, medir extensões de terrenos, e planejar construções".

> A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. De numerosos exemplos concretos infere-se que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deveriam estar formalizados com as regras gerais da área do retângulo da área do triângulo retângulo e do

> triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), da área de um trapézio retângulo, volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. [...] (EVES, 2004, p. 60-61).

Essa trajetória cronológica passa pela Geometria Descritiva que, de acordo com a história, começa a ter vida própria através do trabalho de um matemático grego do século VII a.C. conhecido como Tales de Mileto, sobre quem não se sabe muito. No entanto, sabemos por Boyer (1996, p. 31), que o "Seu nascimento e sua morte são datados com base no fato de que o eclipse de 585 a.C. ocorreu quando estava em plena maturidade, digamos 40 anos, e diz-se que ele tinha 78 anos quando morreu". De qualquer forma, a sua contribuição notória à matemática, em particular à Geometria, deixou o seu nome na história associado a um importante teorema muito usado atualmente: o famoso Teorema de Tales[3].

Um importante marco na história da Geometria foi a criação do Museu[4] na cidade de Alexandria. A introdução da dedução na Geometria iniciada por volta de 600 a. C. se aliou aos conhecimentos geométricos culturalmente produzidos que foram organizados e sistematizados dando origem a uma Geometria demonstrativa. Um dos notáveis intelectuais que se dedicavam às pesquisas no Museu de Alexandria, o matemático grego Euclides de Alexandria (325 - 265 a. C.), através da sua obra-prima, os *Elementos*, foi o principal responsável em produzir, reunir e formalizar tudo o que se sabia sobre a matemática, em especial a Geometria, naquela época. Suas representações geométricas baseadas em axiomas e proposições eram as que mais se aproximavam da Geometria da natureza. A partir de então, tal Geometria ficou conhecida como **Geometria euclidiana** ou **Geometria da regularidade** e disseminou pelo mundo. Os seus conceitos e elementos se tornaram presentes no cotidiano das pessoas de tal forma que sequer o próprio Euclides poderia imaginar ver, concretizados nas construções humanas, tantas formas abstratas de outrora.

Atualmente é inevitável contemplar as contribuições da Geometria em diversas áreas do conhecimento e na afirmação da pessoa humana como ser sociocultural. A respeito disso, Boyer (1996, p. 440) conjectura que "entre seus aspectos mais notáveis a matemática contemporânea apresenta um ressurgimento da geometria, ainda que em vestes modernas", ou seja, ela continuará sendo uma ferramenta de interpretação dos fenômenos naturais e sociais.

A Geometria passou por muitas conquistas e evolução desde a sua primeira grande

[3] "Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos *quaisquer* de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra. (DOLCE e POMPEO, 1993, p. 59)"

[4] O primeiro modelo do que viria a ser as universidades, séculos depois. Segundo Hygino H. Domingues *apud* Dolce e Pompeo (1993, p. 59)

formalização quando culminou na obra os *Elementos* de Euclides até os dias atuais. Várias gerações contribuíram com esta trajetória exitosa da Geometria. No entanto, neste trabalho, além do seu desenvolvimento inicial, nos interessa destacar os primeiros passos e rumos tomados pela Geometria escolar no Brasil.

2.3 O Ensino de Geometria no Brasil

Há mais de dois mil anos que antigas civilizações como a Mesopotâmia, a região do vale do Rio Nilo, a China, a Índia, a Grécia e a Roma, contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Matemática (em especial, da Geometria), até que o ensino de Geometria introduzisse as primeiras noções geométricas à recém formada e miscigenada população brasileira que se constituía principalmente pelos povos indígenas, africanos e europeus. Os relatos históricos sobre o ensino de Geometria no Brasil acompanham e se misturam com os desdobramentos dos acontecimentos educacionais, políticos e econômicos e se confunde com a própria história do Brasil.

2.3.1 O atual cenário da Geometria no Brasil

Atualmente, a importância da Geometria na Educação Básica no Brasil é facilmente notada através dos documentos oficiais que normatizam a Educação brasileira. Junto à Aritmética, Álgebra, Estatística e Probabilidade, a Geometria constitui um dos grandes campos que subdivide a área Matemática na recente organização proposta pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[5]. A BNCC "estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica", segundo o Ministério da Educação (MEC)[6]. Nesse sentido, a Geometria é considerada essencial para a formação básica dos alunos. De acordo com o texto da BNCC,

> A **Geometria** envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2017, p. 271).

[5] Definida pelo Ministério da Educação (MEC) como "documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica". Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acessado em 30 de jun. de 2019

[6] Disponível em:http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acessado em 30 de jun. de 2019

A BNCC que norteia os currículos dos sistemas educacionais e as propostas pedagógicas para a educação básica, ratifica as orientações dadas aos educadores brasileiros, nos últimos anos do século XX e primeiros do século XXI, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e enfatiza o seu papel no desenvolvimento de habilidades e competências essenciais ao processo cognitivo.

A respeito da importância do ensino de Geometria e do exposto pelo texto das Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), editadas posteriormente aos PCNs, extraímos que “a Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços” (BRASIL, 2002, p. 123). Além disso, essas orientações complementares destacam que:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas (BRASIL, 2002, p. 123).

As várias formas assumidas pela natureza parece não obedecer uma lei de formação simples, ainda assim, a Geometria oferece ferramentas que permitem representar tais formas facilitando a sua visualização. Além disso, o modo como as pessoas organizaram os espaços em que vivem e os objetos que usam, geram problemas que a Geometria resolve ou auxilia na resolução. A relevância da Geometria nos dias atuais também é bastante notada nas falas de educadores estudiosos do tema. A exemplo de BULOS (2011) que garante que:

> A geometria pode ser o caminho para desenvolvermos habilidades e competências necessárias para a resolução de problemas do nosso cotidiano, visto que o seu entendimento nos proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair (BULOS, 2011, p. 5).

Os conteúdos da Geometria devem estar presentes na rotina do aluno desde o início da sua vida escolar. Eles são essenciais à formação da criança, pois estimulam a observação, comparação, percepção de diferenças e semelhanças e identificação de regularidades. Dessa forma, gradativamente os conceitos geométricos serão assimilados pelos alunos e associados com os espaços e com as formas do mundo real com os quais convivemos ou conhecemos. De acordo com a BNCC, nos Anos Inicias do Ensino Fundamental os alunos devem ter contato com a Geometria e que “No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas” BRASIL (2017, p. 272). Segundo Fainguelernt (1999), essa orientação da

BNCC, já está incorporada à opinião dos profissionais dessa área e deve ser mantida nas etapas seguintes do ensino.

> Entre os matemáticos e os educadores matemáticos, existe um consenso de que o ensino da Geometria deveria começar desde cedo e continuar, de forma apropriada, através de todo o currículo de Matemática. Entretanto, tradicionalmente existe divergência de opiniões entre os conteúdos e os métodos de ensino da Geometria nos diferentes níveis, desde a escola primária até a universidade. Uma das razões dessas divergências é que a Geometria possui muitos aspectos e, consequentemente, talvez não exista um caminho simples, linear, claro, hierárquico desde os princípios elementares até as abstrações e axiomas, embora seus conceitos devam ser considerados em diferentes estágios e diferentes pontos de vista (FAINGUELERNT, 1999, p. 21).

É perceptível que nos últimos anos os conteúdos geométricos ganharam posições de destaque e mais espaço nos livros didáticos. Além dos capítulos dedicados aos estudos da Geometria, é comum encontrá-la também associada a outros conteúdos matemáticos a fim de auxiliar na compreensão deles. Um recurso da Geometria muito utilizado em outros campos, a representação geométrica, ajuda a matemática a apresentar os seus conteúdos de forma didática e contextualizada, como é orientado atualmente, tornando significativos os muitos resultados e propriedades estudadas onde a aplicação dessas representações seja possível e vantajosa.

Outros indicadores que mostram a importância dada à Geometria atualmente são os vários exames que cobram a matemática, esta por sua vez cobra Geometria, que os alunos são submetidos durante ou após os cursos da Educação Básica, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica[7] (SAEB), Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)[8], Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), além de vestibulares e concursos diversos, que normalmente cobram questões do campo da Geometria.

Contudo, a prática docente nos revela que os assuntos relacionados à Geometria, ainda que disponha de todo este aparato organizacional atual mencionados, são pouco (ou nada) trabalhados em sala de aula, principalmente no Ensino Fundamental. Nos anos iniciais dessa etapa é comum encontrar professores sem formação específica na área de matemática, o que dificulta o cumprimento das orientações definidas pela BNCC. Os alunos precisam chegar no Ensino Médio com uma base geométrica construída para absorver e incorporar os novos conhecimentos dessa fase da educação. A organização dos conteúdos

---

7 Que a partir de 2019 substitui a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc) - conhecida como Prova Brasil.

8 A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações – MCTIC. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm>. Acessado em 17 de nov. de 2019.

devem atender a esse propósito. Nesse sentido, os PCN+ orientam que “o ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos [...]”. (BRASIL, 2002, p. 123). Observando as instruções editadas posteriores pelo MEC sobre esse tema, percebe-se a manutenção da estrutura organizacional dos objetivos para essa área, quando lemos que “A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe **a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais** desenvolvidas no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2017, p. 527).

2.3.2 Herança cultural de desvalorização do ensino de Geometria

A herança da cultura de desvalorização da Geometria foi trazida ao Brasil pelos seus colonizadores a partir do ano de 1500 e pelos missionários/educadores que aqui se estabeleceram, a partir do ano de 1549 com a organização administrativa colonial e criação do governo geral, para ofertar as primeiras instruções sobre os novos saberes e crenças ao povo em formação do Brasil Colônia. As barreiras impostas com a formação étnica e social da população brasileira à educação com as suas peculiaridades, como alto índice de analfabetismo entre adultos, diversidade cultural e de interesse, pluralidade linguística, podem tem contribuído para a implementação do ensino de Geometria. Quando a educação brasileira começou a dar os seus primeiros passos, a Geometria não fazia parte dos ensinamentos prioritários da época. A sua inserção na educação se deu tempos depois e aos poucos.

Mesmo que os jesuítas[9] tenham sidos os primeiros educadores a virem para o Brasil com o intuito de instituir uma educação formal (intencional) e que nos dois primeiros séculos a partir da chegada dos portugueses eles tenham dominado exclusivamente o ensino por aqui, os registros indicam que a origem do ensino de Geometria no Brasil não foi protagonizada por esses educadores religiosos.

No Brasil os jesuítas seguiram a prática adotada na Europa, de onde eles vieram, e não deram destaque ao ensino de matemática naquela época. Foi “Na física que iria surgir o ensino dos rudimentos matemáticos. Apesar do aparecimento das matemáticas nos programas dos cursos de física desde o século XVII, os professores durante mais de um século reservara à matemática um lugar marginal [...]”, (VALENTE, 1999, p.33). A maioria dos membros da Companhia de Jesus não valorizava a matemática, tampouco a Geometria, fato este que já era de se esperar, pois muitos deles não possuíam formação para trabalhar com essa disciplina e, além disso, não a viam como algo importante para a formação das pessoas. Nessa concepção, ensinar Geometria, assim como outras ciências

[9] Os jesuítas eram padres que pertenciam à Companhia de Jesus, uma ordem religiosa vinculada à Igreja Católica que tinha como objetivo a pregação do evangelho pelo mundo. Essa ordem religiosa foi criada em 1534 pelo padre Inácio de Loyola e foi oficialmente reconhecida pela Igreja a partir do papa Paulo III em 1540. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/historia/o-que-eram-os-jesuitas.htm>. Acessado em 14 de Dez. de 2019.

"irrelevantes", seria um desperdício de tempo e prejudicaria os estudos das letras, essas sim, tidas como importantes. Ainda no século XVIII, a opinião, carregada de menosprezo à Geometria, de um notável francês era compartilhada por muitos jesuítas:

> O estudo das ciências especulativas como a Geometria, a astronomia e a física é um divertimento vão. Todos esses conhecimentos estéreis e infrutíferos são inúteis por eles mesmos. Os homens não nascem para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar todo o seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria. Seu espírito é muito grande, a vida muito curta, seu tempo muito precioso para se ocupar de tão pequenas coisas; [...] (DAINVILLE, 1978 apud VALENTE, 1999, p. 35).

Percebe-se com isso que as instruções geométricas não fazia parte do tipo de formação pretendida por certa classe influente por um período. A educação oferecida no Brasil, por influência recebida da Europa, seguia essa filosofia.

2.3.3 O início do ensino de Geometria no Brasil

A formação dos Jesuítas que vieram para o Brasil, as influências europeias por eles recebidas, assim como os seus objetivos nessa terra, aliados às dificuldades diversas encontradas em um território-colônia no início de formação, contribuíram para que, em cerca de 200 anos de permanência no Brasil, a educação oferecida pela Companhia de Jesus fosse incompleta a tal ponto que não contemplasse o ensino de Geometria. Quando os conflitos de interesses entre pessoas influentes junto à Corte e a Companhia se chocaram, os jesuítas foram expulsos do Brasil. Isso ocorreu no ano de 1759, circunstância em que Portugal, assim como outros países, tinha planos bélicos de utilizar a Geometria no ensino. Nas palavras de Meneses(2007), a primeira organização do ensino de Geometria no Brasil que se tem registro está atrelado às necessidades da guerra.

> A geometria ligada à guerra é a primeira forma de prática pedagógica de que se tem registro no Brasil. Essa geometria tornara-se muito importante na Europa devido ao grande desenvolvimento que as armas de guerra sofreram a partir do século XIV (MENESES, 2007, p. 22).

A Geometria que possibilitou o desenvolvimento de armas e construções que ajudaram a garantir melhores defesas e mais poder às nações, em particular as europeias, a partir do século XIV, foi efetivamente introduzida no ensino do Brasil Colônia no início do século XVIII e expandida no período imperial à medida em que as cidades se desenvolviam e novos estabelecimentos de ensino eram construídos. Porém há registros do uso da Geometria para as finalidades relacionadas à guerra que nos remetem ao século IV antes de Cristo, quando Platão (428 a.C. - 347 a.C.), segundo Valente (1999, p. 39), teria reprovado os trabalhos de dois importantes matemáticos - os seus contemporâneos Eudóxio

(408 a.C. - 355 a.C.) e Archytas (428 a.C. - 347 a.C.) - que foram acusados de arruinarem a Geometria com a continuação de construções de instrumentos práticos (chamados de mesógrafos) iniciadas por Arquimedes. Em meio a isso, a situação de Portugal em meados do século XVII que se encontrava envolvido em conflitos e que tinha recém-retomada a sua independência após 60 anos sob domínio espanhol, certamente motivou o rei D. João IV a assumir posturas que visassem a garantia de mais proteção a todo o seu reino e determinar a introdução de conteúdos geométricos como preparação para a *Aula de Artilharia e Fortificação* em Lisboa.

Em 1647 o rei de Portugal funda naquele país a *Aula de Fortificação e Arquitetura Militar*. Essa política portuguesa de capacitação militar foi, nos anos seguintes, estendida às suas colônias, alcançando o Brasil que teve como porta de entrada o Rio de Janeiro. A autorização para a criação da *Aula* no Brasil se deu ainda em Portugal em 1648 quando a Corte providenciou a contratação de estrangeiros especialistas em cursos militares para atuarem aqui. No entanto, mais de meio século se passou sem que essas aulas efetivamente acontecesse.

> Portugal precisa proteger e defender suas terras ultramarinas. Essa primeira iniciativa é seguida por várias outras de modo irregular, em 1699, é criada a *Aula de Fortificações* no Rio de Janeiro. O objetivo era ensinar a desenhar e a fortificar. O número de alunos seria três e deveria ter, no mínimo, dezoito anos. Tal aula, apesar de instituída em 1699, ainda em 1710 não tinha iniciado porque "nessa data eram reclamos os livros, compassos e instrumentos" (TELLES, 1984 apud VALENTE, 1999, p. 43).

Para superar as dificuldades que os soldados tinham em atingir os objetivos relacionados à guerra, foi dado início no Brasil, no final do século XVII, a *Aula de Fortificações* e nela se deu o desenvolvimento do ensino de Geometria que se alavancou para auxiliar no plano de proteção, defesa e ataques adotado pelo governo. A partir daí, foi desencadeada uma série de ações que vai da implementação e expansão até a melhoria de cursos para preparação de soldados.

> [...] Na década de 1730 o ensino militar tornou-se obrigatório a todo o oficial, há o registro dos primeiros livros brasileiros sobre geometria - Exames de Artilheiros e Exames de Bombeiros. Foi a necessidade de ter noções geométricas que impulsionou estudos matemáticos, incorporados nos currículos oficiais (SENA; DORNELES, 2013, p.139).

Em 1738 uma importante conquista dos governos da Colônia veio expressa na Carta Régia de 19 de agosto que foi um curso chamado de *Aula de Artilharia e Fortificações* do Rio de Janeiro e Bahia[10]. Este curso veio acompanhando a determinação de obrigatorie-

[10] Além do Rio de Janeiro, há registro de haver sido criada também na Bahia esta *Aula* na mesma data que a do Rio de Janeiro. (FILHO, 1958 apud VALENTE, 1999, p. 44)

dade do ensino militar a todo oficial e sem o qual nenhum militar poderia ser nomeado ou promovido.

Os livros *Exames de Artilheiros* e *Exames de Bombeiros*, escritos em 1744 e 1748, respectivamente, de acordo com Sena e Dorneles (2013), são de autoria do próprio professor que recebeu da Corte portuguesa a incumbência de instruir os soldados, o Senhor José Fernandes Pinto Alpoim[11]. A organização didática deles e os conceitos (em particular, geométricos) ali presentes objetivavam munir os militares com conhecimentos úteis à sua carreira. Ambos eram estruturados por meio de perguntas e respostas e didaticamente os conteúdos abordados obedeciam geralmente a mesma ordem. O modo como a sequência seguia era a seguinte: inicialmente era apresentada a definição, seguida de explicação e exemplo numérico. Percebe-se que na prática educativa havia mais valorização do conhecimento prático do que a preocupação com o rigor científico e as demonstrações dos teoremas e corolários.

Os problemas enfrentados pela educação militar no Brasil no século XVIII eram muitos. Dentre eles destacam-se a escassez de profissionais especializados na área que tiveram de vir da Europa e a falta de materiais didáticos, principalmente livros. Razões que provocou o adiamento do início das aulas que deveriam ter começado no final do século XVII e motivou Alpoim a escrever livros didáticos *Exames de Artilheiros* e *Exames de Bombeiros*, os primeiros a serem produzidos no Brasil. Esses livros tornaram-se muito importantes, pois eles eram os únicos da língua portuguesa que abordava os conteúdos específicos do curso.

Aos poucos o ensino de Geometria no Brasil foi sendo mais necessário e ganhando mais importância nos currículos por motivos diversos: a necessidade da formação e aperfeiçoamento militar dos soldados (que foi a mola propulsora), do engenheiro[12] e do professor, por exemplo. Também por ser pré-requisito para acessar alguns cursos relevantes e por oferecer possibilidade de ascensão na carreira.

2.3.4 Período de ascensão do ensino de Geometria no Brasil

Um importante salto educacional se deu a partir da vinda para o Brasil da Família Real de Portugal que trouxe consigo, dentre tantas coisas, materiais didáticos e fundou duas referenciadas instituições de ensino: a Academia Real dos Guardas-Marinha e a Academia Real Militar. Com esse advento, muitos livros vieram para cá também, pos-

[11] Alpoim (1700 - 1765), de acordo com VALENTE (1999, p. 44), nasceu em Portugal em 14 de julho, filho do militar Vasco Fernandes e de Revocata Pinto Alpoim, ministrou curso *Aula de Artilharia e Fortificações* desde de 1738 com a obrigatoriedade do ensino militar até a sua morte

[12] Oficial que serve à guerra para ataques, defesas e fortificação de praças. É um matemático hábil, 'expert' e astuto, que conhece a arte da arquitetura militar, que faz o reconhecimento das praças que se quer atacar e que mostra ao general o ponto mais frágil, que desenha trincheiras, galeiras [...] Ao engenheiro cabe também a invenção de novas bombas [...] (VÉRIN, 1993, apud VALENTE, 1999, p.41)

sibilitando a criação de uma biblioteca no Rio de Janeiro - A Real Biblioteca Nacional. Sobre esse episódio, Valente (1999) recorre a Albuquerque para enfatizar que:

> Em 1808, dando-se a conhecida transmigração da Corte Portuguesa para o Brasil, veio também para cá a Academia Real dos Guardas-Marinha, embarcada, toda ela - alunos, oficiais e parte do material escolar - a bordo da Nau Conde D. Henrique (VALENTE, 1999, p. 92).

No início do ano seguinte à chegada da Corte, os trabalhos acadêmicos da Academia Real dos Guardas-Marinha, instalada no Mosteiro de São Bento no Rio de Janeiro, começam. Logo em seguida, em 1810, o então Príncipe Regente (futuro rei D. João VI) cria, através de uma Carta Lei, a Academia Real Militar que substitui a Real Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho.

Ainda no início do século XIX, a Geometria ensinada no Brasil alcançava um público bem restrito. Primeiro porque mais da metade da população era analfabeta, depois porque a Geometria não era mostrada nos primeiros anos de estudo, que por sua vez eram reservados para ensinar o aluno a ler, escrever e contar. Quando, por força da lei, foi expandido o acesso à educação com a gratuidade do primário em 1824, também houve uma tentativa de incluir noções geométricas como conteúdo das matemáticas, mas que não se concretizou.

> [...] De início, por não haver professores primários habilitados e depois, em razão de não ser um conhecimento escolar solicitado para o ingresso em nenhuma instituição de ensino secundário (VALENTE, 1999, p. 113).

Após essa tentativa fracassada, porém antes o século XIX chegasse à sua metade, além da criação de escolas das *Primeiras Letras*, outras conquistas da educação foram significativas. Nesse período foram criados novos cursos como os jurídicos da Academia de São Paulo e de Olinda (1827) cujo acesso cobrava, entre outros, conhecimentos de Geometria. Ao futuro médico era cobrado apenas que este soubesse ler e escrever para ingressar no curso de cirurgia na Bahia, na ocasião de sua criação em 1813, mas, segundo Azevedo (1881 apud VALENTE, 1999, p. 118), a partir de 1832 as Academias Médicos-Cirúrgicas do Rio de Janeiro e da Bahia passaram a exigir dos candidatos para ingresso, conhecimentos de Aritmética e Geometria.

"Finalmente, em 1837, com o intuito de servir de modelo de escolarização secundária para o país, é criado o Imperial Colégio Dom Pedro II [...]" (VALENTE, 1999, p. 118), onde as matemáticas[13] estão presentes nas oito séries que o Colégio abrangia. No entanto,

[13] Até o início do século XX, os conteúdos de Matemática eram organizados em disciplinas independentes, as matemáticas: aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, cuja fusão se deu em 1927, com a criação da disciplina escolar Matemática, proposta de renovação encaminhada por Euclides Roxo (MENESES, 2007).

na organização dos conteúdos que era feita por anos, a Geometria estava presente apenas no 4º e no 5º ano. Valente (1999, p. 119) ainda cita a solicitação dos preparatórios às escolas superiores e o aparecimento dos liceus provinciais. Além disso, convém destacar que foi nesse período que começaram a surgir os primeiros livros didáticos brasileiros para escolas e liceus. A partir daí, muitos autores ganham destaques e muitos livros passam a fazer parte da educação brasileira, esta que, por sua vez, normalmente seguia as tendências educacionais internacionais.

> No final do século XIX, surgiu no Brasil uma literatura didática, marcada sempre pela sigla FIC. São os *Elementos de Arithmetica por FIC, ps Elementos de Geometria por FIC* etc. Deve-se ao prof. Eugênio de Barros Raja Gabagliaa introdução, no país, desses livros. [...] As escolas da Congregação dos Frères de I'Instruction Cherétienne (FIC) constroem, principalmente por meio dos seus frades-professores, uma grande obra didática em vários campos do saber (VALENTE, 1999, 176-177).

As tantas transformações educacionais deste século contribuíram para firmar a matemática e em particular a Geometria, no cenário educacional brasileiro. Além da utilidade prática da Geometria na função para a qual ela fora introduzida no ensino, ela passou a ser importante também no desenvolvimento do raciocínio e para promover o acesso do candidato ao ensino superior. O desenvolvimento da educação que seguia a passos lentos no Período Colonial, se viu, ainda que timidamente, mais acelerado a partir da chegada da Corte Portuguesa e no Período Imperial. Com isso, algumas áreas do conhecimento humano ganham espaço no novo modelo de educação adotado e nos novos cursos que surgiram. A Geometria, pela sua trajetória de crescimento, tornara-se uma disciplina fundamental nesse processo.

> Como se pode ver a Geometria sempre teve, historicamente, um espaço de destaque e agora tinha se tornado muito valorizada para o ingresso nos cursos jurídicos e num período posterior, em 1832, também passou a ser encarada como fundamental para o ingresso nos cursos das Academias Médico-Cirúrgicas e nas Politécnicas, tornando-se pré-requisito também para esses cursos.
>
> Toda essa valorização dos conteúdos matemáticos (Álgebra, Aritmética e principalmente da Geometria) para os cursos superiores, serviu como um propulsor dessas disciplinas no ensino secundário. Além disso, essa valorização serviu para caracterizar essas disciplinas, não só mais como disciplinas ligadas às necessidades militares, e sim como disciplinas de suma importância para a formação do candidato ao ensino superior. Em outras palavras, o ensino dessas disciplinas deixou de ter um caráter militar e foi se tornando conhecimento de uma cultura geral escolar necessário a formação humana, fazendo com que esses conhecimentos fossem conduzidos a se transformar em disciplinas autônomas, regulamentadas pelo poder público e caracterizadas como um conhecimento não mais específico, mas de cultura geral escolar (MENESES, 2007, p.43-44).

A essa altura, a disciplina de Geometria tornara-se relevante para a educação do Brasil, fazendo-se presente nos exames de acesso e na grade curricular de vários cursos. No entanto, apenas uma pequena parcela da população avançava nos estudos.

2.3.5 O crescimento populacional e os desafios da educação no século XX

Maria Regina Pavanello (1993) que realizou um importante estudo sobre a educação brasileira do século XX, observa que o percentual da população que tinha acesso ao ensino superior no início do século era baixo e que dos cursos superiores disponíveis, os das área jurídica eram os que mais atraíam interessados, principalmente pelas vantagens advindas dos cargos importantes do governo. Com exceção de cursos que permitem exercer carreiras liberais, como medicina, observa-se que há pouco interesse por estudos científicos.

A pouca oferta de vagas também é observada no ensino secundário público. Essas poucas vagas, oferecidas pelo Colégio Dom Pedro II e por algumas instituições mantidas pelos governos estaduais, eram preenchidas por meio de um processo rigoroso de seleção. A iniciativa privada também oferta esta modalidade de ensino em estabelecimentos particulares, porém a seletividade imposta principalmente por ser um ensino pago, restringia o acesso à educação de muitos interessados. Essa fase do ensino que tinha duração em torno de 6 anos, pela forma como se apresenta, estava voltada para a elite da sociedade e sua função era a preparação para o ensino superior.

> Na escola primária, aberta a uma parcela maior, embora ainda pequena da população, o ensino de matemática é de cunho essencialmente pragmático: busca-se o domínio das técnicas operatórias necessárias à vida prática a às atividades comerciais. Algumas noções de Geometria também são trabalhadas, sob a mesma orientação utilitária (PAVANELLO, 1993, p. 149).

Apesar do baixo percentual da população com acesso à educação, o número de alunos matriculados cresce gradativamente no decorrer do século XX e com isso aumenta a demanda por professores e materiais didáticos. Haviam poucos professores formados no país, por isso, nas palavras de (AZEVEDO, 1958 apud PAVANELLO *et al.*, 1989, p. 150), “quase todos eram autodidatas ou recrutados, como no Império, nos quadros das profissões liberais”. Assim, alguns educadores acreditam que o *livro do Mestre*, que acompanha os livros de cada disciplina e que contém muitos problemas e exercícios resolvidos, seja uma maneira de ampliar os conhecimentos dos professores, principalmente, do ensino secundário onde a Geometria é pré-requisito para diversos cursos na continuação dos estudos.

Isso ocorre porque não haviam cursos de formação para professores nessa época. Somente em 1934 que foi criada a Universidade de São Paulo e, no ano seguinte, a Universidade do Rio de Janeiro, esta futuramente chamada de Universidade do Brasil, ambas destinadas à formação do professor dos cursos secundários. Pavanello *et al.* (1989, p. 151) destaca que as primeiras instituições superiores destinadas à formação do professor dos cursos secundários começam a funcionar, no entanto, somente após a Revolução de 30 e que foram estruturadas de acordo com o modelo estabelecido pela Reforma Francisco Campos[14].

Um fato importante surgiu na Universidade de São Paulo no primeiro ano de sua criação, em meio às novas faculdades, uma organização sistemática de estimado valor para o desenvolvimento da Geometria no Brasil: o curso de matemática. Outro fato importante para a educação, em especial a Geometria, foi a junção dos vários ramos da matemática promovido pela reforma educacional Francisco Campos.

Nos anos seguintes, mesmo a chegada dos novos formados nos cursos de matemática sendo insuficiente para atender a demanda, os *livros do Mestre* deixaram de ser produzidos por alguns anos.

O ensino secundário passa por um nova reestruturação em 1942 com a Lei Orgânica do Ensino Secundário (Reforma Capanema). O formato da divisão do curso em dois ciclos de 1931 é mantida. Enquanto antes o primeiro ciclo (curso fundamental) durava 5 anos e o segundo ciclo (curso complementar) durava 2 anos, agora o primeiro ciclo (curso ginasial) tem 4 anos de duração e o segundo (curso clássico e curso científico) tem 3 anos.

A Geometria continua presente em todas as séries e ganha mais espaço nos cursos dos dois ciclos. Ela é abordada de forma intuitiva nas duas primeiras séries e de forma dedutiva nas duas últimas séries do curso ginasial. Além disso, "a geometria é bastante priorizada no segundo ciclo, sendo programada para todos os anos, incluindo-se ainda a trigonometria no 2º ano e geometria analítica no 3º [...]" (PAVANELLO *et al.*, 1989, p.156).

A educação no Brasil passa por mudanças constantes nesse período. Documentos normatizadores editam as novas concepções para o ensino, seguindo experiências exitosas e tendências de outros países.

2.3.6 O abandono do ensino de Geometria

A insatisfação com as políticas educacionais adotadas apontava para a necessidade de novas e significativas mudanças na educação ofertada ao povo brasileiro. Isso ficou

[14] A Reforma Francisco Campos compreende, segundo (PAVANELLO *et al.*, 1989, p. 174):

- Decreto 19851/31 - Estatuto das Universidades Brasileiras;
- Decreto 19852/31 - Organização da Universidade do Rio de Janeiro;
- Decreto 19890/31 - Reforma do ensino secundário;
- Decreto 20158/31 - Reorganização do currículo dos estudos econômicos.

evidente quando os programas para as disciplinas, propostos com a Reforma Capanema não silenciaram as críticas ao crescente ensino secundário e o descontentamento com o modelo de educação vigente fez com que a Congregação do Colégio Dom Pedro II, a pedido do Ministro da Educação em 1951, elaborasse novas propostas de programa para o ensino secundário. Apesar de não apresentar grandes mudanças com relação ao programa anterior, a nova organização dos conteúdos (Portaria 1045 de 14 de dezembro de 1951) não favorece o campo da Geometria e o deixa ausente na 2ª série do 1º ciclo e, no 2º ciclo, toda ela, com exceção da analítica, concentrada no 1º ano.

No início da década de 1960 para atender as novas demandas educacionais e levando em consideração o cenário de desenvolvimento social e econômico do Brasil, é criada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional em 1961 (LDB/61)[15]. Para Pavanello *et al.* (1989, p. 160), as mudanças ocorridas na economia impactaram na educação, principalmente no ensino de matemática: "é o que se percebe num estudo especial do Conselho Federal de Educação de 1963, sobre o ensino de matemática no curso secundário [...]".

Com olhar mais amplo nas recentes mudanças educacionais revela que estas não favoreceram o ensino de Geometria. Isso fica evidenciado na segunda metade do século XX quando o declínio da Geometria no Brasil acentua-se. Uma dessas mudanças surge quando o Movimento da Matemática Moderna (MMM) ganha força no Brasil, a partir de 1960, em meio à criação de alguns grupos de estudos e à chegada dos primeiros livros didáticos sob a influência desse Movimento. As principais características dessa reforma, segundo ÁVILA (1993), "foram uma ênfase acentuada na utilização da linguagem de conjuntos e numa apresentação excessivamente formal das diferentes partes da Matemática."

A educação do Brasil, seguindo tendências de outros países em que o MMM já era uma realidade, passou a adotar suas ideias. Sobre isso Pavanello *et al.* (1989, p. 162) argumenta que

> a influência predominante na introdução da Matemática Moderna no Brasil foi a francesa, como consequência dos cursos ministrados na Universidade (na de São Paulo, principalmente) por matemáticos franceses, nas décadas de 40 e 50. [...] A influência americana começa a se fazer sentir a partir da tradução, para o português, dos trabalhos do SMSG (School Mathematics Study Group), predominando, então por algum tempo. A seguir verifica-se nova influência francesa, quando são divulgados os trabalhos de outros grupos de educadores franceses.

O fato de a matemática proposta pelo Movimento receber orientação para que fosse ensinada sob o ponto de vista das estruturas, causou desconforto aos professores brasileiros. Para a aritmética e a álgebra é mais fácil cumprir essas orientações, porém para a Geometria os desafios eram maiores. A pesar da recomendação dada aos professores

[15] Lei 4024 de 20 de dezembro de 1961.

de matemática ser trabalhar a Geometria sob o enfoque das estruturas, "poucos são os professores, no entanto, que dominam tais assuntos ... e acaba-se por abandonar essa ideia", de acordo com (PAVANELLO *et al.*, 1989, p.164).

Essa reforma à educação proposta pela Matemática Moderna, se expandiu rapidamente e chegou com força no Brasil trazendo esperança de melhoria ao ensino da matemática, não demorou a enfrentar resistência de professores que tiveram dificuldade na prática educativa com os seus alunos, porém, aos poucos, o Movimento perdeu a força. Em consequência imediata do abandono das novas propostas, o ensino de Geometria retrocedeu e não recuperou sequer o espaço possuía na educação do país antes da influência do Movimento.

> Os reformistas contaram, desde o primeiro instante, com adeptos fervorosos e poucos opositores. A maioria dos professores — e mesmo alguns eminentes matemáticos — apoiava as mudanças com entusiasmo. Mas, com o passar do tempo, a ineficácia da Matemática Moderna ia-se tornando mais e mais evidente. Os opositores do movimento foram aumentando em número e contando, cada vez mais, com o apoio de pesquisadores de grande prestígio. Em conseqüência disso, e das muitas críticas que então se faziam à Matemática Moderna, aliadas às evidências da ineficácia dessa orientação para o ensino, novas mudanças começaram a ser feitas, no sentido de corrigir os rumos que vinham sendo seguidos. Na maioria dos países a crise da Matemática Moderna foi superada e já é coisa do passado. No Brasil, entretanto, não obstante os avanços que têm sido feitos nos últimos quinze anos aproximadamente, convivemos ainda com fortes resquícios daquelas idéias dos anos sessenta. (ÁVILA, 1993, p. 1)

Após a promulgação da LDB para o ensino de 1º e 2º graus (Lei 5692/71), o estado de São Paulo, tido como modelo educacional e visto como exemplo de sólida referência de educação para todo o país, divulga o Guia Curricular de Matemática em 1975 com algumas recomendações que desviam os objetivos do ensino de Geometria:

- um curso de geometria intuitiva para as quatro séries iniciais do primeiro grau;
- um estudo de medidas, feito "com muito mais propriedade e maior possibilidade de assimilação num curso de Ciências";
- o estudo, na 5ª série do 1º grau, de geometria servindo de "veículo para a introdução da linguagem da Teoria dos Conjuntos";
- a introdução de estudo de "Geometria pelas Transformações" a partir da 7ª série do 1º grau (PAVANELLO *et al.*, 1989, p. 164).

A autonomia legal concedida às escolas para decidir quais conteúdos trabalhar nos diversos componentes curriculares, aliada à dominante cultura de desvalorização da Geometria que implicou na má formação de professores desse campo do conhecimento, contribuiu para a constituição de um círculo vicioso que atingiu os estudantes das últimas décadas do século passado e cujos efeitos se estendem até os dias atuais. De acordo com Pavanello (1993), isso fez com que:

> [...] muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de incluí-la em sua programação. Por outro lado, mesmo dentre aqueles que continuaram a ensiná-la, muitos reservaram o final do ano letivo para sua abordagem em sala de aula — talvez numa tentativa, ainda que inconsciente, de utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do trabalho programado com o tópico em questão (PAVANELLO, 1993, p. 7).

Além das mudanças na forma de trabalhar a Geometria em sala que exigiam o enfoque nas transformações que geraram transtornos aos professores secundários que em sua maioria não domina o assunto, o amparo expresso no texto da Lei 5692/71 permitindo ao professor adotar o seu próprio programa que, segundo Pavanello *et al.* (1989, p. 165), pode ser "de acordo com as necessidades da clientela", contribuíram para o abandono do ensino de Geometria.

Essas últimas ações que impactaram a educação ratificaram a tendência de desvalorização da Geometria e isso culminou em seu parcial abandono. Sobre isso, Pavanello (1993) argumenta que

> O gradual abandono do ensino da geometria, verificado nestas últimas décadas, no Brasil, é um fato que tem preocupado bastante os educadores matemáticos brasileiros e que, embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas [...]. (PAVANELLO, 1993, p. 7).

Longe do contexto inicial que trouxe a Geometria para o Brasil com finalidades militares, a Geometria escolar passou a figurar em segundo plano na educação brasileira. Ela precisou ressignificar a seu papel na formação do aluno do final do século XX para atender as novas demandas da sociedade.

Atualmente a Geometria ocupa posição de destaque em comparação com as últimas décadas de século XX - como indicam os documentos oficiais, os livros didáticos e exames — após as conquistas que surgiram nos últimos anos, contrasta com a que historicamente foi construída no Brasil. A sociedade escolar ainda vive sob as consequências de um longo período de desvalorização do estudo desse importante componente curricular. Na segunda metade do século passado o cenário educacional era desfavorável ao ensino e à aprendizagem da Geometria. Porém ouve muitos acontecimentos nesse período que ampliaram a concepção e aplicação da geometria.

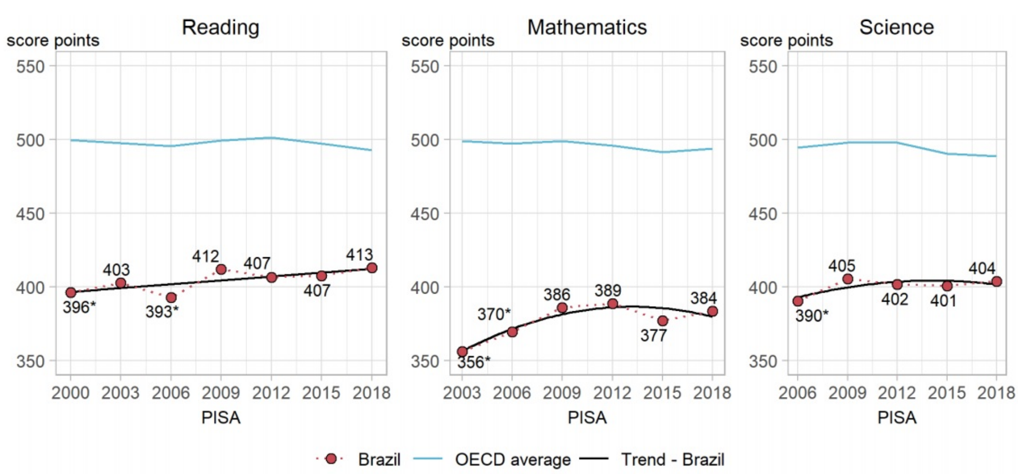
Contudo, ainda há muito oque ser feito pelo ensino de Geometria no Brasil. Indicadores mostram que o ensino de Matemática (que inclui Geometria) ainda enfrenta grandes desafios no Brasil no que se refere a eficiência e qualidade do ensino e aprendizagem. Dados do Programa Internacional de Avalia de Estudantes (Pisa, sigla em inglês), revelam que o Brasil é um dos países que apresentam baixo desempenho em Matemática. O estudo indica que dos 70 países avaliados em 2015, o Brasil ocupa a 66º posição. Essa situação, revelada pelo Pisa sob a coordenação da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), liga o alerta para o despertar para a busca por soluções dos problemas enfrentados por essa área da educação.

Figura 1 – Desempenho do Brasil em Matemática no Pisa

Fonte: <https://g1.globo.com/educacao/noticia/brasil-cai-em-ranking-mundial-de-educacao-em-ciencias-leitura-e-matematica.ghtml> Acessado em 23 de Out. de 2019.

No Pisa de 2018 o número de países participantes foi expandido e saltou de 70 para 80, ainda assim, a posição do Brasil no ranking mundial em Matemática caiu e continua entre as 10 piores.

Figura 2 – Tendências de desempenho em leitura, matemática e ciências



Fonte:OCDE/Pisa

Os dados indicam que a pontuação média do Brasil em Matemática (384) está muito abaixo dos países da OCDE que foi de 489. Ao analisar os resultados de seis edições em Matemática, a OCDE concluiu que o Brasil mantém uma tendência de estagnação.

3 A GEOMETRIA FRACTAL

Desde o final do século anterior o mundo viu surgir, a partir de conjuntos considerados caóticos, uma nova Geometria capaz de descrever vários fenômenos da natureza. Trata-se da Geometria Fractal, assim chamada pelo seu criador Benoit Mandelbrot. Essa nova forma de enxergar o mundo, cada vez mais disseminada, constitui o tema central deste trabalho.

As inúmeras tentativas de provar o quinto postulado de Euclides[1] no início do século XIX fracassaram, mas as reflexões e discussões geradas com esse exaustivo trabalho propiciou o ambiente de nascimento das Geometrias não-euclidianas. Sobre isso, BRAZ (2009, p. 25) destaca que

> Lobachewsky, Gauss e J. Boylai desenvolveram a geometria não euclidiana ao mesmo tempo, mas Lobachewsky foi o primeiro a comunicar suas descobertas [...]. Grandes matemáticos continuaram o estudo da Geometria não-Euclidiana, como Beltrami, Poincare, Klein e Riemann, desenvolvendo o assunto e aplicando em outras áreas da matemática.

No rol das geometrias não-euclidianas está inserida a Geometria Fractal, que embora bem antes da teoria da Geometria Fractal ser estabelecida e os seus resultados apresentados formalmente ao mundo, alguns povos, a exemplo do indiano e egípcio, utilizavam estruturas fractais ainda que de forma inconsciente. As vantagens advindas com a formalização e popularização da Geometria euclidiana são inegáveis,no entanto, no tocante à representação das formas naturalmente construídas, essa Geometria se mostra insuficientemente incapaz. Isso por que, segundo o precursor da Geometria Fractal, Mandelbrot (1983), "Alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou a sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são troncos de cones, árvores não são hexágonos e muito menos os rios desenham espirais".

A Geometria Fractal que nasceu atrelada à jovem Teoria do Caos e destaca-se entre as demais geometrias principalmente pela capacidade de representar a natureza com tanta perfeição e riqueza de detalhes. Segundo Barbosa (2005, p. 10-11):

> Na constituição de nosso mundo, da natureza em geral, por mares e oceanos, separando os continentes e ilhas, com suas costas, suas montanhas

[1] "É verdade que, se uma reta corta duas outras retas formando ângulos internos no mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas se continuadas indefinidamente encontrar-se-ão no lado em que estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos". Uma formulação equivalente e mais conhecida deste postulado, atribuída a John Playfair (1748–1819), é: "Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada." (Claudio Gorodski, 2008, p.18)

> e rios, rochas, plantas e animais, e acimas as nuvens etc., temos componentes com suas formas nas quais dominam a irregularidade e o caos; tentar simplificá-las, empregando formas usuais da clássica geometria euclidiana, como triângulo, círculos, esferas, cones, etc., seria absurdamente inadequado. A geometria dos fractais pode fornecer aproximações para essas formas.

A percepção e concepção das formas fractais da natureza foi uma descoberta fantástica. Um momento de genialidade. Ao mesmo tempo que é complexo ver ordem estabelecida em meio ao aparente caos absoluto, é tão simples olhar à nossa volta e notar a presença de fractais que chegamos a questionar: por que eu não pensei nisso antes?

A palavra fractal é nova em comparação com as formas que a originaram. Benoît Mandelbrot a criou na década de 1970 para representar figuras com certas características “estranhas”. Os relatos históricos indicam que alguns objetos fractais existiam muito antes de receberem esse nome.

Alguns objetos matemáticos com características especiais apareceram no período compreendido entre a última metade do século XIX e a primeira do século seguinte e foram apelidados e assim chamados por muitos anos de “monstros matemáticos”.

No entanto, os fractais apareceram antes disso, mais precisamente no século XVII, quando as pesquisas de Isaac Newton (1643 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716) revelaram que algumas funções eram descontínuas e sem tangente em nenhum ponto e que em outras funções a ideia de tangente não fazia sentido, pois apresentavam a particularidade de mudar bruscamente de direção.

Na segunda metade do século XIX, outras funções com características singulares foram apresentadas. Elas apareceram no trabalho de Karl Weierstrass, em 1870. Elas eram contínuas, porém não diferenciáveis em nenhum ponto. Nesse período, Georg Cantor (1845 – 1918) realizou um trabalho onde desenvolvia um processo que transformava um segmento de reta em infinitos pontos. Destaca-se também o pioneirismo de Giuseppe Peano (1858 – 1932) na construção de uma curva que revestia todo o plano. Além desses trabalhos, nessa mesma época, os estudos sobre o sistema solar e as órbitas dos planetas realizado por Henri Poincaré (1854 – 1912) mostraram que os movimentos dos planetas geravam curvas estranhas que se comportavam caoticamente e suas órbitas eram imprevisíveis e nunca se tornavam periódicas.

A falta de conexão desses estudos e a baixa aceitação entre os matemáticos os deixaram esquecidos por muitos anos. Porém, na segunda metade do século XX, com o desenvolvimento dos trabalhos do francês Benoît Mandelbrot (1924 – 2010) com o apoio da multinacional da informática conhecida pelo acrônimo IBM (International Business Machines Corporation), essa realidade começa a mudar.

As recentes demandas da humanidade para as novas descobertas geométricas fizeram surgir o neologismo fractal que está associado a auto-similaridade.

3.1 Os Fractais

> ***Fractais****, em termos simples, são formas geométricas elementares, cujo padrão pode repetir-se indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam em cada uma de suas partes a singularíssima propriedade de representar o todo* [Grifos nossos] (PIMENTEL; COSTA; URBAN, 2003).

A partir de 1958, Mandelbrot desenvolveu algumas novas ideias matemáticas, entre elas, análise dos ruídos eletrônicos nas linhas telefônicas em redes de computadores e programa de computador para construir gráficos. Ele foi o mentor da palavra fractal e, de acordo com Stewart (1991, p. 234), "Mandelbrot inventou o termo "fractal" para designar um tipo muito diferente de objeto geométrico: aquele que continua a exibir estrutura detalhada ao longo de muitas escalas. De fato, um fractal matemático ideal tem estrutura numa série infinita de escalas". Rooney (2012, p. 146) define fractal como sendo "uma estrutura na qual um padrão é repetido desde larga escala até pequena escala, de maneira que um exame mais próximo da estrutura revela as mesmas figuras ou similares. Há muitas formas quase fractais na natureza, incluindo flocos de neve, árvore, galáxias e ramificações dos vasos sanguíneos".

Os primeiros resultados importantes da investigação de Mandelbrot foram registrados em seus livros *Les objets Fractals, forme, hasard et dimension* e *The Fractal geometry on nature* dos anos de 1975 e 1982, respectivamente.

Etimologicamente a palavra fractais, segundo o seu próprio criador, deriva do adjetivo *fractus* que por sua vez vem do latim e está associado ao verbo *frangere* que significa quebrar (fragmentar, criar fragmentos irregulares). Decorre daí que a expressão "Geometria Fractal" faz referência ao estudo dos fractais.

Os fractais constituem um grupo de objeto com características especias. Alguns membros desse grupo são bastante conhecidos. Aqui apresentamos uns.

3.2 Alguns Fractais Clássicos

Mandelbrot é, por alguns, considerado o pai da Geometria Fractal. Porém, assim como se deu com Euclides, que é considerado o pai da Geometria Plana, que encontrou muitos conhecimentos prévios existentes sobre a Geometria plana, aconteceu com Mandelbrot em relação a Geometria Fractal. Outros matemáticos já haviam criados algumas figuras estranhas que fugiam das definições convencionais da Geometria euclidiana. Como essas figuras estranhas não se encaixarem na Geometria estabelecida, elas foram chamadas de "monstros matemáticos".

3.2.1 Conjunto de Cantor

O "Conjunto de Cantor" (**C**) (também conhecido por "Polvo de Cantor" ou "Poeira de Cantor"), assim chamado em homenagem ao seu descobridor Georg Cantor (1845 - 1918), é provavelmente a primeira figura a ser reconhecida como fractal. Ele representa uma importante peça para o estudo dessa Geometria, embora não tenha a beleza exuberante de outros tantos fractais.

Com base nas descrições apresentadas por Janos (2008), para construir o Conjunto de Cantor considere inicialmente um segmento de reta unitário $[0,1]$ (Figura 3 A).

Faça o processo conhecido como "remoção do terceiro meio" que consiste em dividir o segmento em 3 partes iguais e retirar a parte intermediária. Assim, a figura inicial se resume a dois novos segmentos (Figura 3 B): o primeiro e último terços do segmento inicial.

Em seguida, repete-se o processo de remoção do terceiro meio nos segmentos restantes.

O Conjunto de Cantor é, pois, o conjunto dos pontos que sobram depois de decorrido infinitos processos de remoção do terceiro meio.

A Figura 3 mostra as primeiras iterações da criação do Conjunto de Cantor e ajuda a construir uma ideia intuitiva de sua continuação.

Figura 3 – Conjunto de Cantor

Fonte: autor

3.2.2 Composição do Conjunto de Cantor

Podemos continuar o processo de retirar o terço do meio de cada um dos segmentos existentes e verificar o que sobra. Assim, como mostra a Figura 3, temos:

Inicialmente, em **A**, tínhamos um segmento de comprimento 1.

Em **B** foi removido 1/3 do comprimento do segmento unitário.

Em **C** foram removidos dois segmentos de comprimento 1/9, ou seja, 2/9 do segmento unitário foram removidos com esta ação.

Em **D** foram removidos quatro segmentos de comprimento 1/27, ou seja, foram removidos 4/27 do segmento unitário nessa etapa.

Seguindo este raciocínio, podemos perceber que em **E** a retirada equivale a 8/81 do segmento unitário.

Juntando as remoções realizadas em cada uma das infinitas etapas temos, no total, a seguinte soma (**S**):

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= 1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{9}+4\times\frac{1}{27}+8\times\frac{1}{81}+\ldots\\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{3^4}+\ldots\\
&= \frac{1}{3}\times(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\ldots).
\end{aligned}$$

Observe que a expressão entre parênteses é uma adição cujas parcelas são termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Assim:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times 3=1.$$

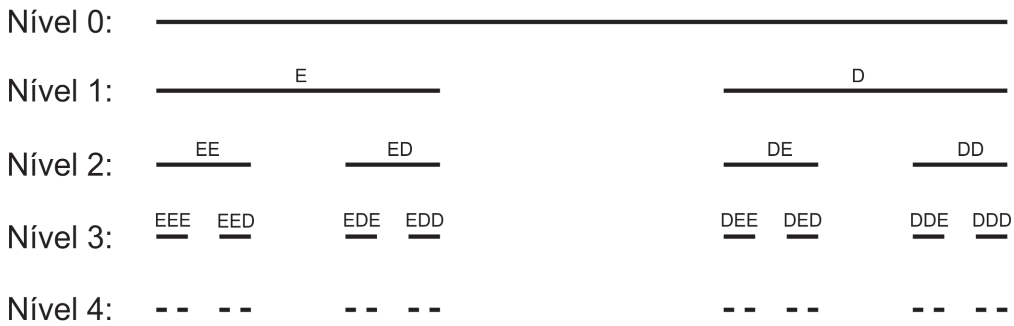
Este resultado sugere que todos os pontos do segmento unitário foram retirados, no entanto, de acordo com Janos (2008, p. 3), "Observando a figura, o leitor será levado a imaginar que certamente sobraram os pontos extremos dos dois intervalos, isto é, ***C*** (*Conjunto de Cantor*) é o conjunto de todos estes pontos".

Na realidade existem outros tantos pontos que não são extremos e, mesmo assim, pertencem ao Conjunto de Cantor. Vejamos:

Organizando um esquema simples, como o proposto por Janos (2008, p. 3-6), localizamos intervalos do segmento unitário onde residem tais pontos.

O Nível 0 da Figura 4 mostra o intervalo [0, 1] com todos os seus pontos, representados pelo segmento unitário. O Nível 1, por sua vez, apresenta o segmento unitário dividido em três partes iguais em que a parte intermediária foi removida e restaram outras duas: uma à esquerda (E) e outra à direita (D).

Figura 4 – Conjunto de Cantor: primeiros níveis de sua formação



Fonte: autor

Dessa forma, um ponto que pertence ao Conjunto de Cantor pode ser identificado através de uma sequência de posições orientadas (E e D) que dão a localização desse ponto.

Observe que cada ponto extremo é representado por uma sequência de combinação finita de E's e D's, seguida de uma sequência infinita de E's ou D's.

Por exemplo:

$EDEDEDDD...$

$DDEDD...$

Pontos com essas características pertencem a **C**, mesmo após infinitas iterações.

3.3 Alguns fractais de Koch

Nesta seção apresentamos o passo-a-passo da construção, em diferentes níveis, acompanhados ilustrações, de objetos geométricos da família dos fractais de Koch.

3.3.1 Curva de Koch

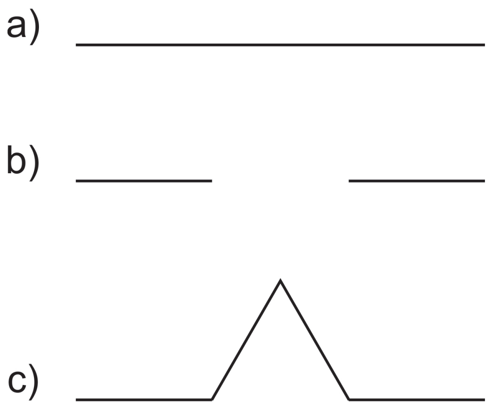
Um importante fractal, sobretudo para os estudos iniciais e compreensão conceitual dessa Geometria, pertencente à família de fractais de Koch e é conhecido como **Curva de Koch**.
O seu processo de construção é simples. Consiste nos seguintes passos:

1. Construa um segmento de reta (a);

2. Divida-o em três partes iguais e elimine a parte intermediária (b);

3. Desenhe um triângulo equilátero utilizando o espaço vão (onde uma das partes fora retirada) como base (imaginária), conforme aparece no item c) da figura abaixo;
4. Em cada um dos quatro segmentos que compõe a figura geométrica do item c) repete-se o processo. E assim sucessivamente.

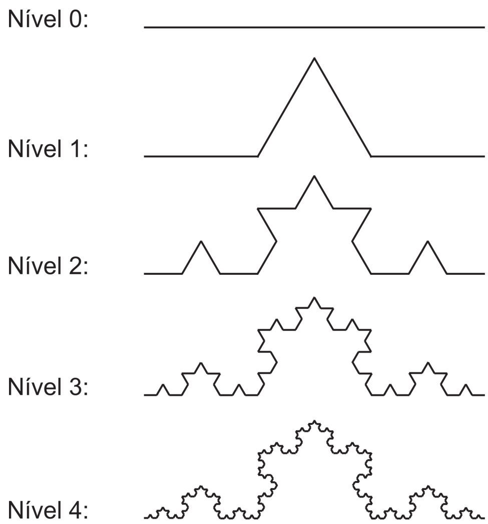
Figura 5 – Processo de construção da Curva de Koch



Fonte: autor

Os primeiros níveis da formação da Curva de Koch aparecem na figura abaixo e revela detalhes através do processo de ampliação cada vez maior (de baixo para cima) das partes desse fractal.

Figura 6 – Curva de Koch



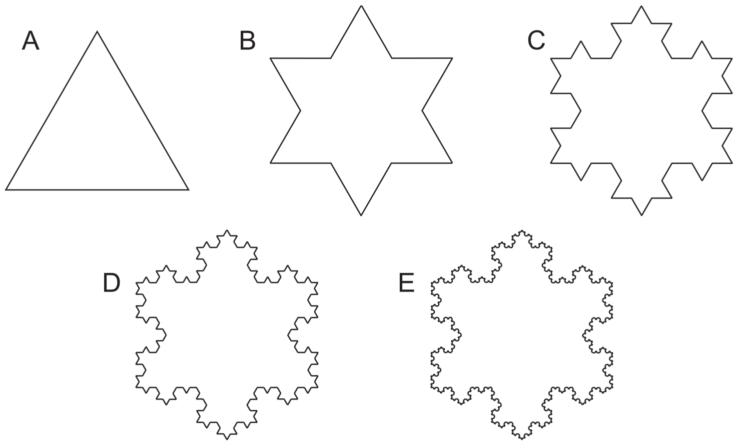
Fonte: autor

3.3.2 Ilha de Koch

O fractal **Ilha de Koch**, também chamado de **Floco de Neve** por sua semelhança com um floco de neve, é uma variação do fractal *Curva de Koch* e é obtido a partir polígono regular. Para construir tal fractal, devemos aplicar, por exemplo, em cada segmento que formam os lados do polígono, o *Nível 1* da Curva de Koch.

Alguns níveis dessa família de fractais estão representados na imagem da figura abaixo. Este fractal foi gerado a partir de um triângulo equilátero que é um dos polígonos que dão base à construção de fractais muito parecidos com algumas formações cristalinas naturais.

Figura 7 – Ilha de Koch: construção a partir de um triângulo equilátero



Fonte: autor

3.3.3 Alguns fractais de Sierpinski

Os **fractais de Sierpinski** constituem um grupo de fractais que destacam tanto pela beleza que suas formas assumem quanto pela empregabilidade em outros conceitos matemáticos da educação básica como área, comprimento, perímetro, simetria e limite. Apresentamos aqui alguns representantes da família de fractais de Sierpinski.

3.3.3.1 Triângulo de Sierpinski

Os primeiros níveis do Triângulo de Sierpinski são frequentemente vistos envolvidos em problemas matemáticos. A criação desse tipo de fractal se dá por um processo denominado de **criação por remoção**.

a) Partimos de um triângulo equilátero (A);

b) Marcamos os pontos médios de cada um de seus lados e os ligamos, formando assim 4 triângulos equiláteros congruentes;

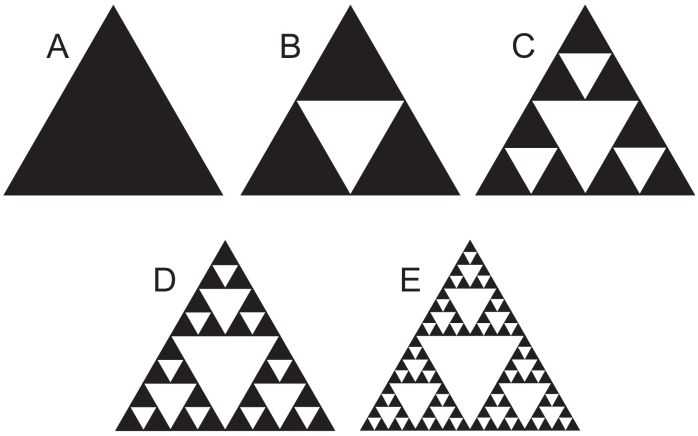
c) Removemos o triângulo central cujos vértices são os pontos médios marcados anteriormente (B);

d) Em cada um dos triângulos remanescentes repetimos os passos 2 e 3, (C);

e) Repetimos sucessivamente o passo 4.

A figura abaixo mostra as primeiras iterações da construção do Triângulo de Sierpinski a partir do nível 0 (A) até o nível 4 (E).

Figura 8 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: autor

3.3.3.2 Tapete de Sierpinski

Apresentamos aqui outro importante fractal da família Sierpinski. Ele é criado pelo mesmo processo do Triângulo de Sierpinski, porém partindo de outro polígono: o quadrado.

a) Partimos de um quadrado (A);

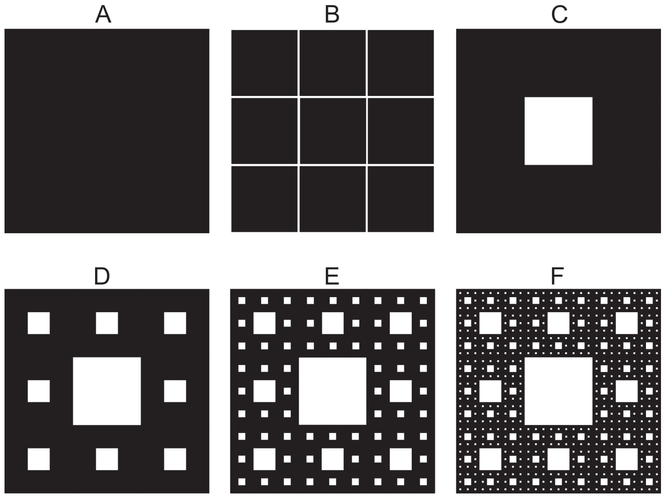
b) Dividimos cada lado em 3 partes iguais, marcamos os pontos 1/3 e 2/3, e ligamos aos pontos correspondentes do lado oposto, formando assim 9 quadrados congruentes (B);

c) Removemos o quadrado central (C);

d) Em cada um dos quadrados remanescentes repetimos os passos 2 e 3, (D);

e) Repetimos sucessivamente o passo 4.

Figura 9 – Tapete de Sierpinski



Fonte: autor

Observação: A inserção da imagem B na (Figura 9) com as linhas que destacam os 9 quadrados que a compõe, foi feita para auxiliar a visualização do processo de construção do fractal.

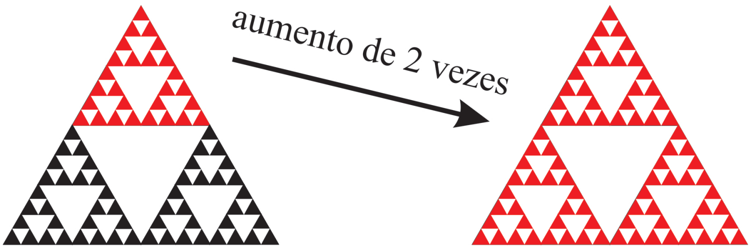
3.4 Autossimilaridade

Um objeto autossimilar é assim dito matemática quando é semelhante a uma parte de si mesmo. Essa semelhança pode ser exatamente ou aproximadamente. A autossimilaridade (ou auto-semelhança, como alguns autores denominam) é uma propriedade dos fractais. No mundo real, muitos objetos têm essa propriedade da autossimilaridade.

Segundo Janos (2008, p. 45), "o termo auto-semelhança é, intuitivamente, bastante claro e auto-explicativo. Entretanto, não é tão fácil dar uma definição matematicamente precisa de auto-semelhança". De qualquer forma, a noção intuitiva "bastante clara" atende ao propósito do presente trabalho.

Um fractal matemático, diferente de um fractal natural, tem autossimilaridade infinita. Consideremos o famoso Triângulo de Sierpinski para exemplificar a propriedade. Se tomarmos, por exemplo, a parte superior da Figura 10, imediatamente acima do triângulo grande branco do centro do fractal e aumentemos com um fator de escala de 2, surge um novo triângulo idêntico ao triângulo inicial.

Figura 10 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: autor

Como este é um fractal que tem autossimilaridade total, podemos encontrar uma cópia reduzida do todo, próximas a todos os pontos desse fractal.

3.5 Dimensões Fractais

3.5.1 Dimensão topológica

Os conceitos matemáticos de dimensão da Geometria euclidiana foram consolidados há muitos anos e estão relacionadas a comprimento, largura e altura de figuras geométricas. A ausência de dimensão de uma figura a torna degenerada e a sua representação geométrica é um ponto (elemento da Geometria desprovido de dimensão), nesse caso dizemos que ela tem *dimensão 0*. A *dimensão 1*, representada geometricamente por uma reta, apresenta apenas a dimensão relacionada a comprimento, que é tido como a primeira dimensão. O plano é o local geométrico associado às figuras bidimensionais, isto é, *dimensão 2*. Grande quantidade de estudos da Geometria é realizada nessa dimensão. A última dimensão de que trata a Geometria euclidiana é a *dimensão 3*. Os sólidos geométricos (figuras espaciais), como o pirâmides, prismas, paralelepípedos e esfera, precisam do espaço tridimensional para serem representadas.

Estas dimensões constituem a chamada **dimensão topológica** (dimensão euclidiana), que por sua vez está associada ao número que representa a dimensionalidade do espaço onde certo objeto geométrico se encontra.

Observe que os números assumidos pela dimensão topológica é sempre inteiros.

3.5.2 Dimensão fractal

De acordo com Ricieri (1990),

> As geometrias tradicionais limitam-se a descrever apenas as superfícies e curvas lisas. No entanto, muitos elementos da natureza, como as montanhas, as árvores e as nuvens possuem irregularidades, ou seja, são fragmentados. (RICIERI, 1990, p. 88)

O que chamamos atualmente de *dimensão fractal*, inicialmente era chamada de *dimensão Hausdorff-Besicovitch*, em referência aos nomes de seus inventores, os matemáticos Felix Hausdorff (1868 - 1942) e Abram Besicovitch (1891 - 1970). Em 1918, Hausdorff definiu a dimensão de uma curva fractal como sendo o número D que satisfaz a relação $K = n^D$.

3.5.2.1 A ideia por trás da dimensão fractal

Partindo do conceito de dimensão tradicionalmente usado na Geometria regular podemos chegar à ideia de dimensão fractal. Mais que isso, concluímos que a dimensão topológica é um caso particular da dimensão fractal.

Figura 11 – Representação geométrica do ponto P

Fonte: autor

Enquanto na Geometria regular as figuras são divididas de acordo com a sua dimensão (0, 1, 2 ou 3), na Geometria fractal cada figura pode ter a sua própria dimensão (não necessariamente inteira).

Considere um segmento de reta AB. Dividimos-o em uma quantidade K de partes iguais. Por exemplo, $K = 3$, como mostra a imagem (II) da Figura 12. Cada uma dessas 3 partes tem comprimento igual a 1/3 do segmento AB.

De modo geral, toda a imagem (I) da Figura 12, que é o segmento AB, foi dividida em K partes iguais e o seu comprimento ficou dividido em n partes iguais, cada uma delas de comprimento igual a $1/n$ do comprimento de AB.

Observe que a seguinte relação é válida para a situação descrita acima:

$$K = n^D$$

$$3 = 3^D \Rightarrow D = 1$$

Em que D é a dimensão da figura. De fato o segmento de reta tem dimensão 1.

Figura 12 – Segmento de reta

Fonte: autor

Considere agora um quadrado. Dividindo-o em 9 partes iguais (como mostra a Figura 13 B), ou seja, $K = 9$, o comprimento do quadrado original fica dividido em 3 partes iguais ($n = 3$). Daí temos que

$$K = n^D$$

$$9 = 3^D \Rightarrow D = 2$$

que é, sabidamente, a dimensão do quadrado.

Figura 13 – Quadrado

Fonte: autor

Continuando esse raciocínio, vamos considerar um cubo. De forma análoga, dividindo-o em, por exemplo, 27 partes iguais (como aparece na Figura 14 B), ou seja, $K = 27$, o comprimento do cubo original fica dividido em 3 partes iguais, isto é, $n = 3$. Daí, novamente verificamos que a relação

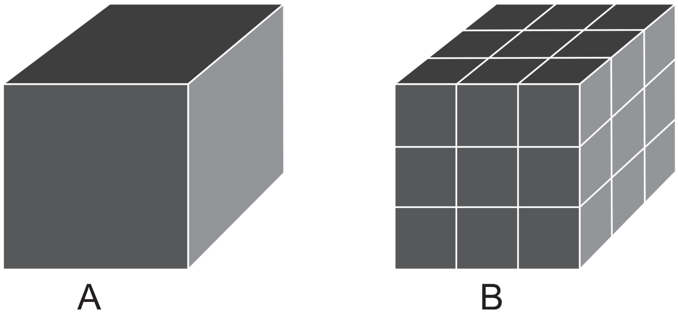
$$K = n^D$$

também é verdadeira para a dimensão do cubo, pois

$$27 = 3^D \Rightarrow D = 3$$

e, como sabemos, o cubo pertence ao espaço tridimensional.

Figura 14 – Cubo



Fonte: autor

Dita informalmente, a **dimensão fractal** pode ser vista como uma forma de representar o grau de rugosidade de um fractal.

Seja D(S) a dimensão fractal de um conjunto autossimilar [2] S.

Segundo Janos (2008, p. 71), a dimensão fractal é dada por

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)}$$

De fato. Da relação

$$K = \frac{1}{n^{D(S)}} \Rightarrow K = (\frac{1}{n})^{D(S)}$$

obtemos, aplicando logaritmo em ambos os membros da equação e manipulando o resultado, uma expressão para a dimensão do objeto.

Sendo que:

$D(S)$: dimensão fractal do objeto S em estudo;
K: número de partes que o objeto foi dividido;
n: coeficiente de redução.

Então:

$$ln(K) = ln(\frac{1}{n})^{D(S)} \Rightarrow ln(K) = D(S) \cdot ln(\frac{1}{n}) \Rightarrow D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)}$$

[2] A autossimilaridade "é uma das características dos fractais de apresentar cópias de si mesmo em seu interior em diferentes tamanhos. Uma pequena parte é semelhante ao todo, ou seja, uma fração de um fractal é uma réplica do todo" (SILVA; SOUZA, 2010, p. 3)

3.5.3 Dimensão de alguns fractais

Vejamos a dimensão de alguns fractais:

1. Segmento de reta

O segmento de reta (Figura 12) foi dividido em 3 segmentos iguais de comprimento 1/3, ou seja, $K = 3$ e $n = 1/3$. Assim,

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(3)}{ln(1/(1/3))} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(3)}{ln(3)} \Rightarrow D(S) = 1.$$

2. Quadrado

O quadrado de lado de comprimento 1 (Figura 13) foi dividido em 9 quadrados iguais de lado de comprimento 1/3, ou seja, $K = 9$ e $n = 1/3$. Portanto,

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(9)}{ln(1/((1/3))} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(9)}{ln(3)} \Rightarrow D(S) = 2.$$

3. Cubo

O cubo de aresta de comprimento 1 (Figura 14) foi dividido em 27 cubos iguais de aresta de comprimento 1/3, isto é, $K = 27$ e $n = 1/3$. Dessa forma, temos

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(27)}{ln(1/(1/3))} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(27)}{ln(3)} \Rightarrow D(S) = 3.$$

Observe que um segmento de reta, um quadrado e um cubo têm as propriedades que os caracterizam como fractais. Podemos inferir dos resultados da aplicação do método de Hausdorff-Besicovitch que a dimensão topológica é um caso particular da dimensão fractal.

4. Conjunto de Cantor

Figura 15 – Conjunto de Cantor

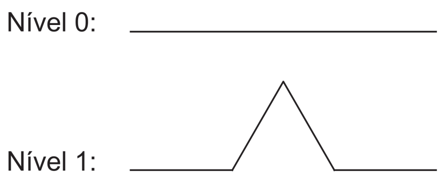
Fonte: autor

Para calcular a dimensão da Conjunto de Cantor verificamos inicialmente que o segmento do *Nível 0* de comprimento unitário foi substituído, no nível seguinte (*Nível 1*), por dois segmentos de comprimento 1/3. Ou seja, $K = 2$ e $n = 1/3$. Portanto,

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(2)}{ln(1/(1/3))} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(2)}{ln(3)} \Rightarrow D(S) \approx 0,63.$$

5. Curva de Koch

Figura 16 – Curva de Koch



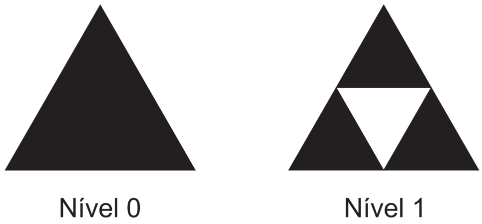
Fonte: autor

Para efetuar o cálculo da dimensão da Curva de Koch verificamos inicialmente o comportamento da construção do fractal de um nível para o seguinte. Observe que o segmento do *Nível 0* de comprimento unitário foi substituído, no *Nível 1*, por quatro segmentos de comprimento igual a 1/3. Portanto, $K = 4$ e $n = 1/3$. Daí,

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(4)}{ln(1/(1/3))} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(4)}{ln(3)} \Rightarrow D(S) \approx 1,26.$$

6. Triângulo de Sierpinski

Figura 17 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: autor

No Triângulo de Sierpinski, o triângulo do *Nível 0* de lado medindo 1, foi substituído por três triângulos no *Nível 1* de lado medindo 1/2. Ou seja, $K = 3$ e $n = 1/2$. Portanto,

$$D(S) = \frac{ln(K)}{ln(1/n)} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(3)}{ln(1/(1/2))} \Rightarrow D(S) = \frac{ln(3)}{ln(2)} \Rightarrow D(S) \approx 1{,}58.$$

Como vimos, a dimensão usada na Geometria Fractal se diferencia da Geometria euclidiana, principalmente por extrapolar os limites do conjunto dos números inteiro, mas também porque cada objeto fractal poder ter a sua própria dimensão. Isso nos faz refletir e ampliar o conceito de dimensão de objetos geométricos que conhecemos de outras geometrias.

Os fractais, algumas das suas características e propriedades, seus processos de formação, um pouco da história de sua constituição como elemento importante para a ciência e a Geometria que os estuda foram apresentados aqui para nos fornecer subsídios suficientes para colocá-los a serviço do ensino de Matemática.

4 FRACTAIS: ABORDAGENS NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentaremos como sugestão e como exemplos que servem de modelo, algumas atividades da disciplina de Matemática e/ou de Geometria no Ensino Médio, que usam algum fractal envolvendo o problema ou a sua solução.

Fractal é uma linguagem matemática que vem sendo cada vez mais usada para descrever fenômenos da natureza, padrões e para auxilar no ensino de diversos conteúdos matemáticos. SMOLE e DINIZ (2016) usam as ideias de fractais em seu livro *Matemática para Compreender o Mundo*, para introduzir alguns conteúdos matemáticos para o Ensino Médio. Algumas abordagens usadas por elas serão apresentadas aqui com as adaptações que atendam a proposta desse trabalho. A exemplo disto, temos, como seguem, atividades com alguns fractais cujos nomes são conhecidos: Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski, Floco de neve de Koch, Árvore Fractal.

A Geometria Fractal permite a construção de uma infinidade de objetos fractais. Dessa forma, exitem outras tantas possibilidades de uso da Geometria Fractal na sala de aula para fins diversos. As atividades apresentadas neste capítulo têm a finalidade de introduzir conceitos matemáticos, auxiliar na resolução de problemas, assim como de desenvolver o pensamento geométrico no ensino médio.

Os fractais envolvidos nas atividades seguintes são fractais artificiais, embora os produzidos pela natureza também apresentam grande potencial de utilidade. A Geometria Fractal, apesar de ser nova, está cada vez mais popularizada. A sua presença, ainda que tímida, porém crescente, nos livros didáticos mostra a sua importância.

Antes de realizar as atividades propostas, os alunos precisam conhecer os conceitos básicos dos fractais, assim como as suas principais características e, em alguns casos, seus padrões de formação. Buscamos aqui introduzir e/ou desenvolver conceitos matemáticos de conteúdos como: relações entre grandezas (funções), sequências, progressão aritmética, progressão geométrica, limite, perímetro, área e probabilidade.

Atividade 1: Introdução dos conceitos de função com o Triângulo de Sierpinski

Os padrões geométricos descritos pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969) na formação da figura conhecida como **Triângulo de Sierpinski**, constituem como uma importante ferramenta no ensino, não apenas da Geometria, mas também mais amplamente que a própria matemática.

Figura 18 – Primeiras etapas da construção do Triângulo de Sierpinski

Fonte: autor

Observando o número de triângulos que compõe o tapete em cada etapa do processo de construção, podemos refletir sobre algumas situações:

a) Qual a quantidade de triângulos pretos em cada uma das etapas apresentadas?

b) Você consegue observar alguma regularidade?

c) Escreva uma sequência de potências de mesma base para representar a quantidade de triângulos pretos obtida em cada etapa apresentada.

d) Sem desenhar a figura da 6ª etapa da construção do triângulo de Sierpinski, escreva uma potência que represente a quantidade de triângulos pretos que terá essa figura. Depois, resolva essa potência e indique essa quantidade.

e) Você acha que é possível desenhar todos os triângulos da décima etapa?

f) O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Aqui os alunos são conduzidos a algumas reflexões que ajudarão a formar conceitos importantes de sequências, funções, potências e padrões, por exemplo. Evidentemente, a figura em questão (Tapete de Sierpinski) pode ser mais explorada, a depender do contexto da turma.

Os dados iniciais do processo de construção do tapete estão organizados na Tabela 1 e mostram que a relação entre cada etapa e o número de triângulo é uma função. Observe:

Tabela 1

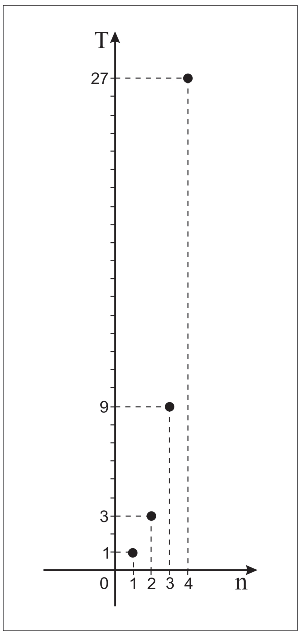
Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Relação entre as etapas e o número de triângulos em cada uma delas

Representando com a letra **T** o número de triângulos existentes na etapa de número **n**, podemos calcular o valor de **T** por meio da igualdade $\mathbf{T} = 3^{n-1}$, em que **n** é qualquer número natural maior ou igual a 1.

Também é possível construir um gráfico que mostre a relação entre **T** e **n**. Observe:

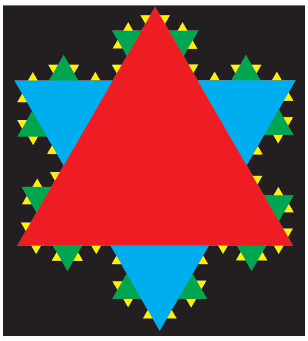
Figura 19 – Representação da relação entre etapa e número de triângulos



Fonte: autor

Atividade 2: Introdução dos conceitos de sequências e progressões com o auxílio da curva do floco de neve de Koch

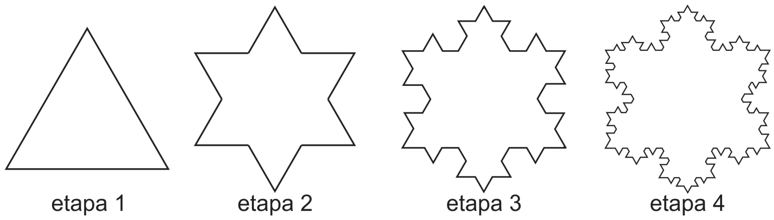
Figura 20 – Curva do Floco de Neve de Koch



Fonte: autor

Curva do floco de neve de Koch, como é conhecido o fractal que está sendo gerado na Figura 21, foi obtida em 1904 pelo matemático Helge Von Koch (1870-1924) a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero de lado de medida 1. A ideia por trás da construção da curva de Koch pode se associar ao estudo de sequências, progressões aritméticas e geométricas, introduzindo conteúdos e desenvolvendo os conceitos envolvidos.

Figura 21 – Primeiras etapas da construção da curva do floco de neve de Koch



Fonte: autor

Ao observar o processo de construção da curva do floco de neve de Koch, podemos refletir sobre as seguintes questões:

a) Você consegue observar alguma regularidade?

b) Você consegue descobrir como as figuras das etapas 2, 3 e 4 foram obtidas a partir da figura da etapa 1?

c) A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números. Como podemos descrever essa sequência?

Os dados iniciais do processo de construção do floco de neve estão organizados na Tabela 2 e relacionam as etapas com o número de lados. Observe:

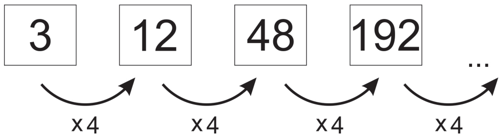
Tabela 2

Etapa	1	2	3	4	...
Número de lados do polígono	3	12	48	192	...

Relação entre as etapas e o número de lados da linha poligonal

Observe que a sequência formada pelo número de lados da linha poligonal constitui uma progressão geométrica em que o primeiro termo é 3 e a razão é 4.

Figura 22 – Sequência formada pelo número de lados da curva do floco de neve de Koch

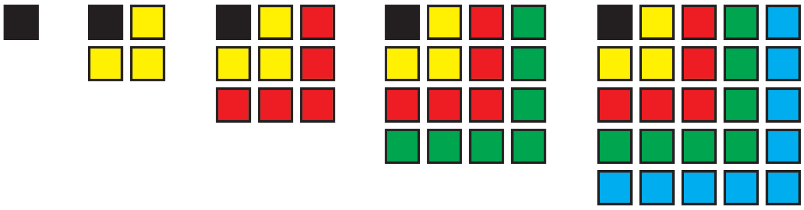


Fonte: autor

Atividade 3: Introdução às ideias de sequência e soma dos termos de uma sequência

Observe a sequência de figuras.

Figura 23



Fonte: autor

a) Copie a sequência e obtenha o seu 6º termo.

b) Quantos quadradinhos você desenhou no total, do 1º ao 6º termo?

c) Quantos quadradinhos você terá desenhado no total quando construir o 10º termo da sequência? E o 12º termo?

d) Uma aluna, ao resolver esse problema, disse: "Ah! Esse desenho dá a soma dos primeiros números ímpares". O que você pensa disso?

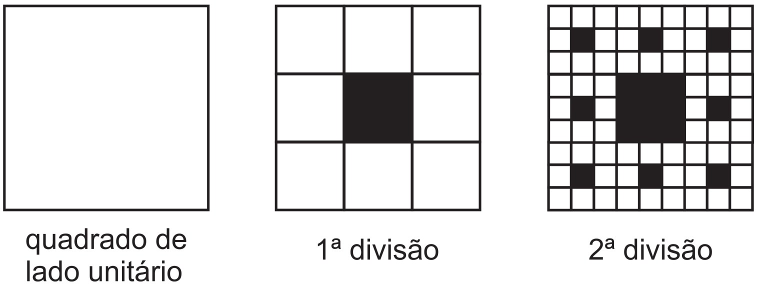
e) Um aluno afirmou: "Que nada, essa sequência gera os quadrados perfeitos". Qual dos dois tem razão?

Atividade 4: Introdução às ideias de soma dos termos de uma sequência

(Unesp-SP) [com adaptações] Divide-se, inicialmente, um quadrado de lado com medida unitária em 9 quadrados iguais, traçando-se dois pares de retas paralelas aos lados. Em seguida, remove-se o quadrado central. Repete-se esse processo de divisão, para os quadrados restantes, **n** vezes.

Observe o processo para as duas primeiras divisões.

Figura 24



Fonte: autor

O início da formação do fractal que está sendo gerado na Figura 23, fornece a ideia que permite continuar o processo e refletir sobre algumas questões:

a) Quantos quadrados restarão após as **n** divisões sucessivas do quadrado inicial?

b) Qual é a soma das áreas dos quadrados removidos, quando **n** cresce indefinidamente?

Atividade 5: Identificação de padrão, soma dos termos de uma progressão geométrica

Uma árvore cresceu durante três anos seguindo o padrão de crescimento esquematizado abaixo.

Figura 25

Fonte: autor

a) Qual é a finalidade do esquema de padrão de crescimento da árvore nesta atividade?

b) Quantos galhos novos surgirão no 10º dia?

c) Quantos galhos haverá ao todo no 8º ano?

Atividade 6: Representação de probabilidades

Em uma família com 4 filhos:

a) Qual é a probabilidade de serem todos meninos?

b) Qual é a probabilidade de serem dois meninos e duas meninas?

Resolução:

A visualização da solução deste problema torna-se facilitada com o auxílio de um fractal aqui denominado de *árvore de possibilidades*.

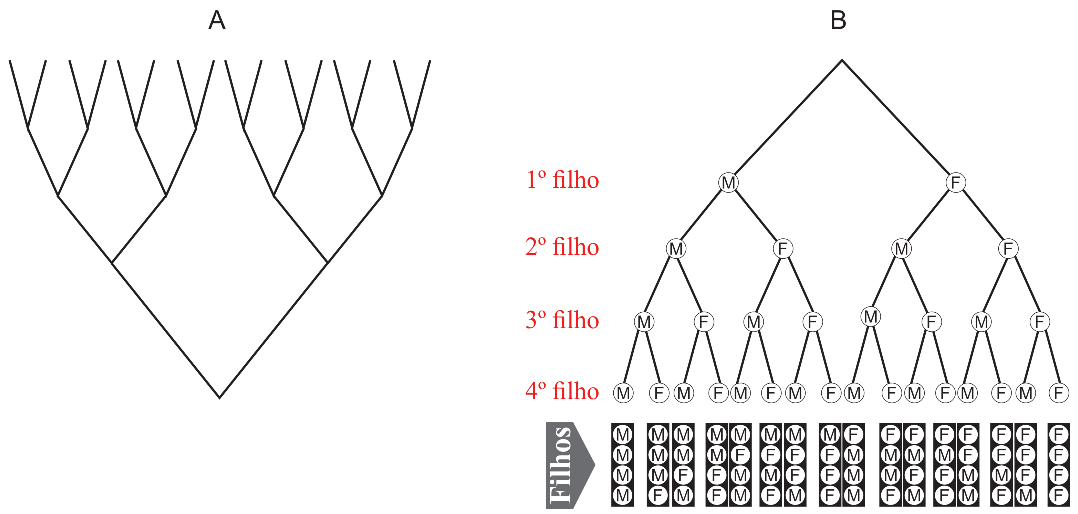
a) Para resolver esse problema, vamos admitir a hipótese de que a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino é igual à de nascer uma do sexo feminino, isto é, 50% para cada caso.

Para facilitar a visualização de todos os casos possíveis, podemos fazer um diagrama de árvore (que é um fractal).

A Figura 26-A foi rotacionada no sentido anti-horário em 180 graus, obtendo assim a Figura 26-B, que apresenta visualmente as possibilidades que compõem o espaço amostral.

De acordo com o sexo, masculino ou feminino, usaremos as letras **M** e **F**, respectivamente. Essas letras são usadas para marcar as interseção de dois galhos a partir do 1º filho, representando o sexo da criança. Veja o esquema a seguir:

Figura 26 – Diagrama de árvore (Árvore de possibilidades)



Fonte: autor

Observe como o fractal em forma de árvore (Figura 26-A) pode ajudar a visualizar a solução para o problema proposto.

Analisando o diagrama (Figura 26-B), vemos que para o 1º filho há duas possibilidades: **M** e **F**. A partir do 2º filho, independente do sexo da criança anterior, também há essas duas possibilidades. Portanto, nas quatro etapas teremos 16 (ou 2^4) casos possíveis e equiprováveis de nascimento. Desses, apenas 1 corresponde ao evento "serem todos meninos".

Portanto, a probabilidade de serem todos meninos é de $1/16$ ou $6,25\%$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em consequências dos estudos, percebemos que a Geometria Fractal oferece ampla possibilidade de aplicabilidade na Educação Básica, em particular no Ensino Médio, desde o apelo visual, ocasionado pela combinação das formas e cores, à formação de padrões que são importantes para o desenvolvimento do raciocínio que conduz às soluções de alguns problemas matemáticos.

Podemos perceber que o estudo de fractais direcionado aos alunos do Ensino Médio permite algumas possibilidades educacionais no ensino de vários conteúdos matemáticos, auxiliando o processo de ensino como ferramenta pedagógica e servindo de suporte para revisão de conceitos da Geometria Euclidiana.

A realização da pesquisa justifica-se pela necessidade de buscar métodos de ensino para o desenvolvimento da aprendizagem matemática ao mesmo tempo em que contempla conteúdos mais recentes na área da Matemática.

O contexto histórico de criação e desenvolvimento de um conteúdo geométrico e do seu ensino, pode ajudar ao professor a estabelecer relações entre um determinado tema e o contexto do aluno, possibilitando o (re)direcionamento das ações pedagógicas.

A aproximação com a Geometria Fractal nos permitiu relacionar os fractais com conteúdos matemáticos, nos revela que há muito o que ser explorado nesse ramo da matemática. Nesse sentido, indicamos e sugerimos aos professores do (principalmente de Matemática e de Geometria) do Ensino Médio, parceria na continuação da investigação de novas formas de aplicação dos fractais nessa modalidade de ensino, com a finalidade de ajudar os alunos conquistarem as “aprendizagens essenciais” defendida pela BNCC e avançar nos estudos.

A limitação imposta pelo tempo na realização dessa pesquisa impediu que a proposta de abordagem da Geometria Fractal fosse posta em prática antes de sua apresentação, porém os resultados obtidos com a execução das atividades propostas podem servir para nortear futuros estudos e debates na próprias escolas com alunos e professores.

Referências

ÁVILA, G. O ensino da matemática. **Revista do Professor de Matemática**, v. 23, p. 1–7, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

AZEVEDO, F. d. **A transmissão da cultura; parte terceira da 5ª.ed. de A cultura brasileira**. [S.l.]: Ed. Melhoramentos, 1958. Citado 1 vezes nas páginas 25.

AZEVEDO, M. D. Moreira de. **Apontamentos Históricos**. Rio de Janeiro: B. L. Garnier, 1881. Citado 1 vezes nas páginas 23.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal-para a sala de aula**. [S.l.]: Autêntica, 2005. Citado 1 vezes nas páginas 32.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 15.

BRASIL, M. da E. **Base nacional comum curricular: educação é a base**. [S.l.]: MEC Brasília, DF, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 16, 17 e 19.

BRASIL, M. da Educação. Secretaria de Educação Média e T. **PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. [S.l.]: Ministério da Educação Brasília, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 19.

BRAZ, F. M. História da geometria hiperbólica. **Especialização em Matemática para Professores)-UFMG. Belo Horizonte**, 2009. Citado 1 vezes nas páginas 32.

BULOS, A. M. M. O ensino da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental. **XIII CIAEM–IACME, Recife, Brasil**, 2011. Citado 1 vezes nas páginas 17.

DAINVILLE, F. d. L'éducation des jésuites: Xvi-xviii siècles. Paris: Les Éditions de Minuit, 1978. Citado 1 vezes nas páginas 20.

EVES, H. **Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H**. 2004. Citado 1 vezes nas páginas 15.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática: representação e construção em geometria**. [S.l.]: Artes Médicas Sul, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

FILHO, A. M. D. L. R. O ensino artístico. **In Revista do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro**, n. 239, abril/junho, 1958. Citado 1 vezes nas páginas 21.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. 1. ed. Rio de Janeiro: Edgar Blucher, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 41 e 45.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. [S.l.]: WH freeman New York, 1983. v. 173. Citado 1 vezes nas páginas 32.

MENESES, R. S. d. **Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino. 2007. 172 f.** Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 24.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 29.

PAVANELLO, R. M. *et al.* O abandono de ensino de geometria: uma visão historica. [sn], 1989. Citado 5 vezes nas páginas 25, 26, 27, 28 e 29.

PIMENTEL, H.; COSTA, W. V.; URBAN, P. **Fractais da história: a humanidade no caleidoscópio**. [S.l.]: Madras, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 34.

RICIERI, A. P. **Fractais e Caos: a matemática de hoje**. [S.l.]: Prandiano, 1990. Citado 1 vezes nas páginas 42.

ROONEY, A. **A História da Matemática: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 34.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de geometria: Rumos da pesquisa (1991-2011) teaching geometry: Research directions (1991-2011). **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 138–155, 2013. Citado 1 vezes nas páginas 21.

SILVA, M. M. da; SOUZA, W. A. de. Dimensão fractal. **Revista Eletrônica de Matemática**, n. 2, 2010. Citado 1 vezes nas páginas 45.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo**. [S.l.]: São Paulo: Saraiva, 2016. Citado 1 vezes nas páginas 49.

STEWART, I. **Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991. Citado 1 vezes nas páginas 34.

TELLES, P. C. S. **História da engenharia no Brasil: séculos XVI e XIX**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984. Citado 1 vezes nas páginas 21.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. 2. ed. São Paulo: Annablume : FAPESP, 1999. v. 103. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 21, 23 e 24.