UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LUIZ ANTONIO DE ASSIS MACHADO

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLÍGONOS REGULARES.

ARRAIAS-TO
2019

LUIZ ANTONIO DE ASSIS MACHADO

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLÍGONOS REGULARES.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.^{a} Dr^a. Alcione Marques Fernandes.

ARRAIAS-TO

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

A848c Assis Machado, Luiz Antônio de .

Construções Geométricas Com Régua e Compasso: Uma Proposta Didática Para o Ensino de Polígonos Regulares . / Luiz Antônio de Assis Machado. – Arraias, TO, 2019.

75 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2019.

Orientadora : Alcione Marques Fernandes

1. Origem de Uma Geometria Formal. 2. Entes Geométricos e Construções Geométricas. 3. Sequencia Didática. 4. Proposta Didática. I. Título

CDD 510

LUIZ ANTONIO DE ASSIS MACHADO

CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA COM RÉGUA E COMPASSO: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE POLÍGONOS REGULARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins-UFT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pela Orientadora e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 16 / 09 / 2019

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Alcione Marques Fernandes - UFT
Orientadora-Presidente

Dr. Elielson Ribeiro de Sales – UFPA/IEMCI
Examinador Externo (via videoconferência)

Eudes Alves

Dr. Eudes Antonio da Costa – UFT/Matemática
Examinador Interno

Arraias - TO
2019

Dedico este trabalho a pessoa que mais me inspira e me faz ser mais dedicado em todas as minhas atividades profissionais e pessoais, Isabela Espíndola Machado.

AGRADECIMENTOS

A minha mãe, em especial, por tudo que fez e continua a fazer por mim e que me inspira a ser cada dia uma pessoa melhor;

A todos os meus familiares pela compreensão e paciência;

Aos professores do PROFMAT/UFT/ARRAIAS, em especial, a minha orientadora, Alcione por acreditar em mim e também grande incentivadora deste trabalho.

A todos os professores que tive durante minha vida acadêmica, os quais me auxiliaram durante toda para que chegasse a essa realização pessoal;

A todos os colegas de trabalho e deste programa PROFMAT, que muito me ajudaram no decorrer desse período de dedicação; enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a elaboração deste trabalho.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Apresentamos nesta dissertação uma proposta de ensino embasada na sequência didática, sustentada por Zabala(1998) que teve como objetivo trazer uma nova possibilidade no ensino da matemática no que tange a construção geométrica de alguns Polígonos regulares: Quadrado inscrito, Pentágono Inscrito e Hexágono Inscrito com o auxílio da régua não graduada e compasso. Afim de se cumprir os objetivos fez-se necessário uma breve abordagem histórica, sobre a origem das construções geométricas, trouxe de forma objetiva os entes geométricos (mediatriz, bissecção de um Ângulo, arco capaz,encentro e circuncentro), bem como desenvolveu-se as construções geométricas das figuras ditas anteriormente. Passando então para a realização da proposta da sequência didática compreendida em 8(oito) aulas de 50 minutos cada que proporcionaram uma alternativa para o ensino de matemática com sugestões e ideias de ministração para cada aula, assim tecendo uma reflexão sobre a postura do docente em sala e principalmente ampliando o leque para o ensino de matemática.

Palavras-chave: Construções geométricas. Polígonos regulares. Sequência didática.

ABSTRACT

We explain in this dissertation a teaching proposal based on the didactic sequence, supported by Zabala (1998) that aimed to bring a new possibility in the teaching of mathematics regarding the geometric construction of some regular polygons: Enclosed Square, Enclosed Pentagon and Enclosed Hexagon. the aid of the ungraded ruler and compass. In order to fulfill the objectives, a brief historical approach was necessary, about the origin of the geometric constructions, objectively brought the geometric entities (mediatrix, bisection of an Angle, capable arch, center and circumcenter), as well as developed the geometric constructions of the figures mentioned above. Moving on to the realization of the proposal of the didactic sequence comprised in 8 (eight) 50- minute classes each that provided an alternative to the teaching of mathematics with tips and ideas of teaching for each class, thus weaving a reflection on the posture of the teacher in room and mainly broadening the range for teaching math.

Key words: Geometric constructions. Regular polygons. Following teaching.

Lista de ilustrações

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao fazermos uma investigação sobre a origem e os conceitos de construções geométricas, é possível percebermos que esta área do conhecimento norteou a sociedade a conseguir realizar construções exatas, não só na matemática como também na vida prática, e isso segue até os dias atuais em vários aspectos do cotidiano, no planejamento de construções precisas. Analisando as possibilidades das construções geométricas e principalmente das construções de polígonos regulares, revelou-se a importância de elaborar esse trabalho, que busca criar uma alternativa com a intenção de auxiliar a atuação do professor de matemática em sala de aula, com o tema: *Construção Geométrica com Régua e Compasso: Uma proposta didática para o ensino de Polígonos regulares.*

Quando tratamos da perspectiva da sequência didática para o Ensino de Matemática é inquestionável a presença de tabus, pois de acordo com Lorenzato (2016), o decorrer da história aponta que o ensinar e o aprender desta disciplina estão associadas a uma conotação por vezes negativa ou maçante. Ainda em pleno século XXI existe esta resistência e para quebrá-la a sequência didática assume um protagonismo, logo que mostra possibilidades para o Ensino de Matemática, apontando novos caminhos para o professor.

Ao lermos e estudarmos A Prática Educativa: como ensinar, Zabala (1998) juntamente com Construções Geométricas de Wagner (-2007), fez-nos surgir a seguinte indagação, tornando-se norteadora desse trabalho: *A sequência didática com as construções geométricas básicas pode ser usada na elaboração de uma proposta pedagógica para o ensino da matemática?*

Sendo assim essa pesquisa tem o objetivo de apresentar uma possibilidade de intervenção dentro da sala de aula, sendo uma alternativa para o ensino da matemática, portanto servindo de um norteador para os professores.

À medida que se desenvolve esse trabalho pode-se perceber que a metodologia utilizada para investigação do problema é baseada na pesquisa bibliográfica em um diálogo direto com as teorias da sequência didática e do estudo de polígonos regulares (Triangulo equilátero, quadrado, pentágono e hexágono), levando a tecermos os seguintes capítulos:

- A Origem de uma Geometria Formal: percorremos um breve caminho histórico-cultural, para criar uma reflexão sobre o surgimento das construções geométricas, pois representam uma matemática de caráter demonstrativo.

- Geometria Plana Básica: fazemos uma abordagem sobre entes primordiais da geometria, e algumas construções (utilizando régua não graduada e compasso) essenciais sendo estas pré-requisitos fundamentais para sustentar os conceitos.

- Construção de alguns Polígonos Regulares: desenvolvemos algumas técnicas de construção geométrica exibindo possibilidades interessantes referidas à construção de alguns polígonos regulares (triângulo, quadrado, pentágono e hexágono).

- Sequencia didática: elaboramos uma sucinta abordagem conceitual sobre sequência didática sustentada pelo teórico (ZABALA, 1998).

- Proposta didática: apresentamos uma alternativa para o ensino da matemática (geometria voltada para construção de polígonos regulares) desenvolvida dentro da teoria de sequência didática (ZABALA, 1998), apontando diferentes metodologias para a docência.

2 A ORIGEM DE UMA GEOMETRIA FORMAL

A compreensão histórica de qualquer campo do saber é relevante porque entender seus mecanismos de surgimento, criam uma significação mais efetiva no processo de ensino e da aprendizagem, assim é importante resgatar e compreender a história do surgimento da geometria demonstrativa, especificamente construções geométricas, pois através de uma abordagem histórica, certas dificuldades de aprendizagem podem ser rompidas, por sua contextualização, desmitificando a ideia de que é ruim, chata ou difícil a aprendizagem da matemática.

> [...], os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. (MENDES, 2016, p. 80)

Neste contexto será apresentado nesse capítulo um breve relato histórico sobre construções geométricas e seus principais predecessores, na perspectiva de estimular as práticas docentes, afim de tornar mais dinâmico o processo de ensino-aprendizagem.

2.1 O Princípio

Não há uma data especifica ou um marco histórico que aponte exatamente o surgimento da matemática, porém D'Ambrosio (1990), sustenta que os diversos procedimentos matemáticos se originam quando indivíduos de um determinado grupo social, trabalham com quantidades, medidas, formas, classificações, operações, modelos e relações geométricas.

> *é difícil escolher um ponto de partida. Por onde começar? Em que época? Em que local? Em que civilização específica? Não é difícil imaginar que as sociedades muito antigas tenham tido noção de quantidade. As fontes para o estudo das civilizações antigas são escassas e fragmentadas. Historiadores e antropólogos discutem, há tempos, como construir um conhecimento sobre essas culturas com base nas evidências disponíveis. (ROQUE, 2012, p. 25)*

Considera-se, portanto que o desenho esteve presente nas atividades cotidianas da humanidade desde o princípio. Desenhos em cavernas representando uma linguagem, bem como artefatos culturais tornam-se conhecimentos para análise da manifestação do pensamento humano, verificando assim o desenvolvimento técnico e intelectual dos membros de grupos que viveram em determinada época da história. Dessa forma pode-se dizer que o desenho geométrico iniciou juntamente com o surgimento da humanidade como uma linguagem não verbal baseada na utilização de representações visuais.

> Noções primitivas relacionadas com os conceitos de números, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade. (BOYER. 1974, p. 1)

Neste contexto surgem os primeiros desenhos geométricos, de forma rude, para representar os espaços e resolver problemas cotidianos de acordo com as necessidades dos membros de um grupo cultural. Posteriormente, tornar-se-ia uma ferramenta importante para o fim do nomadismo, através das mensurações práticas e divisões de terras.

Seguindo esta perspectiva, Eves (2011), afirma que o processo de desenvolvimento agrícola, ocorrido por volta de 3000 antes da Era Comum (a.E.C.), favoreceu de forma efetiva no processo intelectual e tecnológico, culminando ao longo de anos nas sociedades elevadas e organizadas culturalmente, no que chamamos de berço das civilizações, tais como: Oriente Médio, China e Egito, estes povos que trouxeram várias invenções no ramo da irrigação, construções civis, escrita, dando início as áreas de conhecimento como matemática, astrologia etc..

2.2 Babilônicos

De acordo com Roque (2012), entre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios e os acadianos, povos que tinham influência preponderante neste local até o segundo milênio antes da era comum, deixaram evidências do surgimento das primeiras formas de escrita e dos números.

A invenção da escrita e dos números serviu de impulso a matemática, os escribas que foram os responsáveis a adquirir conhecimento sobre a matemática foram também os primeiros a obterem solução de questões básicas de geometria como mostra a figura 1, mas estas soluções eram feitas sem uso de teoria, de forma empírica observando-se padrões em tentativas e erros sem formalidade teórica, com intuito de resolver problemas práticos do cotidiano.

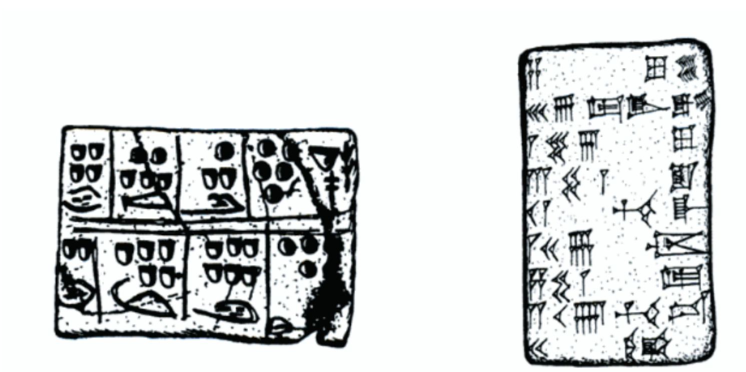
Figura 1 – Tabletes Contendo Exercícios de Geometria

Fonte: Garbi 2009, p. 12

De acordo com Eves, (2011, p 57) "[...] pode-se dizer que a matemática primitiva se originou em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática em atividades ligadas à agricultura e à engenharia". Isso significa que a matemática foi evoluindo-se de acordo com a necessidade humana, em resolver atividades rotineiras do seu cotidiano.

Foram encontrados alguns tabletes sumérios datando de aproximadamente 3500 a 2200 a.E.C. com símbolos anteriores aos cuneiformes que traziam registros numéricos (figura 2). Após a queda da escola suméria os conhecimentos matemáticos não se perderam quando o país foi conquistado, deixando evidente a produção de conhecimento sobre Aritmética e Geometria.

Figura 2 – Tabletes Numéricos Sumérios



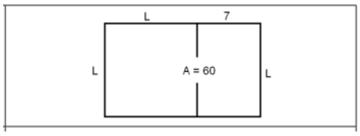
Fonte: Garbi, 2009, p.11

De acordo com Rosa (2013), os sumérios já sabiam resolver equações do primeiro e do segundo grau pelo método de completar quadrado, trabalhavam com triângulo retângulo e sua propriedade geral conhecida por nós como Teorema de Pitágoras, calculavam área, volume, diagonal do quadrado unitário e fizeram a relação entre diâmetro e comprimento de um círculo.

Apresentamos abaixo a resolução geométrica de equações algébricas do problema, *o comprimento de um retângulo excede sua largura em sete unidades. A área deste retângulo* *é 60 unidades quadradas. Determine o comprimento e a largura do retângulo*, retirado de Rosa (2013).

Como mostrado na figura 3, o comprimento do retângulo excede a sua largura em 7 unidades e a área total do retângulo é 60 unidades quadradas.

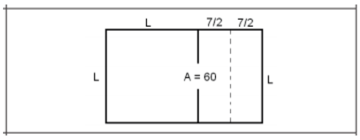
Figura 3 – Retângulo de lados medindo $L + 7$ e L



Fonte: Rosa e Orey 2013

Primeiramente, recortava-se o retângulo de unidades quadradas , em duas metades cujas áreas são dadas por .$\frac{7}{2}L(u)^2$.

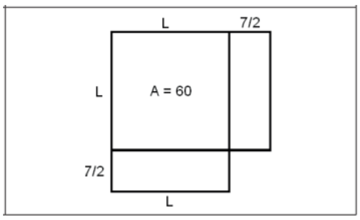
Figura 4 – Retângulo dividindo pela metade a medida 7



Fonte: Rosa e Orey 2013

Movendo-se uma das metades do retângulo de área $\frac{7}{2}L(u)^2$, no lado inferior do quadrado cuja área é $(u)^2$, percebemos que a figura formada é um quadrado incompleto, que possui a mesma área que o retângulo original.

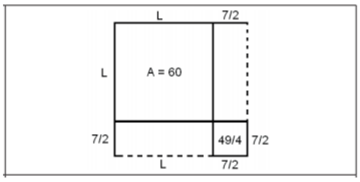
Figura 5 – Quadrado Incompleto



Fonte: Rosa e Orey 2013

A parte inferior do lado direito da figura é um quadrado com lados que medem $\frac{7}{2}$ unidades cada. A área deste quadrado é de $\frac{49}{4}(u)^2$.

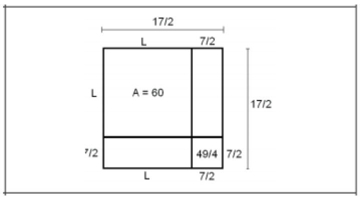
Figura 6 – Completando o Quadrado



Fonte: Rosa e Orey 2013

Ao adicionarmos à área original, isto é, $60(u)^2$ com $\frac{49}{4}(u)^2$, para que possamos completar o quadrado, identificamos que a área do quadrado completo é de $\frac{289}{4}(u)^2$. Neste caso, o comprimento de cada lado do quadrado completo é de $\frac{17}{2}$ unidades.

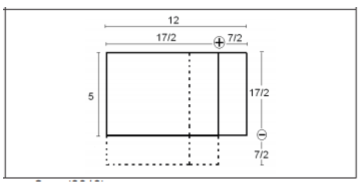
Figura 7 – Quadrado Completo



Fonte: Rosa e Orey 2013

Por fim, ao movermos o retângulo de área $\frac{17}{2} \times \frac{7}{2}$ unidades quadradas para colocá-lo na posição em que se encontrava originalmente, chegamos à conclusão de que o retângulo formado possui dimensões $\frac{17}{2} + \frac{7}{2} = 12$ unidades e $\frac{17}{2} - \frac{7}{2} = 5$ unidades.

Figura 8 – Retângulo com os valores numéricos de L



Fonte: Rosa e Orey 2013

Esta solução pode ser interpretada como uma das primeiras ideias matemáticas relacionadas com o método de completar quadrado para resolver problemas envolvendo equações quadráticas. (ROSA; OREY, 2013).

A matemática foi se desenvolvendo de acordo com a necessidade humana em vários locais das antigas sociedades, esta que ansiava por resolver problemas do cotidiano em áreas como irrigação, agrimensura, arquitetura e outras finalidades pelas quais ela se desenvolveu.

2.3 China e Índia

Para Eves (2011), o grau de influência da matemática grega, da babilônica e da chinesa sobre a matemática hindu e vice-versa, ainda é uma questão não esclarecida, mas há evidências de que em ambos os sentidos houve existência dessa influência de forma.

Os historiadores consideram muito difícil datar documentos matemáticos da China, pois em 213 a.E.C. o imperador da China mandou queimar os livros existentes. Mesmo que algumas cópias tenham sido salvas, a perda foi irreparável.

> *Pouco material de natureza primária oriundo delas chegou até nós. Isso em virtude de os povos da época com certeza fazerem muitos de seus registros em bambu, um material perecível e, para agravar, o egotista imperador Shï Huang-ti ordenou em 213 a.E.C. uma lamentável queima de livros. A despeito de ameaças e represálias severas, o edito do imperador certamente não foi levado a efeito completamente; mas como muitos dos livros queimados foram reconstituídos de memória, hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior àquela data infeliz. Por consequência, muito de nosso conhecimento sobre a matemática chinesa primitiva baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de textos originais. (EVES, 2011, p. 241)*

Entre os livros salvos destacamos o clássico mais antigo da matemática chinesa "*Chou Pei Suang Ching*", tem uma variação de quase mil anos entre suas datas mais prováveis de escrita. Segundo Boyer (1974) a maior dificuldade em datar este documento ocorre porque foi escrito por várias pessoas, em períodos diferentes. O Chou Pei indica que na China a geometria originou-se da mensuração, assim como na babilônia, sendo um exercício de Aritmética ou Álgebra. Neste trabalho há indicações que os chineses conheciam o teorema de Pitágoras (Figura 9).

Figura 9 – Diagrama Relativo aos Triângulos Retângulos

Fonte: Garbi 2009, p.16

Outra publicação tão antiga quanto o *Chou Pei*, é o livro de matemática "Chui Chang Suan Shu" (Nove Capítulos Sobre a Arte da Matemática) em torno de 1200 a.E.C. Entre vários assuntos abordados nesta obra, chama a atenção problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos.

Sobre o surgimento e desenvolvimento da matemática na Índia pode- se dizer que são poucos os registros e informações existentes sobre este povo, como sustenta Eves (2011), pouco se sabe sobre a matemática hindu antiga, em virtude da falta de registros históricos autênticos. A fonte histórica mais antiga encontrada são as ruínas de uma cidade de 5000 anos que indicam uma civilização tão avançada quanto qualquer outra do Oriente antigo. Aponta que o povo dessa cidade tinha sistemas de escrita, contagem, pesos e medidas e cavava canais para irrigação, o que indicam requisitos básicos para a matemática e a engenharia.

A Índia tinha seus "*esticadores de corda*", Boyer (1974) afirma que as primitivas noções geométricas tomaram corpo no escrito conhecido como Sulvasutras (regras de cordas) estas mostram que os primitivos hindus aplicavam a geometria à construção de altares e, ao fazê-lo, aplicavam a relação pitagórica. Este escrito tem três versões, sendo que a mais conhecida tem o nome de *Apastamba.* Nesta versão, da mesma época de Pitágoras, são encontradas regras para construção de ângulos retos por meio de ternas de cordas cujos comprimentos formam tríades pitagóricas. Este escrito, provavelmente, sofreu influência babilônica, visto que estas tríades se encontram em tábuas cuneiformes. A origem e a data dos *Sulvasutras* são incertas, de modo que não é possível relacioná-los com a primitiva agrimensura egípcia ou com o problema grego de duplicar um altar.

> No século VI a.c. as tropas persas sob comando de Dario invadiram a Índia mas não fizeram conquistas definitivas. Pertencem a esse período dois eminentes indianos antigos, o gramático Panini e o pregador religioso Buda. É essa também, provavelmente, a época dos Sulvasûtras ("as regras da corda"), escritos religiosos de interesse na história da matemática pelo fato de abarcarem regras geométricas para construção de altares (mediante esticamento de cordas) em que se revela um certo conhecimento dos ternos pitagóricos.(EVES, 2011, p. 248)

Ao se encerrar o período das *Sulvasutras*, Eves (2011) sustenta que após uma série de invasões à Índia, surgiram os *Siddhantas*, um sistema astronômico que marcou o início da dinastia Gupta, esta que revelou ser a era de ouro do renascimento sânscrito; nele a Índia tornou-se um centro de saber, arte e medicina. Desenvolveram-se ricas cidades e fundaram-se universidades.

Havia uma semelhança entre partes dos *Siddhantas*, a trigonometria e astrologia de Ptolomeu. Boyer (1974) argumenta que a trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os ângulos centrais que subentendem.

Pouco se conhece sobre a geometria hindu, como Eves (2011) afirma, os hindus eram perfeitos calculadores, mas geômetras medianos, a matemática hindu era grandemente empírica, raramente oferecendo uma demonstração ou uma dedução, já os gregos, com sua excelência em geometria tinham como característica mais importante da matemática a insistência com as demonstrações rigorosas.

Trataremos de alguns autores gregos, pois o foco deste capítulo é dar ênfase ao surgimento das construções geométricas que representam uma matemática de caráter demonstrativo.

2.4 Grécia e Egito

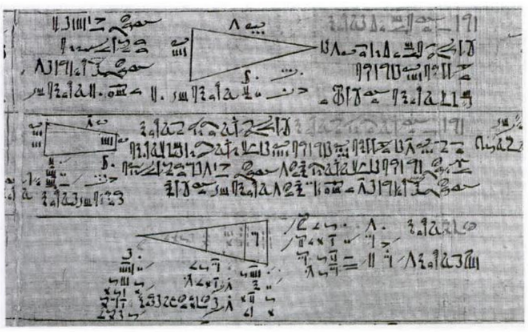
Não se sabe ao certo quando, nem de que forma surgiram e onde foram inventados os instrumentos régua e compasso. Não se pode afirmar nada sobre o surgimento da geometria, mas a sua evolução se deu na Mesopotâmia e no Egito.

Afirmações sobre as origens da matemática, seja da Aritmética, seja da Geometria, são necessariamente arriscadas, visto que os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever, (BOYER,1974, p. 4).

Contudo, argumenta Rosa (2013) é na sociedade egípcia que se obtém uma maior ramificação dos desenhos geométricos, devido a necessidade da medição de terras que eram divididas em lotes, por conseguinte os agricultores egípcios cultivavam as plantações que estavam localizadas em terrenos às margens do Rio Nilo.

Nesse contexto histórico citamos o papiro Rhind (Figura 10), transcrito pelo escriba Ahmes, em torno de 1650 a.E.C. que reúne 85 problemas de Aritmética e Geometria, sendo o primeiro manual prático matemático registrado na história, copiados em escrita hierática. Conforme (Eves, 2011, p 69) “esse papiro e o papiro Moscou são nossas principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga”.

Figura 10 – Questão de Geometria no Papiro de Rhind



Fonte: Garbi 2009, p.13

O papiro de Moscou (figura 11) datado de1850 a.E.C. contendo 25 problemas de Aritmética e Geometria traz a receita de como calcular o volume do tronco de pirâmide.

Figura 11 – Volume do Tronco de Pirâmide, fórmula egípcia e fórmula moderna

Fonte: Garbi 2009, p.15

A partir do século VI antes da era comum, os gregos irromperam a matemática dedutiva, introduzindo o conceito de justificativa lógica às questões. Segundo Eves, (2011), a Geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.E.C..

2.4.1 Tales de Mileto

Nascido em Jônia, um conjunto de colônias que se situava no litoral da Anatólia, Tales de Mileto viveu aproximadamente entre 640 a.E.C. e 564 a.E.C desenvolvendo as áreas do conhecimento de Filosofia, Astronomia e Matemática.

Segundo Eves (2011) Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração por ser tão genioso. Em Mileto, onde fundou a escola Jônica, ganhou reputação, graças a sua versatilidade de engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Foi o precursor no uso do método teórico e prático, uma maneira inovadora de trabalhar com geometria, vindo a formular dois teoremas importantes:

O primeiro Teorema estabelece *que se* A, B *e* C *são pontos em um círculo, onde o segmento* AC *é o diâmetro do círculo, então o ângulo* $\angle ABC$ *é um ângulo reto;*

O Teorema de Tales que carrega seu nome , por sua vez, estabelece que, *se duas retas transversais cortarem um feixe de retas paralelas, teremos medidas proporcionais nos segmentos delimitados nas transversais.* Este é o teorema que Tales teria usado para calcular a altura da pirâmide de Quéops, lançando assim a semente da matemática dedutiva.

2.4.2 Pitágoras de Samos

A principal fonte de informações a respeito dos primeiros passos da matemática grega segundo Eves (2011) é o chamado *Sumário Eudemiano*, o qual menciona que, após

Tales, o próximo matemático ilustre é Pitágoras.

O período em que transcorreu sua vida não é conhecido com exatidão, mas segundo Eves (2011) há indícios de que foi por volta de 586 a.E.C. a 500 a.E.C, possivelmente tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Mudou-se para o Egito entusiasmado a viagens e impressionado com as pirâmides.

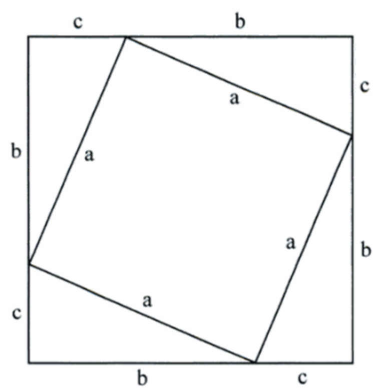
Eves (2011, p. 97) afirma que [...] ao retornar a Samos encontrou o poder nas mãos do tirano Polícrates e a Jônia sob o domínio persa; decidiu então emigrar para o porto marítimo de Crotona". Assim Pitágoras deixou Samos e se mudou para Crotona onde, por volta 540 a.E.C. fundou sua escola voltada aos estudos de Filosofia, Ciências Naturais e da Matemática, esta que acabou sendo transformada em uma sociedade secreta provocando hostilidades dos crotonenses, que destruíram os prédios de sua escola dispersando os membros desta sociedade que ainda resistiram por mais dois séculos.

Acredita-se que os Pitagóricos, membros da escola fundada por Pitágora, foram os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas enxergando a Matemática como algo abstrato. Alguns estudiosos afirmam que Pitágoras foi o primeiro matemático a provar a propriedade geral do triângulo retângulo, mas sem uma certeza de qual método utilizado por Pitágoras pelo fato de que existem inúmeras formas de demonstrá-lo.

Para ilustrar esse fato, Barbosa (1993) cita que no início do século XX, o professor de matemática Elisha Scott Loomis do estado de Ohio reuniu 230 demonstrações do teorema num livro publicado em 1927 e na segunda edição do livro, ampliou para 370 maneiras de se demonstrar que em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Também segundo Barbosa (1993), como não temos a menor indicação da forma utilizada por Pitágoras para demonstrar o teorema que carrega seu nome podemos supor que possa ser a mesma utilizada pelos chineses apresentada na Figura 12.

Figura 12 – Possível demonstração dada por Pitágoras (diagrama chinês)

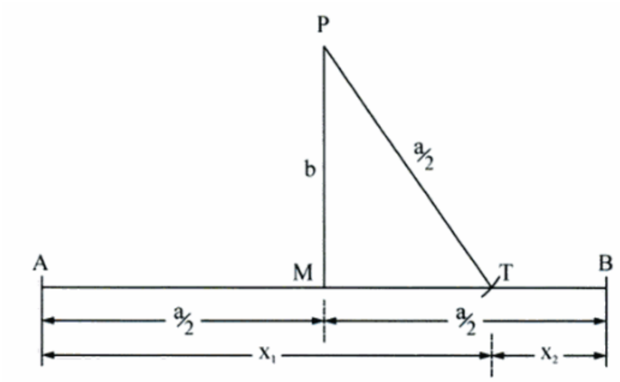


Fonte: Garbi 2009, p.28

Seja um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, constrói-se um quadrado de lados $(b + c)$. Nele, conforme o diagrama da prova chinesa, constrói-se quatro triângulos retângulos iguais ao triângulo inicial.

A área do quadrado maior é $(b+c)^2$, a do quadrado menor é a^2. A área dos quatro triângulos é $2bc$. Logo ffl, portanto $a^2+2bc = (b+c)^2$. Os Pitagóricos também resolveram através de construções geométricas, problemas que hoje chamamos de algébricos. Como exemplo tomamos a Figura 13, onde representamos a equação $x^2 + b^2 = ax$ com a e b, medidas de segmentos de retas e $b \leq \frac{a}{2}$.

Figura 13 – Solução Geométrica da equação do tipo $x^2 + b^2 = ax$



Fonte: Garbi 2009, p.32

Os Pitagóricos foram os iniciadores na descoberta dos sólidos geométricos regulares cabendo a eles a descoberta de somente três: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro, Teeteto (415 a.EC. a 368a.E.C.), um dos discípulos de Platão (filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga) descobriu mais tarde o octaedro e o icosaedro.

> Há um início de tratamento matemático desses sólidos no Livro XIII dos Elementos de Euclides. O primeiro escólio desse livro observa que se "*irá tratar dos sólidos de Platão, assim chamados erradamente, porque três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto*". É bem possível que isso corresponda aos fatos (EVES, 2011, p. 114).

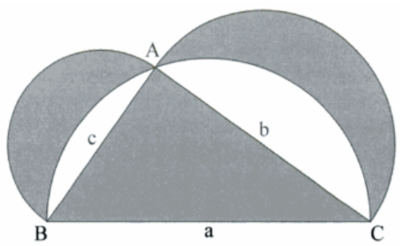
Iremos nos referir ao próximo matemático por também ser um discípulo de Platão o qual deu importante contribuição a geometria formal.

2.4.3 Hipócrates da ilha de Jônia de Quios

Nascido por volta de 460 a.E.C, mudou-se para Atenas em 430 a.E.C. imortalizando-se ao produzir um célebre livro *Elementos de Geometria*, produzida mais de um século antes de Os Elementos de Geometria de Euclides. O texto foi perdido, mas a obra foi conhecida por Aristóteles. Nesta reuniu de modo lógico a Geometria, tornando-se precursor dos "*Elementos*" de Euclides, notabilizando–se por ser o primeiro matemático a calcular áreas de certas figuras delimitadas por curvas denominadas lúnulas.

> AAcredita-se que Hipócrates tenha sido o autor da primeira obra escrita em um livro de "*elementos*", ou seja, com a apresentação sistemática da geometria. Infelizmente, poucos fragmentos sobreviveram. Seu trabalho mais conhecido é o estudo das lúnulas, que são porções de círculo compreendidas entre duas circunferências, incluindo a investigação de quadraturas (ROQUE, 2012, p.89).

Figura 14 – Exemplo de Lúnulas de Hipócrates



Fonte: Garbi 2009, p.38

Algumas destas lúnulas tinha sua área calculada com precisão e inclusive, se transformada com régua e compasso em quadrados de áreas equivalentes alimentariam por muitos anos o sonho possível da quadratura do círculo que consiste em construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado.

Não somente este como outros dois problemas e as tentativas de resolvê-los usando somente os instrumentos régua e compasso, deram início a uma forma axiomática de se trabalhar com geometria.

São eles a duplicação do cubo (ou Problema de Delos) que se constitui em construir a aresta de um cubo cujo volume é igual ao dobro de um cubo dado e a trissecção do ângulo que é basicamente dividir um ângulo qualquer em três ângulos de mesma medida. Mesmo parecendo de construção simples, tais problemas não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com os instrumentos régua e compasso. Eves, (2004) sustenta que a busca ingente de soluções para esses problemas influenciou profundamente a geometria grega e levou a muitas descobertas frutíferas.

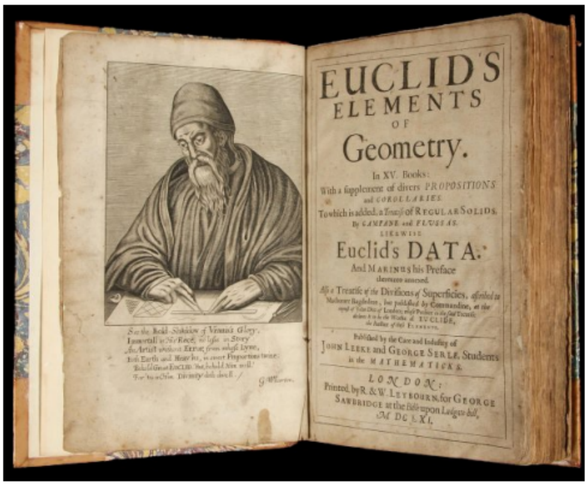
2.4.4 Euclides de Alexandria

Euclides viveu aproximadamente entre 360 a.E.C. e 295 a.E.C., muito pouco se sabe sobre a sua vida e a sua personalidade, salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de Matemática de Alexandria. Desconhecem-se também a data e o local de seu nascimento, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Sua fama repousa principalmente no seu trabalho de nome “*Elementos*” este em que Euclides reuniu, de forma lógica e organizada, várias obras realizadas por matemáticos antecedentes.

> A OBRA Elementos, de Euclides, é vista como o ápice do esforço de organização da geometria grega desenvolvida até o século III a.E.C. Por um lado, afirma-se que seria somente uma compilação de resultados já existentes produzidos por outros, o que torna o seu autor um mero editor. (ROQUE, 2012, p 118)

Essa obra compõe-se de 465 proposições distribuídas em 13 livros, (Figura 15).

Figura 15 – Elementos de Euclides



Fonte: www.esqudraodoconhecimento.wordpress.com/2015/04/20/euclides-e-os-elementos acessado em 21/05/2019

Nela,Eves (2014) sustenta que Euclides colecionou em treze volumes os conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos formulados por Tales, Pitágoras, Eudóxio, Zenão, Demócrito e outros matemáticos da antiguidade. Todas as realizações matemáticas desenvolvidas pelos gregos foram reunidas na obra de Euclides que também agregou conhecimentos matemáticos trazidos e desenvolvidos por outros povos.

Putnoki (1988), sustenta que desde a publicação dos livros “*Elementos*” o desenho geométrico se apresenta inseparavelmente ligado à geometria com o título de construções geométricas, pois relaciona as figuras geométricas com suas representações gráficas que são concretas e pertencem ao campo das imagens.

Segundo Costa (2013), os problemas matemáticos eram resolvidos pelos gregos utilizando régua e compasso, ou seja, as operações matemáticas eram realizadas através de construções geométricas empregando esses dois instrumentos de desenho.

Daremos aqui um salto na história pelo fato de que na *Alta Idade Média* houve uma grande recessão nos avanços do conhecimento cientifico. Eves (2011) afirma que o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos e, muito pouca matemática se fez durante o meio milênio daquele período.

2.5 O Renascimento

Quase um milênio depois da queda de Roma, a civilização europeia medieval começa a dar lugar à civilização moderna. Eves (2011) sustenta que o caminho para a modernidade começou com uma renovação de interesse pela arte e pela ciência antiga, centrando-se em grandes cidades mercantis italianas.

Nesse período, Roque (2012) afirma que geometria ainda era o principal domínio da matemática e qualquer pessoa que quisesse aprender matemática precisava começar pelos Elementos de Euclides. No entanto, aos poucos, foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico deveria servir a aplicações, desde as mais práticas, como as técnicas para construir mapas, até as mais abstratas, como a teoria da perspectiva, na pintura, e a astronomia.

Assim durante o século XV os artistas finalmente perceberam que o problema de perspectiva (uma pintura plana vista em três dimensões, por um ponto de vista qualquer) devia ser estudado cientificamente e que a geometria era a chave do problema onde citamos Geômetras Renascentistas de acordo com Eves (2011):

- Felippo Brunelleschi (1377 – 1446) - Um dos fundadores da geometria moderna que constrói um mecanismo designado por “Tavolleta”, que permite representar o objetivo segundo regras perspectivas rigorosas.

- Leon Battista Alberti (1404 – 1472) - Tratadista que define regras de aplicação de perspectiva geométrica à pintura.

- Leonardo Da Vinci (1452 – 1519) - Defende uma pintura livre de rigidez geométrica. Graciosidade, criatividade, luz e cor são incompatíveis com “matemáticas”; Albrecht Durer (1471- 1528) - Um dos últimos pintores geométricos. Ele cria o perspectógrafo, cujo resultado será mais tarde aplicado ao mecanismo da máquina fotográfica.

Apareceu também a primeira edição impressa da *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni et Proportionalita*, comumente conhecida apenas por S$\underline{u}$ma, do frade franciscano Luca Pacioli (c. 1445-1509), segundo Eves (2011), este trabalho iniciou um simbolismo específico a matemática, abreviando as palavras que representavam operações.

Além dos grandes feitos na área de Geometria, um resumo das realizações matemáticas deste período citadas por Eves (2011) são a álgebra simbólica que teve um bom andamento, os cálculos com numerais indo-arábicos se padronizaram, as frações decimais ganharam terreno, os números negativos começaram a ser aceitos, a trigonometria se aprimorou e sistematizou calculando-se excelentes tábuas trigonométricas.

Muitas realizações e inovações na matemática ocorreram durante muitos séculos seguintes, especificamente em construções geométricas, associando o que já havia se produzido e inovando ao relacionar as diferentes áreas da matemática geometria, álgebra e aritmética.

2.5.1 "O príncipe da Matemática"

Ao associar a proposta desse trabalho com história, vale ressaltar um homem de talentos impressionantes no ramo das ciências exatas, o qual relacionou diferentes áreas da matemática, considerado como o maior matemático do século XIX, "o príncipe da matemática" Carl Friedrich Gauss (Figura 16).

Figura 16 – Carl Friedrich Gauss

Fonte: Revista Elementos, p. 81

Johann Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. Com apoio de sua mãe engajou-se nos estudos sendo uma do mais notáveis crianças-prodígio.

Existe uma história segundo a qual o professor de Carl teria passado à classe a tarefa de somar os números de 1 a 100. Como afirma em Elementos (2013), quase que imediatamente Carl colocou sua resposta na mesa do professor que surpreso verificou que ele tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. A precocidade de Gauss chamou a atenção do duque de Brunswick, que, como um gentil e compreensivo patrono, acompanhou sua entrada no colégio em Brunswick com a idade de 15 anos e na Universidade de Göttingen com 18 anos de idade.

A precocidade de Gauss chamou a atenção do duque de Brunswick, que, como um gentil e compreensivo patrono, acompanhou sua entrada no colégio em Brunswick com a idade de 15 anos e na Universidade de Göttingen com 18 anos de idade.

Seu espírito pendeu para a matemática quando lhe faltava um mês para completar 19 anos de idade. O acontecimento foi sua surpreendente contribuição à teoria das construções euclidianas de polígonos regulares e, em particular, a descoberta de que um polígono regular de 17 lados é construtível com régua e compasso. E não ficou só nisso. De acordo com Elementos (2013), Gauss mostrou também como desenhar qualquer polígono regular de n lados com régua e compasso, desde que n seja um número primo de Fermat. Como consequência demonstrou que o polígono de sete lados não poderia ser construído com régua e compasso.

2.6 Séculos XIX e XX

Muitos séculos se seguiram e as construções geométricas começaram a se constituir em um saber autônomo que se fundiam ao fazer e aos saberes das sociedades pré-industriais. Franco Jr (2001), sustenta que na Europa, as construções geométricas foram sendo desvinculadas da Geometria como um saber escolar independente denominado Desenho Geométrico.

> A partir da segunda metade do século XIX, o Desenho Geométrico foi considerado como uma ciência, possibilitando que, em 1883, Eugéne Guillaume, diretor da Escola de Belas Artes de Paris e um dos membros da comissão responsável pela reforma do ensino de Desenho na França conseguisse que o seu método de ensino "fosse adotado, oficialmente, em todas as escolas francesas, durante, cerca de 30 anos, daí se irradiando para influenciar a maneira de ensinar Desenho em todas as regiões do mundo" (BANDEIRA, 1957, p. 75).

Nascimento (1999), sustenta que o Método de Guillaume tinha como propósito utilizar o rigor das construções geométricas por meio de instrumentos tradicionais de desenho, fundamentado na resolução gráfica de problemas clássicos da Geometria. A partir dessa experiência, os textos didáticos sobre os métodos desse ensino para o Desenho Geométrico foram divulgados mundialmente e influenciaram outros países a adotarem essa metodologia inovadora.

Nesse direcionamento histórico, em meados do século XIX, o ensino do Desenho Geométrico começou a ser difundido no Brasil, embora não fosse uma prática pedagógica utilizada em todas as escolas do país. De acordo com Zunin (2001) somente a partir do século XX que essa disciplina começou a ser estudada de maneira independente nas escolas brasileiras.

Afim de proporcionar compreensão das construções geométricas e a relação com seu desenvolvimento histórico, apresentaremos neste trabalho algumas resoluções gráficas de situações problemas de natureza teórica e prática com intuito de trazer um processo compreensivo, apresentando uma proposta de trabalho.

3 GEOMETRIA PLANA BÁSICA

Conhecer os entes geométricos básicos faz-se necessário, pois estes são fundamentais nas elaborações geométricas, tendo um papel crucial em sua base, ou seja, seus conceitos, relevâncias, representações e denominações na utilização nas construções gráficas futuras, são cruciais para a ratificação deste trabalho. Notoriamente todo aprofundamento teórico e prático geométricos, são desdobrados dentro dos conhecimentos primordiais de tais entes.

Serão apresentados neste capítulo os entes geométricos básicos, com definições não tão formais, sem o rigor de utilizar somente simbolismo matemático, para que seja norteador e auxilie no entendimento de cada um desses entes. Se faz necessário a apresentação destes entes pelo fato de serem imprescindíveis para construções geométricas mostradas nos capítulos 3 e 4.

Algumas definições formais foram tiradas do livro Fundamentos de Matemática Elementar (DOLCE, POMPEO, 1993) que trata sobre geometria Plana e a maioria das figuras foram construídas com auxílio do Geogebra, este que é um software de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra, uma ferramenta tecnológica de ajuda, principalmente visual, no estudo de Geometria plana ou espacial.

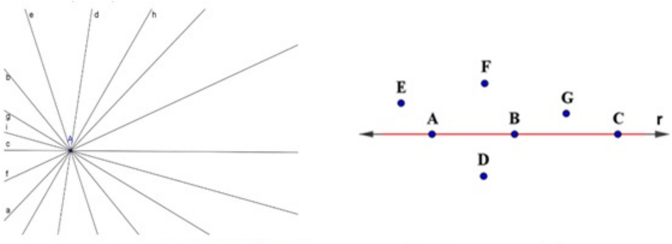
3.1 Entes geométricos Básicos

Ponto: O primordial ente geométrico e o mais primitivo é o Ponto, geralmente adotado sem definição, este é um elemento adimensional, representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto, não possui uma representação gráfica bem definida. De acordo com Gomes Filho (2003, p. 42) o ponto é a parte mais simples e irredutivelmente mínima da comunicação visual. Na natureza, o arredondamento é sua formulação mais corrente. Geometricamente ele é singular, não possui extensão.

Reta: Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles. Esta possui características especiais e ampla aplicação em geometria como também nas diversas variações de desenhos gráficos e objetos.

Entende-se como resultado o rastro do deslocamento de um ponto no plano ou espaço sem variar a direção, formando uma linha, podendo ir em seus dois sentidos infinitamente. De forma axiomática dizemos então que por um único ponto passam infinitas retas e o postulado da existência diz que numa reta bem como fora dela, há infinitos pontos (Figura 17).

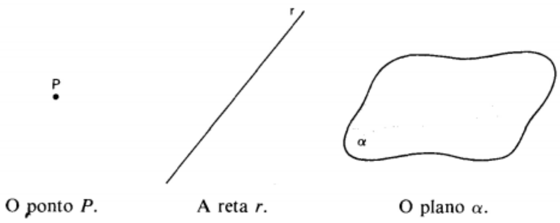
Figura 17 – Pontos e Retas



Fonte: Autor

Plano: Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles. A superfície de um azulejo, a superfície de uma mesa, de uma parede retilínea, superfícies com qualquer forma, uma folha de papel, entre outros nos oferece algum conceito para entendermos a ideia de plano. Pelo postulado da inclusão, se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

Figura 18 – Ponto, Reta e Plano



Fonte: Dolce; Pompeo, 2005 p2

Um plano contém infinitos pontos e linhas, é imensurável, não tem começo nem fim e para denominarmos convenciona-se usar letras do alfabeto grego.

Segmentos de reta: Dados dois pontos distintos A e R a reunião desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta. Tal ente geométrico é, portanto, limitado e podemos atribuir-lhe um comprimento, ou seja, é mensurável. Na figura 19 temos três segmentos$\overline{AR}$, $\overline{AS}$ e $\overline{RS}$.

Figura 19 – Segmento de Reta

Fonte: Autor

Definição de segmento de reta usando linguagem de conjuntos:

$$\overline{AR} = \{A, R\} \cup \{X | X \text{ está entre A e R }\}$$

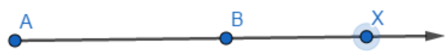
Dois segmentos são colineares se estiverem na mesma reta ou semirreta.

Dois segmentos de reta são consecutivos se a extremidade de um deles é também extremidade de outro, ou seja, os segmentos $\overline{RA}$ e $\overline{AS}$ são consecutivos, pois o ponto A é extremidade de ambos. Vale ressaltar que segmentos consecutivos não necessariamente são colineares.

Dois segmentos são colineares se estiverem na mesma reta ou semirreta.

Semirreta: Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta $\overrightarrow{AB}$, (Figura 20). Qualquer um dos pontos pertencentes a uma reta a divide em duas semirretas imensuráveis.

Figura 20 – Semirreta



Fonte: Autor

Definição Formal: $\overleftarrow{AB} = \{A, B\} \cup \{X|B \text{ está entre a E X } \}$

Entende-se que uma semirreta é o deslocamento de um ponto sem variar a direção, mas sendo esse ponto como origem, portanto a semirreta também é infinita.

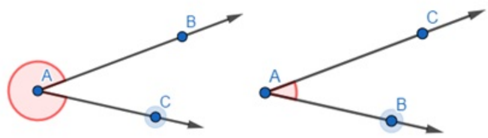
$\overline{AR}$ e $\overline{AS}$ na Figura 19 são semirretas opostas de origem no ponto A com direções diferentes e pertencentes a mesma linha reta.

Duas semirretas são colineares se estiverem na mesma reta ou semirreta, caso contrário elas são não colineares.

Vértice: vértice é um ponto de interseção entre dois segmentos de reta ou semirretas não colineares. Na figura 21 o ponto A é um vértice.

Âgulos: Ângulo é a região delimitada por duas semirretas de mesma origem (vértice) e não colineares.

Figura 21 – Ângulo



Fonte: Autor

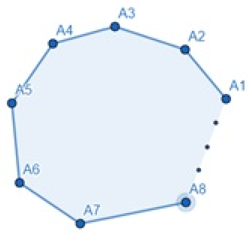
$$B\hat{A}C = \overleftarrow{AB} \cup \overleftarrow{AC}$$

São três os elementos do ângulo: o vértice que é o ponto A de interseção das duas semirretas, de acordo com a Figura 21, o lado que é cada uma das semirretas $\overleftarrow{AB}$ e $\overleftarrow{AC}$ que delimitam o ângulo podendo ser retas ou segmentos de reta e a abertura que é a região compreendida entre as duas retas.

As civilizações mais antigas fizeram uma comparação para medição do tempo e outras manifestações da natureza comparando o período de um ano a 360 partes da divisão da circunferência, passando cada parte dessa divisão a equivaler a um grau. Esta é a unidade usada para medir ângulos e seus submúltiplos são o minuto $(1^{o} = 60')$ e o segundo $(1' = 60\mathrm{J})$.

Polígonos: Dada uma sequência de pontos de um plano $A_1, A_2 \ldots A_n$ com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos são não colineares, considerando-se consecutivos A_{N-1}, A_n e A_1, assim como A_n, A_1 e A_2, denomina-se polígono (Figura 22) a reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\ldots$ $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$.

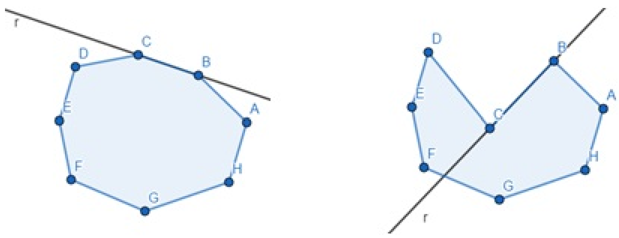
Figura 22 – Polígono



Fonte: Autor

Um polígono é convexo se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer, deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina. Se um polígono não é convexo ele é côncavo, ver Figura 23.

Figura 23 – Polígono convexo e côncavo



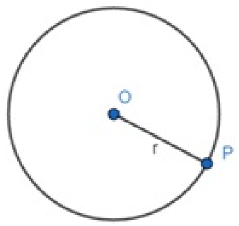
Fonte: Autor

Um polígono convexo é dito regular se, e somente se, tem todos os seus lados de mesma medida e todos os seus ângulos internos contendo a mesma medida.

Circunferência: Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto dado desse plano é sempre a mesma e não nula. O ponto dado é o centro e a distância dada é o raio da circunferência.

Definição: Dados um plano β, um ponto O de β e uma distância r, $\alpha(0, r) = \{P \in \beta | d(P, O) = r\}$, onde $\alpha(0, r)$ representa a circunferência de centro O e raio r.

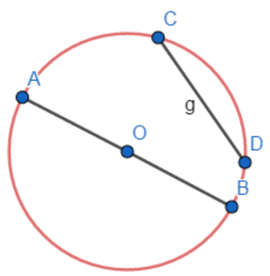
Figura 24 – Circunferência



Fonte: Autor

Corda: Denomina-se corda de circunferência a qualquer segmento de reta cujas extremidades sejam pontos sobre ela. O diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência. Na Figura 25 temos a corda $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

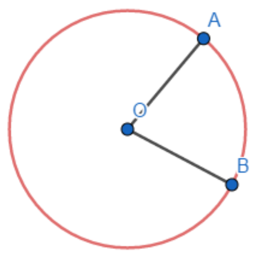
Figura 25 – Cordas de circunferência



Fonte: Autor

Arco: Consideremos uma circunferência α de centro O e sejam A e B dois pontos de α que não sejam extremidades de um diâmetro, referimo-nos a arco de circunferência a cada uma das partes em que esta é dividida por um par de seus pontos.

Figura 26 – Arco



Fonte: Autor

3.2 Construções Geométricas Básicas Usando Régua e Compasso

Para conhecermos as propriedades e estruturas que existem nas formas geométricas, utilizaremos duas ferramentas de precisão para nos auxiliar nas construções destas estruturas, o compasso que é utilizado para construção de círculos e a régua não graduada para construção de retas, segmentos de reta e semirretas.

> A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. Na realidade, nos Elementos, as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato. (ROQUE ,2009 p. 127)

As construções geométricas são de grande importância para compreensão da Matemática elementar. Com problemas que desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras, podemos concluir que é uma das melhores formas para aprender geometria por relacionar a teoria que dá seu embasamento correto e a prática que ensina o método e trabalha com as ferramentas.

Apresentamos aqui algumas dentre as construções geométricas planas utilizando apenas régua e compasso, deixadas pelo legado grego usando os postulados de Euclides. Vale salientar que este trabalho é destinado principalmente a professores de matemática que atuam no ensino médio, em especial o segundo ano, série na qual são estudados os conceitos geométricos abordados nos capítulos seguintes.

3.2.1 Reta paralela

Faremos a construção de uma reta r paralela à reta s, passando por um ponto P não pertencente a s.

1. Centramos em P, o raio (abertura do compasso) maior que a distância de P a s, construindo um arco de forma que intercepte a reta s num ponto B qualquer.

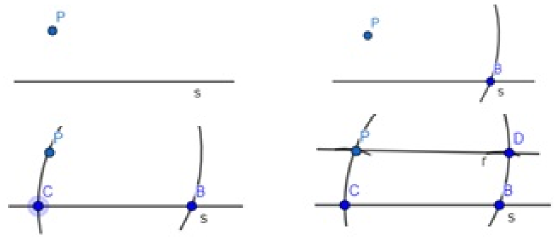
2. Centramos a ponta seca do compasso no ponto B fazendo um arco de mesmo raio do passo 1, de modo que intercepte s em um ponto C qualquer.

3. Centrando em C a ponta seca do compasso, construímos uma abertura até P traçando esse arco.

4. Centrando em B a ponta seca do compasso e mantendo a mesma abertura do passo 3 sobre o primeiro arco traçado obtendo o ponto D.

5. Traçamos uma reta unindo os pontos P e D, a reta que contém o segmento $\overline{PD}$ é paralela a reta s que chamamos de r (Figura 27).

Figura 27 – Construção de reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela.



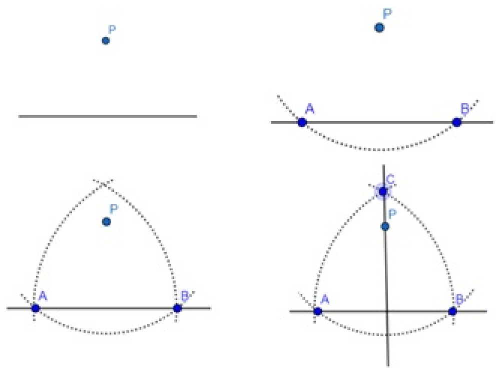
Fonte: Autor

3.2.2 Reta Perpendicular

Faremos a construção de uma reta perpendicular a uma reta r dada passando por um ponto P qualquer fora de r.

1. Com o centro em P trace uma circunferência qualquer cortando a reta r nos pontos A e B.
2. Construamos dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centro nos pontos A e B determinando a interseção de ambos os arcos (ponto C).
3. Unamos os pontos P e C. A reta $\overline{PC}$ é perpendicular à reta r.

Figura 28 – Construção de reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto fora dela.



Fonte: Autor

3.3 Lugares Geométricos

Um lugar geométrico, segundo Carvalho (1988), consiste em um conjunto de pontos do espaço que gozam de um determinada propriedade matemática. Ao enunciarmos uma propriedade específica P que esses pontos devem ter, o conjunto de pontos que possuem tal propriedade é o lugar geométrico da propriedade P. um exemplo simples é a circunferência, que é o lugar geométrico de todos os pontos que equidistam de um ponto denominado centro.

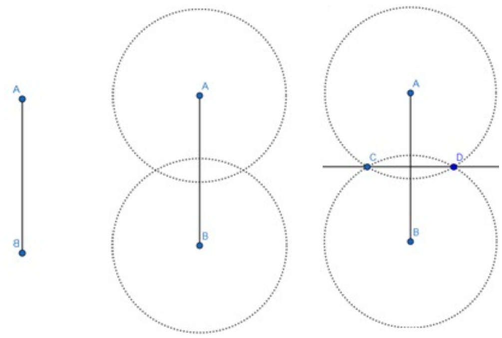
3.3.1 Mediatriz

Dado um segmento $\overline{AB}$, mediatriz é o lugar geométrico cujos pontos equidistam dos pontos A e B. A mediatriz é perpendicular a $\overline{AB}$ e o intercepta em seu ponto médio.

1. Com a ponta seca do compasso em A construímos um círculo, fazendo o mesmo para o ponto B de forma que o raio dos círculos sejam iguais e que se interceptem em dois pontos.

2. Unindo os pontos C e D, interseções das circunferências construímos a reta que passa por ambos. Esse segmento formado é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Figura 29 – Construção da mediatriz de um segmento



Autor, construído no Geogebra.

3.3.2 Bissecção de um Ângulo

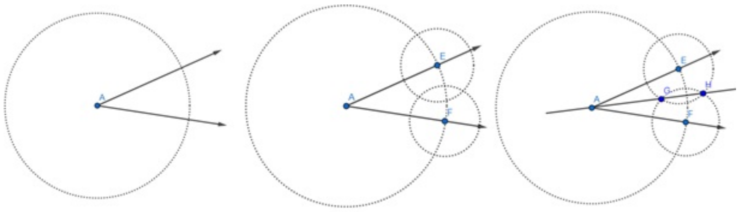
Ao bissectar um ângulo estamos dividindo este mesmo ângulo em dois novos ângulos menores e de mesma medida. Necessitamos então construir a Bissetriz desse ângulo que será apresentada a seguir. **Bissetriz** de um ângulo é a reta que passa pelo vértice do ângulo dado dividindo-o ao meio.

1. Com centro no vértice A do ângulo, construamos um círculo de raio qualquer.

2. Construamos dois círculos de mesmo raio centrando o compasso nos pontos E e F que são as interseções do circulo do passo 1 com os lados que formam o ângulo.

3. Unamos os pontos de interseção dos círculos do passo 2 ao ponto A formando uma reta. Essa reta bissecta o ângulo dado.

Figura 30 – Construção da Bissetriz



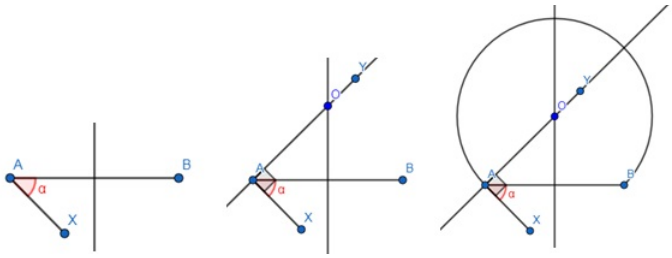
Autor, construído no Geogebra.

3.3.3 Arco capaz

Consideremos dois pontos A e B sobre uma circunferência. O Lugar geométrico dos pontos que enxergam o segmento AB segundo um ângulo de medida α é o arco capaz do ângulo α sobre o segmento AB.

1. Desenhemos a mediatriz de AB.
2. Tracemos a semirreta AX tal que $B\hat{A}X = \alpha$.
3. Tracemos por A a semirreta AY perpendicular a AX. A interseção de AY com a mediatriz, é o ponto O, centro do Arco capaz.
4. Com a ponta seca do compasso em O e a outra em B desenhemos e o arco AB, este que é o arco capaz.

Figura 31 – Construção do arco capaz



Autor, construído no Geogebra.

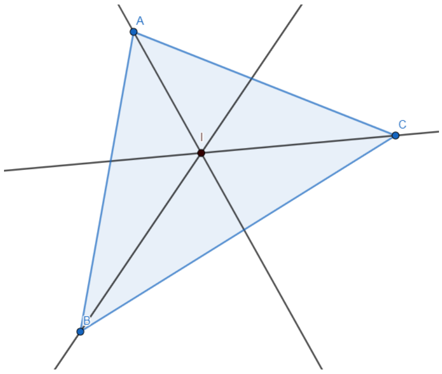
3.3.4 Incentro

O incentro de um triângulo qualquer é o ponto onde ocorre a interseção das três bissetrizes internas do triângulo. Vimos na Figura 30 que bissetriz é a reta que passa pelo vértice de um ângulo dividindo-o em dois ângulos de mesma medida. Para construção do incentro seguiremos os seguintes passos.

1. Dado um triângulo ABC qualquer, partindo de cada vértice, construímos as três bissetrizes internas visto em bissecção de um ângulo (Figura 30).

2. O ponto I de interseção dessas bissetrizes é o incentro.

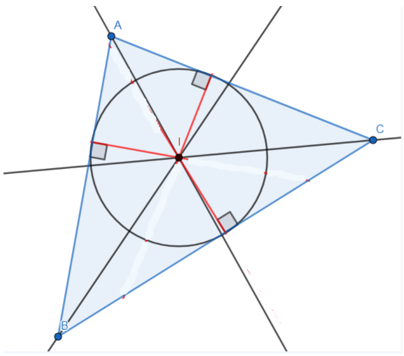
Figura 32 – Construção do Incentro



Autor, construído no Geogebra.

Podemos construir uma circunferência inscrita em um triângulo, de forma que o centro da mesma seja o incentro e o raio seja a distância do incentro até qualquer um dos lados do triângulo. Essa distância é perpendicularmente construída considerando o incentro um ponto externo a reta suporte de qualquer um dos lados do triângulo.

Figura 33 – Construção da circunferência inscrita no triângulo



Autor, construído no Geogebra.

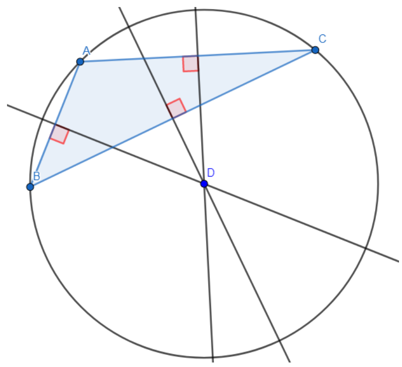
3.3.5 Circuncentro

O lugar Geométrico dos pontos que equidistam dos vértices de um triângulo qualquer e onde se interceptam as mediatrizes relativas aos três lados deste triângulo recebe o nome de Circuncentro, este nem sempre ocorre na região interna do triângulo. Para construção do circuncentro seguimos os seguintes passos:

1. Dado um triângulo ABC qualquer, construímos as mediatrizes relativas a cada lado do triângulo. Construção da mediatriz de um segmento foi mostrado na Figura 29.

2. O ponto de interseção das três mediatrizes é o Circuncentro. A circunferência que circunscrita o triângulo tem como centro o circuncentro.

Figura 34 – Construção do Circuncentro



Autor, construído no Geogebra.

Temos ainda dois outros pontos notáveis do triângulo, o baricentro e o ortocentro, lugares geométricos estes que não serão relevantes nas construções geométricas que abordaremos nos próximos capítulos. O baricentro é o Lugar geométrico no qual as três medianas de um triângulo qualquer se interceptam. Já a Mediana referente a um dos lados do triângulo é a reta que passa pelo vértice de um triângulo interceptando o lado oposto a esse vértice em seu ponto médio. Um método para construir o baricentro é encontrar os pontos médios de cada lado do triângulo, mostrado na figura 29, e unir o vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice. Já o ortocentro é o lugar geométrico no qual as três alturas de um triângulo qualquer se interceptam.

Já o ortocentro é o lugar geométrico no qual as três alturas de um triângulo qualquer se interceptam. Altura é a ceviana[1], que parte do vértice de um triângulo e intercepta o lado oposto a esse vértice formando uma ângulo reto (90º).

Uma maneira de encontrar o ortocentro é construir uma reta perpendicular à reta suporte de cada lado que passa por um ponto fora dela, de forma que este ponto seja o vértice oposto ao lado em questão. Assim o ponto de interseção das três perpendiculares construídas é o ortocentro.

Foram apresentados no decorrer deste capítulo alguns entes geométricos básicos e construções geométricas iniciais que serão empregadas nas composições de polígonos regulares que seguem no capítulo 4, estes que serão os principais itens deste trabalho. Apresentaremos uma proposta didática no capítulo 6, utilizando esses entes e as construções necessárias que constituem a elaboração de um polígono regular.

[1] Ceviana é um segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto qualquer do lado oposto. A altura, a mediana ou a bissetriz do triângulo são cevianas particulares.

4 CONSTRUÇÃO DE ALGUNS POLÍGONOS REGULARES

Neste capítulo veremos que a técnica de construção geométrica com uso de régua e compasso também apresenta outras possibilidades interessantes, sendo a utilização referida, a construção de alguns polígonos regulares.

É inviável apresentar aqui as construções de todos os polígonos regulares e muito menos mostrar uma generalização para construção dos mesmos pelo fato de existir variadas formas e angulações que impedem estabelecer um caminho genérico.

Não existe uma medida específica para o lado e muito menos para o ângulo de um polígono regular nem mesmo uma quantidade de lados limitada. Nos casos abordados neste trabalho, o importante são as técnicas manuais utilizadas para a construção.

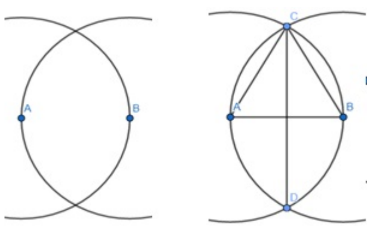
Essas construções, atualmente podem ser feitas mais facilmente com auxílio de softwares geométricos, como o Geogebra, pois estes apresentam ferramentas do programa que proporciona a construção.

4.1 Construção do Triângulo Equilátero

Triângulo equilátero é um polígono regular que possui três lados de mesma medida e três ângulos congruentes.

1. Dado um segmento qualquer AB, com a "ponta seca" do compasso em A, desenhemos um arco de circunferência de raio AB
2. Em seguida façamos o contrário: um arco de centro B e raio BA. Estes arcos cortam-se em C e D. Então, o triângulo ABC é equilátero e a reta CD é a mediatriz de AB.

Figura 35 – Construção do triangulo equilátero



Autor, construído no Geogebra.

Para a construção dos próximos polígonos regulares usaremos o teorema a seguir, pelo qual embasa a construção de vários outros polígonos regulares apenas dividindo a circunferência em vários arcos de mesma medida e ao unirmos pontos adjacentes desses arcos formamos cordas congruentes.

Teorema 1. *Dividindo-se uma circunferência em n arcos congruentes com ($n \geq 3$), temos:*

i) todas as cordas determinadas pelos extremos de um mesmo arco, reunidas, formam um polígono regular de n lados inscrito na circunferência;

ii) as tangentes à circunferência traçadas pelos extremos dos arcos determinam um polígono regular de n lados circunscritos à circunferência.

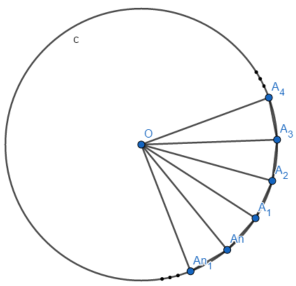
Demonstração. Sejam $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$ os n pontos extremos dos arcos que dividem a circunferência C de centro O em n arcos, e formam o polígono inscrito $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, A_n$. Como temos Arco $A1A2 \equiv$ arco $A2A3 \equiv \ldots$ arco $An-1An \equiv$ arco $AnA1$.

Então as cordas $A1A2 \equiv A2A3 \equiv \ldots An - 1An \equiv AnA1 \ldots$. (a)

Isto é fato, pois arcos congruentes subtendem cordas também congruentes.

Considerando os triângulos $OA_i - 1A_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, onde A_0 coincide com A_n, todos estes são congruentes, por conseguinte, $\hat{A}_1$, $hatA_2$, $hatA_3$, $hatA_4$, ..., n também são congruentes, pois são ângulos inscritos medindo $\dfrac{(n-2)\cdot 180^{\text{o}}}{n}$.
Está provada a primeira parte. □

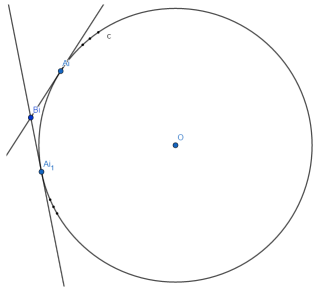
Figura 36 – Circunferência dividida em n arcos congruentes



Autor, construído no Geogebra.

Consideremos agora as retas tangentes a circunferência C passando pelos pontos A_4i. Seja B_i, cada ponto de intersecção das tangentes que passam por A_{i-1} e A_i. São congruentes os triângulos $OA_i - 1B_i$ e OA_iB_i, em particular são congruentes os lados $A_i - 1A_i$ e A_iB_i. A congruência dos ângulos $\hat{B}_i$ verifica-se através dos triângulos $A_i - 1A_iB_i$. com $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Figura 37 – Retas Tangentes a Circunferência.



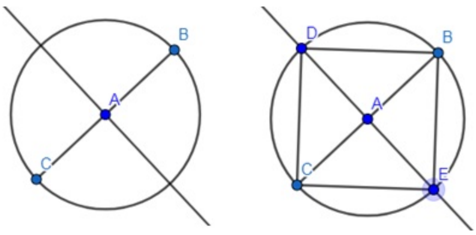
Autor, construído no Geogebra.

4.2 Construção do Quadrado Inscrito

Quadrado é um polígono regular que possui quatro lados de mesma medida e quatro ângulos congruentes. Faremos a construção de um quadrado dada a sua diagonal como um segmento qualquer.

1. Considere um segmento BC dado. Construamos a mediatriz de BC.
2. Seja A o ponto de interseção entre o segmento BC e sua mediatriz, tracemos uma circunferência de centro em A que passe por B e C.
3. Sejam D e E os pontos de interseção da mediatriz de BC com a circunferência, tracemos os segmentos BD, BE, CD e CE.

Figura 38 – Construção do quadrado



Autor, construído no Geogebra.

4.3 Construção do Pentágono Regular Inscrito

Pentágono regular é um polígono convexo que possui cinco lados com mesma medida e cinco ângulos congruentes. Faremos a construção do pentágono regular dado um segmento qualquer como medida do lado da figura em questão.

1. Dado um segmento qualquer AB, construamos sua mediatriz TH estendendo em sentido do ponto H.

2. Consideremos M o ponto médio de AB, com a abertura AM no compasso, distribua no sentido do ponto H o triplo de AM. Marcando o ponto G, ou seja, $MG = 3 \times AM$.

3. Construamos os segmentos congruentes AH e BH prolongados no sentido de A e B.

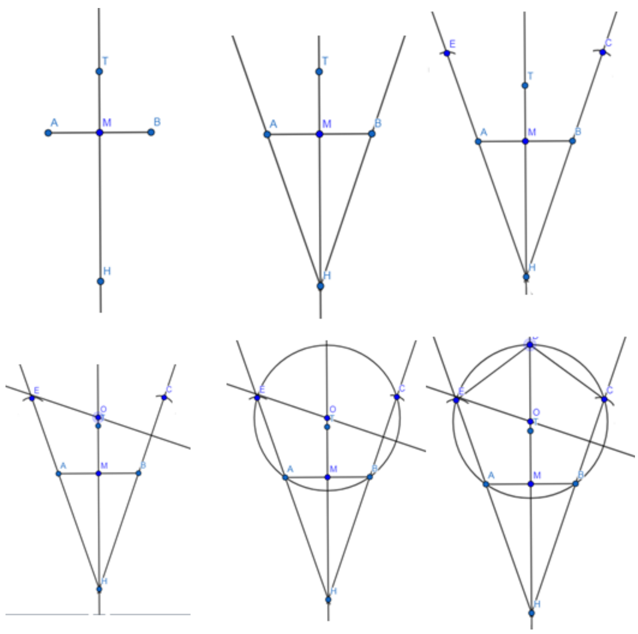
4. Com a abertura do compasso AB e a ponta seca do compasso no ponto A, marquemos o ponto E no prolongamento do segmento AH. Com a abertura do compasso AB e a ponta seca do compasso no ponto B, marquemos o ponto C no prolongamento do segmento BH. Obtendo AB, AE e BC, segmentos côngruos que correspondem três lados do pentágono.

5. Construamos agora a mediatriz de BC, encontrando o circuncentro O que é o ponto de interseção das mediatrizes de AB e BC.

6. Construamos a circunferência de centro O e raio AO.

7. Com a abertura do compasso medindo AB Construa dois pontos D e E na circunferência. Unindo os pontos BD e DE obtemos um pentágono regular inscrito na circunferência.

Figura 39 – Construção do pentágono inscrito



Autor, construído no Geogebra.

4.4 Construção do Hexágono Regular Inscrito

Hexágono Regular é um polígono convexo que possui seis lados de mesma medida e seis ângulos internos congruentes. Faremos a construção do hexágono regular dado um segmento qualquer como medida do lado da figura em questão.

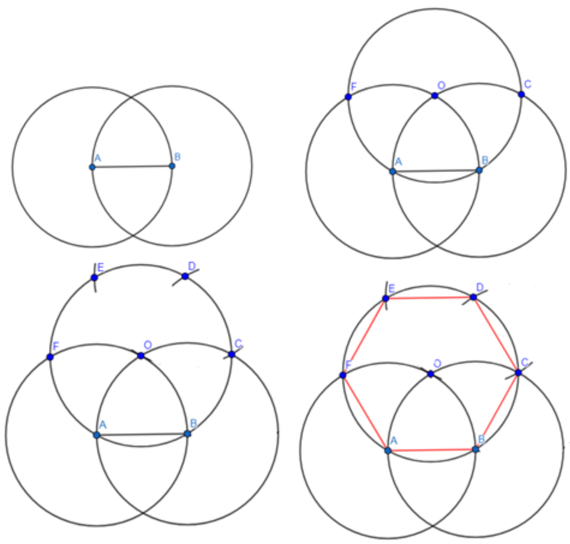
1. Consideremos o segmento AB qualquer, mantendo sempre a abertura do compasso igual AB construamos duas circunferências, uma de centro em A e outra centrada em B.

2. Centremos a ponta seca do compasso numa das interseções (O) destas circunferências e mantendo a abertura AB, construamos uma nova circunferência.

3. Sem alterar a abertura do compasso, centremos a ponta seca em B e construamos um arco que intercepte em C a circunferência do passo 2.

4. Sem alterar a abertura do compasso, centremos a ponta seca em C e construamos um arco que intercepte em D a circunferência do passo 2. Repita o processo até obter seis pontos passando pela circunferência. Unindo esses pontos consecutivos obtemos um Hexágono regular

Figura 40 – Construção do hexágono inscrito



Autor, construído no Geogebra.

As construções com régua e compasso não permitem resolver todos os problemas propostos pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides, que não se furtavam, por isso, a utilizar outros métodos.

É importante ser claro quanto ao que é ou não permitido construir com régua e compasso, pois nem sempre esses instrumentos eram suficientes para resolver problemas, exemplo disso temos os três problemas clássicos, duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo.

Estes são exemplos que a beleza de um problema matemático não reside na resposta, mas sim nos métodos usados para o resolver. Em contrapartida a não existência de solução pode parecer frustrante, entretanto os raciocínios utilizados para se chegar a essa conclusão são com frequência muito fascinantes, acontecendo no processo de resolução descobertas estimulantes de novas ideias.

A importância destes problemas reside no fato de terem constituído ao longo dos tempos uma fonte muito rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo inventados nas sucessivas tentativas de resolução.

Partindo do ponto de vista de que métodos diferentes utilizados para resolver situações problemas podem gerar novas descobertas e possivelmente um aprendizado significativo, apresentaremos em seguida uma proposta de sequência didática contendo o uso de construções geométricas com régua e compasso.

Para compreensão da metodologia da sequência didática é importante um conhecimento prévio desta teoria, portanto o próximo capítulo será um percurso básico sobre o seu conceito, a qual espera-se servir de auxílio e reflexão aos professores de matemática do ensino médio sobre suas ações pedagógicas.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Um dos grandes desafios para os professores, em especial aos que lecionam a disciplina de matemática é: como fazer com que os alunos tenham uma aprendizagem valorosa do conteúdo a ser ensinado. Não basta somente conhecer sobre o assunto, é indispensável também saber como ensinar, esta arte que segundo Lorenzato (2006) só se adquire por meio de experiência e prática pedagógicas.

Para obter a realização de saber ensinar existem modalidades de organização do planejamento pedagógico contendo diferentes metodologias que auxiliam no sucesso desta complexa tarefa, uma delas é a que será citada e utilizada na nossa proposta, a *Sequência Didática*.

De acordo com Zabala (1998), a sequência didática significa uma série ordenada e articulada de atividades que formam as unidades didáticas, ou seja, o professor através dos objetivos que pretende obter com os discentes, irá organizar, uma série de ações para atingir à aprendizagem dos conteúdos, sejam eles factuais, atitudinais, procedimentais e conceituais, conteúdos estes defendidos pelo autor e que serão mencionados de forma detalhada posteriormente.

A maneira com que as atividades se articulam determinam a especificidade da sequência didática, ou seja, conjunto de atividades amarradas ao conteúdo que busca favorecer o desenvolvimento dos alunos sempre com foco nos objetivos já estipulados no planejamento dessas atividades.

Para alcançar os objetivos pré-estabelecidos é preciso, planejar para organizar-se e orientar-se em relação aos discentes importando-se mais com o conteúdo a ser ensinado e a forma como será transmitido aos alunos. Na perspectiva de Libâneo (2013), o trabalho docente é uma atividade consciente e sistemática, está ligada as concepções sociais e experiências de vida dos alunos.

Segundo Zabala (1998), são necessários alguns requisitos básicos para construção de uma sequência didática como, ter clareza no que vai ensinar e para quem vai ensinar, considerando faixa etária, nível, conhecimentos prévios, habilidades, desejos. Portanto o melhor a se fazer é uma atividade de sondagem dos alunos.

Independentemente do nível dos alunos é preciso ter claramente o objetivo e os conteúdos que serão aprendidos e a partir daí, organizar as atividades dentro de um determinado tempo (quantidade de aulas). Segundo Zabala (1998), existem quatro tipos de conteúdo a serem ensinados.

Primeiramente os conteúdos factuais, que exprimem fatos, acontecimentos, situações, dados e fenômenos, enfim tudo que possa ser concreto, contextualizado e acompanhado de uma problematização.

Os conteúdos conceituais, se referem a um conjunto de fatos, objetos ou símbolos que tem características comuns que normalmente descrevem relações de causa e efeito ou correlação. Deste modo estabelece uma conexão entre o conceito apresentado pelo professor e sua relação com o fato apresentado.

Os conteúdos procedimentais por sua vez são regras, técnicas, métodos, destrezas ou habilidades, estratégias e procedimentos, é um conjunto de ações ordenadas dirigidas para realização de um objetivo, como calcular, observar ou interpretar um enunciado.

E por último tem–se os conteúdos atitudinais, conjunto de valores, atitudes e normas que regram a vida em sociedade, não são valores morais, religiosos ou políticos partidários. Porém, são princípios éticos, de juízo, conduta, solidariedade, respeito ao próximo e as diferentes ideias, responsabilidade e compromisso.

Neste contexto pretende-se construir a partir da educação, indivíduos plenamente capazes intelectualmente, a sequência didática surge como uma ferramenta de alto valor na prática docente, viabilizando o processo do ensino e da aprendizagem.

A metodologia que iremos sugerir e o conteúdo de matemática abordado tem o intuito de permitir mais flexibilidade didática ao professor, não sendo de caráter exclusivo, porém uma sugestão a mais para se adotar durante o planejamento das aulas, ressaltando que o papel desempenhado pelo professor em sala de aula é marcante no processo de aprendizagem do aluno.

Ao pensar em construir uma sequência didática ou até mesmo para analisar uma sequência já pronta, Zabala (1998) orienta a questioná-las considerando os seguintes aspectos sobre a existência de atividades:

> a) Que nos permitem determinar os conhecimentos prévios que cada aluno possui em relação aos novos conteúdos de aprendizagem?
> b) Cujos conteúdos são propostos de forma que sejam significativos e funcionais para os meni9nos e meninas?
> c) Que possamos inferir que são adequadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno?
> d) Que representem um desafio alcançável para o aluno, quer dizer, que levam em conta suas competências atuais e as façam avançar com ajuda necessária, portanto, que permitem criar zonas de desenvolvimento proximal e intervir?
> e) Que provoquem um conflito cognitivo e promovam a atividade mental do aluno, necessária para que se estabeleça relações entre novos conteúdos e os conhecimentos prévios?
> f) Que promovam uma atitude favorável, quer dizer, que sejam motivadores em relação a aprendizagem dos novos conteúdos?
> g) Que estimulem a autoestima e o autoconceito em relação as aprendizagens que se propõem, quer dizer, que o aluno possa sentir que em certo grau aprendeu, que seu esforço valeu a pena?
> h) Que ajudem o aluno a adquirir habilidades relacionadas com aprender a aprender, que lhe permitam cada vez ser mais autônomos em sua aprendizagem. (ZABALA,1998 p.63)

O desafio é construir uma sequência didática que contenha todos os critérios acima, pois demanda tempo no planejamento de aulas úteis para uma aprendizagem considerável dos alunos. O que está exposto abaixo são duas unidades didáticas, exemplos abstratos que servem para diferentes níveis de ensino, situações em que Zabala (1998), aponta como intervenções pedagógicas que possivelmente irão auxiliar práticas educativas coerentes.

Tabela 1 – Primeira unidade didática

Comunicação da lição	O professor expõe o tema. Enquanto explica os alunos tomam nota. O professor permite alguma pergunta, a que responda oportunamente. Quando acaba, define a parte do tema que será objetivo da prova que vale nota.
Estudo individual sobre o livro texto	Cada um dos alunos, utilizando diferentes técnicas (quadro, resumo, síntese), realiza o estudo do tema.
Repetição do conteúdo aprendido	Cada aluno, individualmente, memoriza os conteúdos da lição que supõe que será objetivo da prova ou exame.
Prova ou exame.	Em classe, todos os alunos respondem as perguntas do exame durante um período.
Avaliação	O professor comunica com os alunos os resultados obtidos.

Fonte: Adaptado de adaptado de "Zabala" (1998,p.56)

Tabela 2 – Segunda unidade didática

Apresentação	O professor apresenta uma situação problema e em seguida, expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos, linguísticos, físicos ou de qualquer que seja a área.
Busca por soluções	o professor pede aos alunos que exponham diferentes formas de resolver o problema ou situação.
Exposição do conceito e algoritmo	O professor aproveita as propostas dos alunos para elaborar o novo conceito e ensinar o modelo de algoritmo, problema ou situação.
Generalização	O professor demonstra a função modelo conceitual e o algoritmo em todas aquelas situações que cumprem determinadas condições.
Aplicação	Os alunos, individualmente, aplicam o modelo a diversas outras situações semelhantes.
Exercitação	Os alunos realizam exercícios utilizando o algoritmo.
Prova ou exame	Em classe, todos os alunos respondem as perguntas do exame durante um período.
Avaliação	O professor comunica com os alunos os resultados obtidos.

Fonte: Adaptado de adaptado de "Zabala" (1998, p.56)

Existem outras duas unidades didáticas que podem ser consultadas em Zabala (1998). Dos modelos de sequência didática apresentados por este autor, podemos tirar duas conclusões: a primeira é que todos os modelos possuem começo, meio e fim, (apresentação, desenvolvimento e finalização com avaliação), e a segunda é que existe diferentes maneiras de se preparar uma aula, pois algumas são factuais, já outras mais conceituais, ou procedimentais e outras atitudinais.

A sequência didática é estipulada pelo professor, tanto com relação à cronologia, e observação do aluno no seu desenvolvimento, suas ações e aprendizado. Vez ou outra é necessário fazer alterações para alcançar os objetivos estipulados, de acordo com o contexto que interfere no processo de ensino aprendizagem.

Deste modo o próximo capítulo, apresentaremos uma proposta de ensino, usando a sequência didática embasada nas unidades didáticas sustentadas por Zabala (1998), com as adaptações necessárias, voltadas para o ensino da matemática, pautada nas habilidades e competências da BNCC, tendo como corpo o esquema apresentado no próximo capítulo.

6 PROPOSTA DIDÁTICA

Esta é uma Proposta apresentada com a finalidade de esquematizar uma sequência de aulas para auxiliar no ensino de polígonos regulares utilizando as construções geométricas além de outros recursos didáticos, além disso, pode ser adaptada para qualquer outro tipo de conteúdo.

DISCIPLINA: Matemática.
NOME DO PROFESSOR: Luiz Antônio de Assis Machado

Turma/Série: 2º ano do Ensino Médio.

TEMA: Geometria Plana – Polígonos Regulares.

CONTEÚDOS TRABALHADOS

- Ponto, reta, plano, ângulo, semirreta, segmento de reta, vértice e polígonos, estes conteúdos são mais conceituais e introdutórios;
- Circunferência e seus elementos, corda, arco são também conteúdos conceituais e procedimentais;
- Retas paralelas e perpendiculares, mediatriz e bissetriz;
- Área, perímetro de Polígonos regulares são conteúdos factuais e procedimentais;
- Centro, Ângulo interno de Polígono Regulares. Conteúdos estes que são mais conceituais e procedimentais.

HABILIDADES (BNCC)

- Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras);
- Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados;
- Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Tempo da sequência didática

- 8 aulas de 50 minutos cada.

Materiais necessários para a sequência didática

- O conteúdo dos capítulos 2, 3 e 4 deste trabalho organizado de forma sequencial, caderno para anotações, pincel ou giz, caderno de desenho, régua não graduada, compasso, tanto para o professor quanto para os alunos, e data show.

AULA 1

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

- Primeiramente, apresentar o principal material didático que será usado em sala de aula, régua não graduada e compasso.
- Logo depois, fazer um levantamento histórico (capítulo 2).
- Abordar os entes geométricos básicos.

Desenvolvimento

1º Momento: Apresentar o material didático: régua, explicando que não há necessidade dela ser graduada, pois é desprezada a mensuração do segmento de reta a ser construído, já o compasso é usado para elaborar circunferências.

2º Momento: Abordar a história focando nos principais aspectos que aponte a geometria como necessidade humana de sobrevivência. Assim, o aluno poderá perceber a utilidade dela em seu cotidiano. Sugestão: Usar figuras das primeiras divisões de terras e de imagens que o aluno associe com a história (para mostrar as figuras pode- se usar o Datashow ou imagens impressas).

3º Momento: Expor na lousa de forma organizada as imagens dos entes geométricos básicos (ponto, reta, plano, semirreta, segmento de reta, vértice e ângulo), sem identificação, em seguida questionar os alunos se conseguem identificar cada elemento conceituando-os, portanto neste momento espera-se que os alunos apresentem diversas definições.

A partir do conhecimento dos alunos, criar uma discussão abordando os conceitos formais sanando as dúvidas acerca do assunto e simultaneamente criando uma aprendizagem efetiva.

Conclusão

Finalizar esta aula revisando a nomenclatura de todos os entes geométricos básicos vistos, explicar que tudo que foi falado aparecerá de forma intrínseca nas atividades posteriores e que para se construir polígonos regulares precisaremos de outras construções básicas que serão ensinadas nas aulas seguintes.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

Aula 2

Organização da turma

- Os alunos ficarão em seus respectivos lugares.

Introdução

- Abordar sobre Retas paralelas e perpendiculares e construí-las
- Conceituar e construir bissetriz e mediatriz.

Desenvolvimento

Desenvolvimento

1º Momento: Revisar de forma concisa os conceitos da aula anterior.

2º Momento: Dividir a lousa em duas partes, em uma delas expor o conceito de reta paralela e na outra parte, o conceito de reta perpendicular.

Em seguida orientar os alunos a desenhar estas retas a partir do conceito exposto no quadro, sem auxílio de régua e compasso.

3º Momento: Após a realização das atividades, o professor deve ir a lousa interpretar o conceito juntamente com os alunos e construir com régua e compasso, em ambas as partes os respectivos desenhos, capítulo 3 subsecção (3.2.1 e 3.2.2). Assim a partir da associação das construções feitas no quadro, com régua não graduada e compasso e do seu desenho, o aluno perceberá a importância desses instrumentos geométricos.

Observação, conceitos que serão utilizados:

Definição de retas paralelas: são duas retas distintas que não se distanciam nem se aproximam, ou seja, nunca se cruzam.

Definição de retas perpendiculares refere-se a duas retas que se interceptam num ponto apresentando ângulo reto em relação ao cruzamento de ambas. Estas definições serão adotadas para se adequarem à linguagem do aluno.

4º Momento: Com a lousa ainda dividida em duas partes, numa delas expor o conceito de bissetriz e na outra, o de mediatriz capítulo 3 subsecção (3.3.1 e 3.3.2), introduzindo estas definições juntamente com a definição de lugar geométrico (3.3).

Em seguida orientar os alunos a desenhar bissetriz e mediatriz a partir dos conhecimentos adquiridos pela Aula 1, simultaneamente com das definições expostas no quadro, sem auxílio de régua e compasso.

5º Momento: Após a realização das atividades dos alunos, o professor deve ir a lousa interpretar os conceitos e construir com régua e compasso, em ambas as partes os desenhos relacionados.

Conclusão

Antes de finalizar a aula direcionar uma conversa interativa sobre o conteúdo ensinado.

Avaliação

Esta aula será avaliada de forma contínua por meio da observação do empenho, interesse e da participação dos alunos.

AULA 3

Organização da turma

- Os alunos ficarão organizados em dupla para que um auxilie o outro caso houver dúvidas.

Introdução

- Polígonos convexos e côncavos com uma breve abordagem sobre a definição de polígonos regulares.
- Circunferências e algumas de suas subdivisões: corda e arcos.
- Construção do Circuncentro.

Desenvolvimento

1º Momento: Fazer a projeção da Figura 22 utilizando *Datashow* e a partir dela definir polígonos capítulo 3, de forma oral com anotações na lousa.

2º Momento: Fazer a projeção da figura 23 também utilizando *Datashow* definindo de forma oral e com anotações na lousa, polígonos côncavos e convexos. Encerrar este momento enunciando a definição de polígonos regulares, frisando-a.

3º Momento: Projetar através do *Datashow*, objetos do cotidiano que possuam as características de uma circunferência (rodas de veículos em geral, ventiladores circulares, disco de vinil, CDs, etc.), fazendo uma relação dos objetos com as Figuras 24, 25 e 26 aproveitando esta situação para definir circunferência e sua subdivisões.

4º Momento: Usar a lousa para construir com régua e compasso o circuncentro, capítulo 3 subsecção 3.3.5, dialogando e mostrando que este é um lugar geométrico pertencente a um polígono de três lados e além disso, é o centro da circunferência que circunscrita o triângulo.

Conclusão

Antes de finalizar a aula direcionar uma conversa interativa sobre o conteúdo ensinado, ressaltando que existem outros três pontos notáveis num triângulo abordando- os de forma superficial pelo fato de não serem úteis às futuras construções geométricas.

Avaliação

Esta aula será avaliada de forma contínua e qualitativa, feita através de observação do professor no empenho, interesse e da participação dos alunos.

AULA 4

Organização da turma

- Os alunos ficarão organizados em duplas.

Introdução

- Definir e construir um polígono regular de três lados (triângulo equilátero);
- Deduzir as expressões que determinam o perímetro, a área e como obter o valor do ângulo externo do polígono em questão.
- Resolver cinco exercícios propostos.

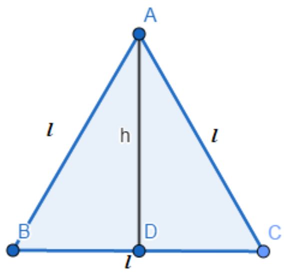
Desenvolvimento

1º Momento: Desenhar três ou mais triângulos quaisquer na lousa, de forma que pelo menos um deles tenha aparentemente os três lados de mesma medida. Questionar os alunos qual(is) triângulo(s) possui ou possuem tal característica. A partir desta discussão relembrar a definição de polígono regular e apresentar a definição de um triângulo equilátero.

2º Momento: Construir com régua e compasso um triangulo equilátero de medida qualquer, item 4.1 do capítulo 4.

3º Momento: Deduzir na lousa, levando em consideração o triângulo equilátero de vértices A, B e C com lados medindo l e mediatriz h, as expressões que determinam seu perímetro, sua área e a medida de cada ângulo interno.

Figura 41 – Triangulo Equilátero



Fonte: Autor

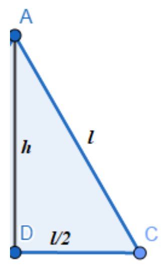
Definição de perímetro: O Perímetro é a medida do comprimento de um contorno, ou seja, é a soma das medidas dos lados de um polígono.

$$P = 3l \tag{6.1}$$

Definição de área. A Área é a região plana interna delimitada pelos lados de um polígono. Tal conceito é amplamente usado no dia-a-dia, como na medição de um terreno, na delimitação de um espaço, entre outros. O valor da área de um polígono varia de acordo com seu formato. Cada polígono tem uma forma peculiar para calcular sua área.

Nesse caso não sabemos a medida da mediatriz h, que deverá ser calculada através do Teorema de Pitágoras ao se tomar o triângulo retângulo de vértices A, D e C. Veja:

Figura 42 – Triangulo retângulo



Fonte: Autor

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$
$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$
$$4h^2 = 4l^2 - l^2$$
$$4h^2 = 3l^2$$
$$h^2 = \frac{3l^2}{4}$$
$$\sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$
$$h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De acordo com a medida da altura h calculada, determinaremos a área do triângulo equilátero com base na seguinte fórmula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A = \frac{l \cdot l\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$A = \frac{l \cdot l\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \tag{6.2}$$

Um ponto importante do estudo dos ângulos nos polígonos é a soma dos ângulos internos. Esperamos que os discentes já saibam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180. Em um polígono regular de n lados, como todos os ângulos internos são congruentes, podemos calcular cada um deles através da expressão:

A_i o valor de cada ângulo interno.

S_i a soma dos ângulos internos de um polígono.

$$A_i = \frac{S_i}{n} \text{ e } S_i = (n-2) \cdot 180^{\text{o}} \tag{6.3}$$

Vejamos que as expressões (6.1) e (6.2) determinadas calculam respectivamente o perímetro e a área de qualquer triângulo equilátero com base na medida de seu lado e a expressão (6.3) calcula a medida dos ângulos internos deste polígono.

4º Momento: Entregar a proposta de atividade impressa para que cada grupo acompanhe a resolução dos três primeiros exercícios e as demais questões deverão ser resolvidas por eles, utilizando as expressões desenvolvidas na etapa anterior.

1- Determine a medida do perímetro e da área de um triangulo equilátero, com lados medindo 12 metros de comprimento.

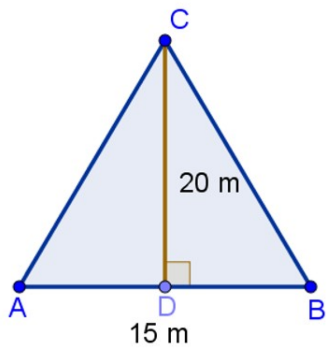
2- Um terreno com formato de triângulo equilátero será concretado. Sabendo que esse terreno possui perímetro de 450 metros, calcule quantos metros quadrados de concreto serão gastos nessa obra.

3- Qual a medida da lateral de um triângulo equilátero que possui área total medindo $100\sqrt{3}\ cm^2$?

4- Qual é a área de um triângulo isósceles cuja altura relativa à base é igual a 12 cm e cujos lados congruentes medem 15centímetros?

5- O triângulo a seguir representa um terreno que será impermeabilizado para receber futuras obras. O metro quadrado do material impermeabilizante custa R$ $9,23$. Calcule o valor que será gasto nesse procedimento.

Figura 43 – Triangulo Equilátero



Fonte: Autor

Conclusão

Correção da atividade que compreendem duas questões propostas.

Avaliação

Avaliar o conhecimento adquirido a partir da correção dos exercícios feitos pelos alunos.

AULA 5

Organização da turma

- Os alunos ficaram organizados em grupos de quatro integrantes.

Introdução

- Definir e construir um polígono regular de quatro lados.
- Deduzir as expressões que determinam o perímetro, a área e como obter o valor do ângulo externo do polígono em questão.
- Resolver alguns exercícios propostos.

Desenvolvimento

1º Momento: Entregar a cada grupo quatro canudinhos de refrigerante e um pedaço de barbante de modo que os canudos caibam todos no barbante, pedir que os grupos tentem construir um quadrado questionando o motivo dos canudos serem todos iguais.

2º Momento: Após a discussão, construir com régua e compasso o quadrado dada sua diagonal, construção contida no capítulo 4, subseção 4.2.

3º Momento: Deduzir na lousa, levando em consideração o quadrado de vértices, B, C, D e A, com lados medindo expressões que determinam seu perímetro, sua área e a medida de cada ângulo interno.

O Perímetro do quadrado é obtido de forma simples, já que são quatro lados iguais medindo l então,

$$P = 4 \cdot l \tag{6.4}$$

Para calcular a área de um quadrado, a forma mais simples é multiplicar a medida de um lado pelo outro, ou seja,

$$A = l^2 \tag{6.5}$$

Independente da medida e da quantidade de lados de qualquer polígono regular o ângulo interno é calculado de forma análoga para todos.

$$A_i = \frac{S_i}{n} \tag{6.6}$$

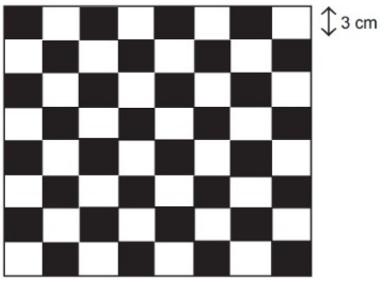
$$S_i = (n-2) \cdot 180^{\circ}$$

Vejamos que as expressões (6.4) e (6.5) determinadas, calculam respectivamente o perímetro e a área de qualquer quadrado com base na medida de seu lado e a expressão (6.6) calcula a medida dos ângulos internos deste polígono.

4º Momento: Entregar a proposta de atividade impressa para que cada grupo acompanhe a resolução dos dois primeiros exercícios e a última questão deverá ser resolvida por eles, utilizando as expressões desenvolvidas na etapa anterior.

1- (ETEC – SP – 2009) O xadrez é considerado mundialmente um jogo de estratégias que utiliza um tabuleiro quadrangular, conforme ilustra a figura a seguir. Considerando que todos os quadrados que compõem o tabuleiro, pretos e brancos, possuem 3 cm de lado, a área total dos quadrados pretos, em centímetros quadrados, é igual a

Figura 44 – Tabuleiro de Xadrez



Fonte: ETEC SP 2009

a) 9 b) 144 c) 288 d) 432 e) 576

2- (UFMT) Assinale a medida do lado de um quadrado sabendo que o número que representa seu perímetro é o mesmo que representa sua área.

a) 5 b) 4 c) 6 d) 8

3- Joaquim planeja cercar e gramar uma área quadrada que herdou de seus avós. Para construir a cerca, gastará R$ $73,00$ por metro e, para plantar a grama, gastará R$ $39,90$ por metro quadrado. Sabendo que o lote de Joaquim possui lado igual a 250 metros, quanto ele gastará para gramá-lo e cercá-lo?

a) R$ $100.000,00$ b) R$ $20.000,00$ c) R$ $73.000,00$ d) R$ $2.566.750,00$

Conclusão

Correção da atividade que compreende a última questão propostas.

Recolher o barbante e canudo utilizados para confecção de quadrados para serem aproveitados na aula posterior para elaboração do pentágono.

Avaliação

Avaliar o conhecimento adquirido a partir da correção do exercício feito pelos alunos.

AULA 6

Organização da turma

- Os alunos ficaram organizados em grupos de quatro integrantes.

Introdução

- Definir e construir um polígono regular de cinco lados.
- Deduzir as expressões que determinam o perímetro, a área e como obter o valor do ângulo externo do polígono em questão.
- Resolver alguns exercícios propostos.

Desenvolvimento

1º Momento: Entregar a cada grupo cinco canudinhos de refrigerante e um pedaço de barbante de modo que os canudos caibam todos no barbante, pedir que os grupos tentem construir um pentágono questionando o motivo dos canudos serem todos iguais.

2º Momento: Esta construção requer uma construção do circuncentro feita na aula 3, relembra-la e após a discussão, construir com régua e compasso o pentágono regular, contida no capítulo 4, subseção 4.3.

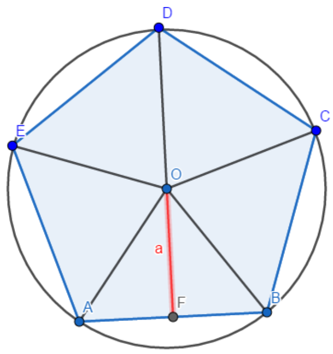
3º Momento: Deduzir na lousa, levando em consideração o pentágono inscrito de vértices A, B, C, D, e E com lados medindo expressões que determinam seu perímetro, sua área e a medida de cada ângulo interno.

O Perímetro do pentágono regular é obtido de forma simples, já que são cinco lados iguais medindo l então,

$$P = 5l \tag{6.7}$$

Ao decompormos o pentágono regular, são formados 5 triângulos iguais. É justamente a partir do cálculo da área do triângulo que é possível chegar à área do pentágono.

Figura 45 – Pentágono Regular



Fonte: Autor

Para conseguirmos fazer o cálculo da área do triângulo, o primeiro passo é traçar uma reta do centro do pentágono até o ponto médio do lado que corresponde à base do pentágono, reta essa que é chamada de apótema a.

Passo 1: identificar o apótema, esta que pode ser construída através da mediatriz do lado AB pois tem as características da mesma.

Passo 2: Obter a área do triângulo isósceles ABO no qual a base mede l e altura é a apótema a.

$$A = \frac{l \cdot a}{2}$$

Passo 3: Multiplicar por 5 essa área pois são cinco triângulos isósceles congruentes.

$$A = \frac{5 \cdot l \cdot a}{2}$$

Com essa equação podemos observar que a área do pentágono regular é obtida através do produto entre seu perímetro e a apótema.

$$A = \frac{P \cdot a}{2} \tag{6.8}$$

Ângulo interno do pentágono regular é obtido através da expressão.

$$A_i = \frac{S_i}{n} \tag{6.9}$$

$$S_i = (n-2) \cdot 180^{\text{o}}$$

Vejamos que as expressões (6.7) calcula-se o perímetro de qualquer pentágono regular, (6.8 calcula-se a área de qualquer pentágono regular com base na medida de seu lado e de seu apótema, e a expressão (6.9) calcula a medida dos ângulos internos deste polígono.

4º Momento: Entregar a proposta de atividade impressa para que cada grupo acompanhe a resolução dos dois primeiros exercícios e a última questão deverá ser resolvida por eles, utilizando as expressões desenvolvidas na etapa anterior.

Conclusão

Correção da atividade que compreende a última questão propostas.

Avaliação

Avaliar o conhecimento adquirido a partir da correção do exercício feito pelos alunos.

AULA 7

Organização da turma

- Os alunos ficaram organizados em grupos de quatro integrantes.

Introdução

- Definir e construir um polígono regular de seis lados.
- Deduzir as expressões que determinam o perímetro, a área e como obter o valor do ângulo externo do polígono em questão.
- Resolver alguns exercícios propostos

Desenvolvimento

1º Momento: Projetar através do Datashow, objetos do cotidiano que possuam as características de um hexágono regular e em seguida construir na lousa o polígono que está no capítulo 4, subseção 4.3 fazendo a relação desta com as figuras ilustrativas projetadas.

Figura 46 – Ilustrações de hexágonos

Fonte:
https://folhadonortepr.com.br/domingo-dia-21-tem-a-quarta-rodada-da-copa-bandeirantes-de-futebol/
https://www.mercadaochapaferro.com.br/serralheria/241/parafuso-porca-e-arruela/chapa-metalica/parafuso-sextavado-com-porca.html

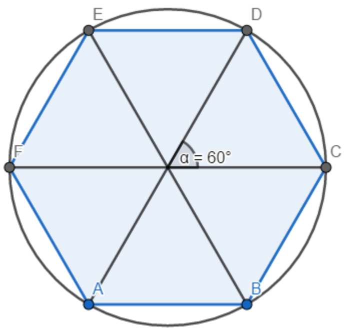
2º Momento: Deduzir na lousa, levando em consideração o hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, e F, com lados medindo l, expressões que determinam seu perímetro, sua área e a medida de cada ângulo interno.

O Perímetro do hexágono regular é obtido de forma simples, já que são seis lados iguais medindo l então,

$$P = 6 \cdot l \tag{6.10}$$

O hexágono regular circunscrito numa circunferência irá dividi-lo em seis arcos de mesma medida. Como o hexágono é regular, os arcos formados irão medir 60º (360º : 6 = 60º). Cada lado irá formar com o centro um ângulo central que terá a mesma medida do arco, 60º.

Figura 47 – Hexágono Regular



Fonte: Autor

Assim, podemos dizer que cada arco da circunferência irá formar com seu ângulo central seis triângulos equiláteros no hexágono regular.

Em aulas anteriores vimos que para se obter a área de um triangulo equilátero usamos a expressão,

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

Basta então multiplicar essa expressão por 6.

$$A = \frac{6 \cdot l^2\sqrt{3}}{1}$$

$$A = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \tag{6.11}$$

Ângulo interno do hexágono regular é obtido através da expressão.

$$A_i = \frac{S_i}{n} \tag{6.12}$$

$$S_i = (n-2)\cdot 180^{\text{o}}$$

Vejamos que as expressão (6.10) calcula-se o perímetro de qualquer hexágono regular, a expressão (6.11) calcula-se a área de qualquer hexágono regular com base na medida de seu lado e de seu apótema, e a expressão (6.12) calcula a medida dos ângulos internos deste polígono.

3º Momento: Entregar a proposta de atividade impressa para que cada grupo acompanhe a resolução do segundo e do quarto exercício e as demais questões deverá ser resolvida por eles, utilizando as expressões desenvolvidas na etapa anterior.

1- Determine a área de um hexágono regular que tem 30 cm de perímetro.

2- Determine o raio da circunferência que circunscrita um hexágono regular de lado medindo 7 cm.

3- Um círculo de 5 cm de raio está inscrito em um hexágono regular. Determine o perímetro e a área do hexágono.

4- O apótema do pentágono inscrito numa circunferência é igual a 2 cm. Determine a área do hexágono regular inscrito nessa mesma circunferência.

Conclusão

Correção da atividade que compreende a última questão propostas.

Avaliação

Avaliar o conhecimento adquirido a partir da correção do exercício feito pelos alunos.

AULA 8

Organização da turma

- Os Alunos ficaram em seus respectivos lugares.

Introdução

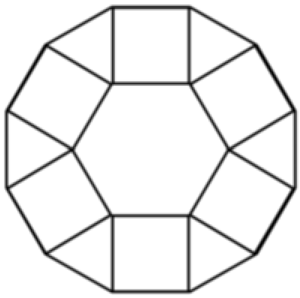
- Resolução de três questões da OBMEP para revisão e fixação do conteúdo.

Desenvolvimento

1º Momento: Entregar a proposta de atividade impressa para que cada aluno acompanhe a resolução dos três problemas propostos para esta aula.

1- (Obmep 2012) A figura mostra um dodecágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros, seis quadrados e um hexágono regular, todos com lados de mesma medida.

Figura 48 – Dodecágono

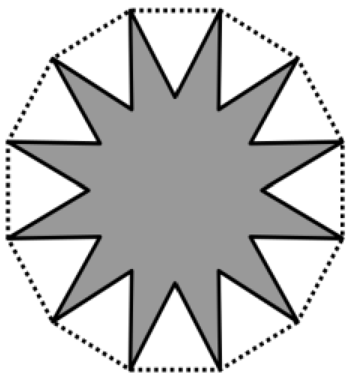


Fonte: Obmep 2012

a) Se cada triangulo tem área igual a 1 cm^2, qual a área do hexágono.

b) A figura abaixo foi obtida retirando doze triângulos equiláteros de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm. Qual a área dessa figura??

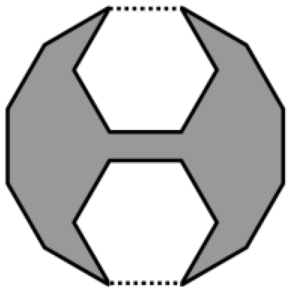
Figura 49 – Estrela de doze pontas



Fonte: Obmep 2012

c) A figura abaixo foi obtida retirando dois hexágonos regulares de um dodecágono regular cujo lado mede 1 cm. Qual é a área dessa figura?

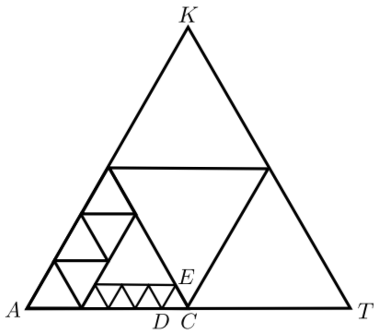
Figura 50 – Dodecágono retirado dois hexágonos regulares



Fonte: Obmep 2012

2- (OBMEP 2013) Neste desenho todos os triângulos são equiláteros.

Figura 51 – Vários triângulos equiláteros

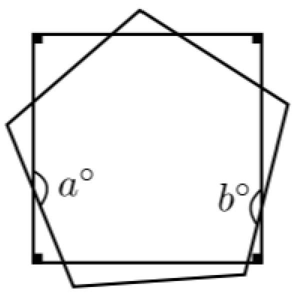


Fonte: Obmep 2013

Sendo o perímetro do triângulo AKTigual a 108 cm, calcule o perímetro do triangulo DEC.

3- A figura abaixo é composta por um quadrado e um pentágono regular,

Figura 52 – Vários triângulos equiláteros



Fonte: Obmep 2013

Calculo a soma dos ângulos a^o e b^o

Conclusão Concluir esta aula com um feedback sobre polígonos regulares e sua definição, discutindo sobre a existência de polígonos regulares distintos dos trabalhados em sala de aula, mas que não são muito abordados no nível médio.

Avaliação

A avaliação nesta aula será feita de forma paralela, observando comportamento, participação e interesse dos alunos.

FINALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA

Avaliação de aprendizagem, na qual o professor (a) através de um exame, ira aferir se os alunos aprenderam ou não sobre o conteúdo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No ensino aprendizagem da Matemática, há uma cultura cristalizada voltada para dificuldade da disciplina, Zabala (1988) com a teoria sobre sequência didática, propõe uma ferramenta positiva para a quebra desta barreira educacional. Nessa perspectiva, criar uma proposta didática sobre o ensino de polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular e hexágono regular) tornou-se o foco principal para essa pesquisa e no decorrer da sua elaboração, percebi que a mesma é complemente possível e alcançável.

Pude notar que, para se chegar ao objetivo preestabelecido, era preciso, criar um percurso evolutivo no trabalho, realçando que o mesmo se constrói em uma própria sequência, primeiramente fazendo uma abordagem histórica, em seguida falando de entes básicos primordiais da geometria, mostrar a construções geométrica básicas, por conseguinte a de alguns polígonos regulares, o conceito de sequência didática e finalizando com a proposta didática, evidenciando que os saberes são resultados somatórios de aprendizagens.

Todo esse percurso, proporcionou-me uma reflexão, não apenas enquanto professor, mas em como o ensino de matemática tem que ser repensado, no intuito de se mediar uma aprendizagem efetiva no aluno.

Pesquisando sobre o assunto, várias dúvidas surgiram, o que propiciou um dos maiores desafios da minha vida profissional, por ainda não ter trabalhado a sequência didática. Foi confortante percebe-la como uma possibilidade de ensino, tive minhas dificuldades pois a didática no ensino da matemática por ser uma área que ainda não havia explorado.

Este trabalho não termina aqui, tenho intenções de colocá-lo em prática na docência e essa experiência naturalmente acarreta em uma linha para desenvolver possíveis trabalhos futuros, além disso essa pesquisa serve como uma alternativa efetiva no ensino, não só de polígonos regulares, mas de qualquer conteúdo, contendo propostas possíveis para a realidade em sala, ou seja, essa pesquisa torna-se útil não só para o professor, mas também para o aluno maior beneficiado, pois este assume um protagonismo nas aulas propostas dentro da sequência e assim sua aprendizagem torna-se algo não distante , porém próxima da sua realidade.

REFERÊNCIAS

BANDEIRA, J. S. **O ensino do desenho geométrico**. CADES, v. 1, p.74-78, 1957

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo padrões pitagóricos:** geométricos e numéricos. São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher Universidade de São Paulo, 1974. 488 p. Tradução de: Elza F Gomide.

CARVALHO, Benjamin de A. Desenho Geométrico. 3. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1967.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: Ática, 1990. 88 p.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática Elementar 9**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. 451 p.

ELEMENTOS. Rio Branco: Edufac, v. 2, n. 2, 2013. Anual. Disponível em: <Http://www2.ufac.br/elementos/edicoes/edicao-no-03-2013/revista-elementos-n03-2013.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2019.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. 5. ed. Campínas Sp: Unicamp, 2011. 843 p. Tradução de: Hygino H. Domingues.

FRANCO JR., H. **A idade média:** nascimento do ocidente. São Paulo, SP: Brasiliense, 2001.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 346 p.

LIBANEO, José Carlos. **Didática.** São Paulo: Cortez, 1994. 263 p.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** Campínas Sp: Autores Associados, 2006. 139 p.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática:** Fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHmat, 2016. 127 p.

NASCIMENTO; R. A. **A função do desenho na educação.** Tese de doutorado. Pós-Graduação em Educação. Faculdade de Filosofia e Ciências. Marília, SP: UNESP, 1999

PUTNOKI, José Carlos. **Que se devolvam a Euclides a régua e compasso**. Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática São Paulo: Associação Palas Athena do Brasil, 13, p.13-17, 2º sem./1988.

ROQUE, Tatiana Marins. **História da Matemática:** Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. Etnomatemática e Modelagem: a análise de um problema retórico babilônio. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, Coreia, v. 6, n. 3, p.80-103, oct. 2013.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2007. 110 p.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p. Tradução de: Ernani F. da F. Rosa.

ZUIN, E. S. L. **Da régua e do compasso:** as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Belo Horizonte, MG: Universidade Federal de Minas Gerais, 2001.

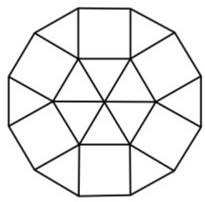
8 APÊNDICES

8.1 Apêndice A

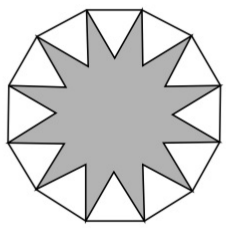
Resolução das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas utilizadas como proposta da aula 8, capítulo 6.

Questão 1

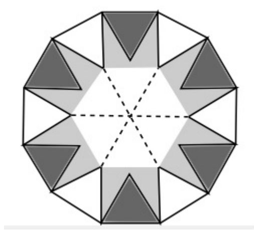
a) A figura abaixo mostra que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos iguais aos triângulos que fazem parte do dodecágono. Como cada um desses triângulos tem área de 1 cm^2, segue que o hexágono tem área igual a 6 cm^2.



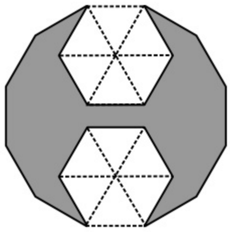
1^a solução: A figura do item anterior mostra que todo dodecágono regualar pode ser decomposto em doze triângulos equiláteros iguais e seis quadrados. Desse modo, ao retirar doze triângulos do dodecágono, a estrela que sobra tem área igual à área de seis quadrados. Como o lado do dodecágono mede 1 cm, cada quadrado tem área 1 cm^2 e assim a área da estrela é 6 cm^2.



2^a solução: Podemos decompor o hexágono central em seis triângulos e “encaixá-los” como indicado na figura abaixo. A figura assim obtida tem a mesma área da estrela e consiste de seis quadrados de lado 1 cm; sua área é então 6 cm^2.

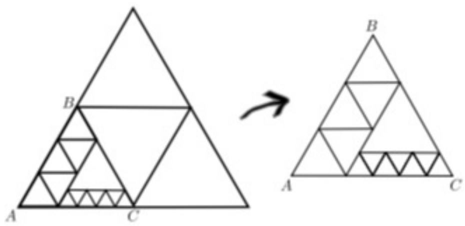


c) A figura abaixo mostra que os dois hexágonos retirados têm a mesma área que doze triângulos equiláteros; como no item b), a região cinza tem a mesma área que seis quadrados de lado 1 cm; sua área é então 6 cm^2.

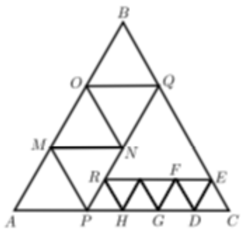


Questão 2

Vamos começar olhando o triângulo ABC.



Daremos nomes aos pontos do triângulo ABC como indicado na figura seguinte:



Note que o quadrilátero $PREC$ contém sete triângulos equiláteros em seu interior. Vamos mostrar que o comprimento dos lados desses sete triângulos são todos iguais (isto é, que esses triângulos são congruentes). De fato , os triângulos FED e DEC são equiláteros e possuem um lado em comum. Logo os três lados de cada um desses triângulos devem ter o mesmo comprimento. Do mesmo modo, os triângulos GFD e FED são equiláteros e possuem um lado em comum, logo têm lados com o mesmo comprimento. Repetindo esse argumento para cada par de triângulos com lado comum no quadrilátero $PREC$, podemos concluir que todos esses sete triângulos são congruentes.

Chamemos de x a medida em centímetros do comprimento do lado do triângulo equilátero DEC. Note, em particular que o comprimento do segmento PR é igual a

x, já que ele é um dos lados do triângulo PRH. Como o segmento PC é constituído pela base de quatro triÂngulos congruentes a DEC, temos que $\underline{PC} = 4 \times x$. Da mesma forma, o segmento RE sendo constituído pela base de três triângulos congruentes a DEC, tem comprimento igual a $\underline{RE} = 3 \times x$. O triângulo RQE é equilátero e sua base tem comprimento igual a $\underline{RE} = 3 \times x$, o que nos fornece: $\underline{RQ} = \underline{RE} = 3x$. Então:

$$\underline{PQ} = \underline{PR} + \underline{RQ} = x + 3 \times x = 4x \tag{8.1}$$

Repetindo o argumento que foi usado para o quadrilátero $PREC$, podemos concluir que o tamanho dos lados de todos os cinco triângulos que estão contidos no quadrilátero $ABQP$ coincidem (isto é, esses cinco triângulos são congruentes). Em particular

$$\underline{AM} = \underline{PN} = \underline{NQ}.$$

Como $\underline{PN} = \underline{NQ}$ e $\underline{PQ} = \underline{PN} + \underline{NQ}$ temos que

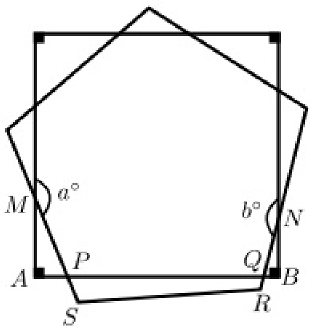
$$\underline{PQ} = 2\underline{PN} = 2\underline{NQ} = 2\underline{AM}$$

Os triângulos ABC e BCL são equiláteros com um lado comum. Portanto eles são congruentes. Pelo mesmo motivo, os triângulos BCL e BLK são congruentes. Então usando[1], temos que $\underline{AB} = \underline{BK} = 6 \times x$. Assim, vale que $\underline{AK} = \underline{AB} + \underline{BK}$, isto é, o lado do triângulo AKT tem o comprimento igual a $12 \times x$ e o seu perímetro é portanto igual a $36 \times x$.

Ora, sabemos que o perímetro do triângulo ABC é igual a 108 cm. Logo vale que $36 \times x = 108$ cm, de onde concluímos que $x = 3$ cm. Observe que o perímetro de um triângulo equilátero equivale é igual a três vezes o comprimento de seu lado. Como x foi definido como sendo o comprimento do lado triângulo DEC, o perímetro desse triângulo é igual a $3 \times x = 9$ cm.

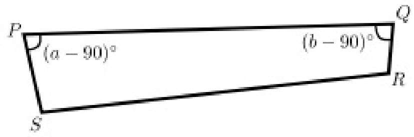
Questão 3

Observe o triângulo APM na seguinte figura:



1 a referência tá (.3) mas nenhuma equação anterior está nomeada com (.3) verificar

Como $AMP = (180 - a)^0$, e a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180^0, então $A\hat{P}M = (a - 90)^0$. Aplicando o mesmo argumento ao triângulo BQN, obtemos que $B\hat{Q}N = (b - 90)^0$. Note que $S\hat{P}Q = A\hat{P}M = (a - 90)^0$ e que $P\hat{Q}R = B\hat{Q}N = (b - 90)^0$ já que $S\hat{P}Q$ e $A\hat{P}M$ são ângulos opostos pelo vértice P e, analogamente, $P\hat{Q}R$ e $B\hat{Q}N$ são opostos pelo vértice Q. Vamos nos concentrar no quadrilátero $SPQR$ ilustrado abaixo:



Sendo o pentágono regular, todos os seus cinco ângulos internos são iguais, assim a soma dos seus ângulos internos é igual a $5 \times P\hat{S}R$. Como a soma dos ângulos internos do pentágono é 540^0, logo temos que $5 \times P\hat{S}R = 540^0$ de onde obtemos que $P\hat{S}R = 108^0$. Como a medida de $Q\hat{R}S$ é igual à de $P\hat{S}R$, temos que $Q\hat{S}R = 108^0$.

A soma dos ângulos do quadrilátero $PQRS$ é igual a 360^0. Portanto,

$$(a - 90)^0 + (b - 90)^0 + 108^0 + 108^0 = 360^0$$

logo, temos que $(a + b)^0 - 180^0 + 108^0 + 108^0 = 360^0$ de onde concluímos que $a^0 + b^0 = 324^0$.