UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

THIAGO MARQUES DA SILVA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH PARA CONTRAÇÕES E ALGUMAS APLICAÇÕES.

ARRAIAS-TO
2019

THIAGO MARQUES DA SILVA

O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH PARA CONTRAÇÕES E ALGUMAS APLICAÇÕES.

Esta monografia foi avaliada e apresentada à Universidade Federal do Tocantins -UFT Campus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Matemática para obtenção do título de graduado e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: Robson Martins de Mesquita

ARRAIAS-TO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

M357t Marques da Silva , Thiago .
O Teorema do Ponto Fixo de Banach para Contrações e Algumas Aplicações. / Thiago Marques da Silva . – Arraias, TO, 2019.
56 f.

Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2019.
Orientador: Robson Martins de Mesquita

1. Introdução. 2. Aspectos Topológicos do Espaço \R^n. 3. Demonstração do Teorema . 4. Algumas Aplicações. I. Título

CDD 510

Este trabalho é dedicado primeiramente a Deus, pelo dom da vida. A meus pais Fredson Marques dos Santos e Helena Pereira da Silva e a meus irmão Diego Marques da Silva e Diogo Marques da Silva. Dedico ainda a minha futura geração (Filhas/Filhos).

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por ser tudo na minha vida, por me dar forças, saúde, e esperanças para superar todos os meus obstáculos. Sempre conduzindo meus passos.

A meus pais Fredson Marques dos Santos e Helena Pereira da Silva pelo incentivo amor e carinhos transmitido a mim em todo momento, mesmo que a distância venha a ser um fator de desânimo. Também agradeço pela compreensão de ambos, por não me deixarem desanimar ou desistir de meus sonhos, apoiando-me nas diversas dificuldades que tive que enfrentar.

A meus irmãos Diogo Marques da Silva e Diego Marques da Silva que me apoiam e me incentivam de várias maneiras me passando várias lições de vida mesmo eu sendo o irmão mais velho. Não tenho como expressar a minha gratidão por vocês.

A meus amigos de turma e de diversões Yago Rodrigues, Carlos Vinicius, Leticia Luiza e a Juliana Barcelos pelo companheirismo e por tornar os dias mais cansativos e enfadonhos em sorrisos e alegria, tornando-os melhores momentos. E pelo conhecimento que me é transmitido através de vocês.

Ao meu Professor e Orientador, Robson Martins de Mesquita, por ter topado encarar o desafio da construção deste trabalho onde pela sua parceria e orientação me transmitiu grande conhecimento. Por sua paciência e disponibilidade. Por tornar nosso trabalho muito produtivo e por acreditar em minha capacidade. Deixo aqui meus agradecimentos.

Enfim agradeço a todos que contribuíram imensamente com a minha formação profissional e meu crescimento humano. Sou e serei o resultado da confiança de todos vocês.

Muito obrigado!!

“ Cavalheiros, que isto certamente seja verdadeiro é absolutamente paradoxal;
não podemos entender a fórmula, não sabemos o que significa.
Mas conseguimos prova-la e, portanto sabemos que deve ser verdade.”
(Benjamin Pierce)

Resumo

Este trabalho tem por objetivo principal abordar um breve conceito de Espaços Métricos, a fim de apresentarmos e demonstrarmos o Teorema do Ponto Fixo de Banach no Espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Além disso, exibir algumas de suas aplicações, em especial uma demonstração de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias. Para isto, tivemos a necessidade de estudarmos, inicialmente, conceitos essenciais tais como o Aspectos Topológico do Espaço $\mathbb{R}^n$, Espaços Métricos e Espaços Métricos Completos, a fim de definirmos Espaços de Banach e em seguida enunciarmos, demonstrarmos e mostrar algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações a qual nos diz que se $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo, toda contração $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ possui um único ponto fixo em $\mathbb{R}^n$, isto é, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x$.

Palavras-chave: Teorema do Ponto Fixo de Banach; Espaços Métricos; Espaços Métricos Completo; Contrações.

Abstract

This paper aims to address a brief concept of Metric Spaces in order to present and demonstrate Banach's Fixed-Point Theorem in Euclidean Space-ndimensional $\mathbb{R}^n$. In addition, display some of its applications, especially in the demonstration of Existence and Uniqueness of Solutions of Ordinary Differential Equations. For this, we had to first study essential concepts such as the Topological Aspects of Space $\mathbb{R}^n$, Metric Spaces and Spaces Complete Metrics, in order to define Banach Spaces and then to enunciate, demonstrate and show some applications of the Banach's Fixed-Point Theorem for contractions which tells us that if $\mathbb{R}^n$ is a complete metric space, every contraction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ has a single fixed point in $\mathbb{R}^n$, that is, there exists a unique $x \in \mathbb{R}^n$ such that $f(x) = x$.

Keywords: Banach Fixed-Point Theorem; Metric Spaces; Full Metric Spaces; Contractions.

Lista de ilustrações

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A razão que me estimulou a construção deste trabalho, originou-se em um anseio de expandir conhecimentos no domínio da Matemática para além dos adquiridos na Licenciatura. O curso de Espaços Métricos e de Topologia do Espaço $\mathbb{R}^n$ não fazem parte da minha formação acadêmica. Por isto a escolha deste tema, que possibilitará uma complementação na minha formação.

Faremos um estudo sobre o Aspecto Topológico do Espaço Euclidiano n-dimensional ($\mathbb{R}^n$) e sobre Espaços Métricos, com um intuito de mostrarmos que o espaço $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico, em específico um Espaço Métrico Completo. Alguns conceitos e teoremas que foram utilizados neste trabalho não serão apresentados, pois já foram demonstrados durante o curso. No entanto, é conveniente que o leitor tenha conhecimento referente aos cursos de Cálculo, Álgebra Linear e alguma noção de Análise para facilitar o acompanhamento do texto.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações é um resultado atribuído a espaços métricos completos, onde possuem muitas aplicações, em particular na demonstração da existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias. Aqui enunciamos e demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Banach no espaço $\mathbb{R}^n$, a qual nos garante que sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo, toda contração $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ possui um único ponto fixo em $\mathbb{R}^n$, ou seja, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x$.

Na demonstração deste teorema uma estratégia considerada para obter pontos fixos é a de a partir de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer, aplicar-se f sucessivas vezes, onde obtemos uma sequência $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$, onde fazendo $n \longrightarrow \infty$, se a sequência convergir, esperamos obter um elemento $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x$. Esta estratégia é bastante usado em Análise e Cálculo Numérico e é conhecida como *Método das Aproximações Sucessivas.*

Este trabalho está organizado em três capítulos além da introdução, com os seguintes temas: Aspectos Topológicos do $\mathbb{R}^n$, Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas Aplicações. E que serão explorados da seguinte maneira:

No Capítulo 2, trataremos do estudo do Aspectos Topológicos do Espaço $\mathbb{R}^n$. Definimos os conceitos de Espaço Euclidiano n-dimensional, Bolas e Conjuntos Limitados, Sequências no $\mathbb{R}^n$, Conjuntos Abertos e Fechados e Continuidade. No Capítulo 3, tratamos do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Onde assim foram definido os conceitos de Espaços Métricos, Espaços Métrico Completo e o Método das Aproximações Sucessivas. Por fim, no Capítulo 4, trataremos de Algumas Aplicações onde este será aplicado o Teorema do Ponto Fixo de Banach em alguns problemas de áreas distintas da matemática, em especial em uma demonstração de Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias.

2 ASPECTOS TOPOLÓGICO DO ESPAÇO $\mathbb{R}^n$

Embora nossa visualização geométrica não se estenda além do espaço tridimensional, é possível, mesmo assim, estender para além do espaço tridimensional muitas das ideias familiares trabalhando não com as propriedades geométricas de pontos e vetores, mas sim com suas propriedades numéricas ou algébricas. Neste Capítulo, iremos tornar estas idéias mais precisas. Para isso utilizaremos definições, exercícios e exemplos, sendo alguns destes releituras, das seguintes referencias [1], [3] e [6].

2.1 O Espaço Euclidiano n-dimensional

Definição 2.1.1. *Seja n um número natural. O Espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ é definido como o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, ou seja,*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Seus elementos, portanto, são vetores munidos de n entradas reais da forma $x = (x_1, ..., x_n)$. Para cada $i = 1, ..., n$, o termo x_i é denominado a *i-ésima coordenada* de x. Temos que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é o conjunto de números reais, onde é vista como a reta, pois existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares de números reais do plano e $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de triplas de números reais, que é o modelo do espaço euclidiano tridimensional.

Apesar da nossa intuição geométrica ser limitada para espaços de dimensão 4 em diante, procedemos por analogia definindo operações e conceitos similares aos que vimos no plano e no espaço.

Definição 2.1.2. *A adição faz corresponder a cada par de elementos $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ a soma,*

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

e a multiplicação por escalares reais $\alpha \in \mathbb{R}$ é definido como:

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n).$$

Estas operações fazem de $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais, no qual o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ é definido como $\overrightarrow{0} = (0, 0, ..., 0)$, e o *oposto* ou *simétrico* de x é denotado por $-x = (-x_1, ..., -x_n)$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.1.1. *Note que dois vetores* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *são iguais se, e somente se, cada coordenada o for, ou seja,* $x_i = y_i$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

A definição de soma e multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades abaixo. Estas seguem imediatamente das propriedades correspondentes dos números reais e da definição de $\mathbb{R}^n$. Com isso demonstraremos apenas as propriedades A1) e M1), onde as demais seguem de modo análogo.

Proposição 2.1.1. *Dados quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Então*

A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

A2) $x + y = y + x$;

A3) $x + \overrightarrow{0} = x$;

A4) $x + (-x) = \overrightarrow{0}$;

M1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

M2) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

M3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

M4) $1 \cdot x = x$.

Demonstração. Dados $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ e $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

A1)

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= (x_1, ..., x_n) + [(y_1, ..., y_n) + (z_1, ..., z_n)] \\
&= (x_1, ..., x_n) + (y_1 + z_1, ..., y_n + z_n) \\
&= (x_1 + (y_1 + z_1), ..., x_n + (y_n + z_n)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, ..., (x_n + y_n) + z_n) \\
&= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) + (z_1, ..., z_n) \\
&= [(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)] + (z_1, ..., z_n) \\
&= (x + y) + z.
\end{aligned}$$

M1)

$$\begin{aligned}
\alpha(x + y) &= \alpha[(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n)] \\
&= \alpha(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha(x_1+y_1),....,\alpha(x_n+y_n)) \\
&= (\alpha x_1+\alpha y_1,....,\alpha x_n+\alpha y_n) \\
&= (\alpha x_1,...,\alpha x_n)+(\alpha y_1,...,\alpha y_n) \\
&= \alpha(x_1,...,x_n)+\alpha(y_1,...,y_n) \\
&= \alpha x+\alpha y.
\end{aligned}$$

□

Noções geométricas como ângulos, perpendicularismo e comprimentos farão sentido com a introdução de um produto interno, onde esta será definida da seguinte forma:

Definição 2.1.3. *Um produto interno, usual do $\mathbb{R}^n$, é uma operação que associa a cada par de elementos $x=(x_1,...,x_n)$ e $y=(y_1,...,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, um número real dado por*

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

chamado produto interno de x por y, e satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 2.1.2. *Sejam x,y e $z\in\mathbb{R}^n$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ quaisquer, então*

P1) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$;

P2) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$;

P3) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle=\langle x,\alpha y\rangle$;

P4) $\langle x,x\rangle>0$ *se* $x\neq\overrightarrow{0}$;

P5) $\langle x,x\rangle=\Leftrightarrow x=\overrightarrow{0}$.

Demonstração. Dados $x=(x_1,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)$ e $z=(z_1,...,z_n)\in\mathbb{R}^n$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, temos que:

P1)

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \\
&= y_1x_1+y_2x_2+\cdots+y_nx_n \\
&= \langle y,x\rangle.
\end{aligned}$$

P2)

$$\begin{aligned}
\langle x,y+z\rangle &= \langle (x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)+(z_1,...,z_n)\rangle \\
&= \langle (x_1,...,x_n),(y_1+z_1,...,y_n+z_n)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x_1(y_1+z_1)+\cdots+x_n(y_n+z_n)\\
&= x_1y_1+x_1z_1+\cdots+x_ny_n+x_nz_n\\
&= x_1y_1+\cdots+x_ny_n+x_1z_1+\cdots+x_nz_n\\
&= \langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle.
\end{aligned}
$$

P3)

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha x,y\rangle &= \langle(\alpha x_1,...,\alpha x_n),(y_1,...,y_n)\rangle\\
&= \alpha x_1y_1+\cdots+\alpha x_ny_n\\
&= \alpha(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)\\
&= \alpha\langle x,y\rangle.
\end{aligned}
$$

Além disso, observe que

$$\langle x,\alpha y\rangle=\langle \alpha y,x\rangle=\alpha\langle y,x\rangle=\alpha\langle x,y\rangle.$$

P4) também é satisfeita já que $\langle x,x\rangle=\sqrt{{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2}>0$ pois $x\neq\overrightarrow{0}$ o que implica $x_i\neq 0\Rightarrow {x_i}^2>0$, $i\in\{1,...,n\}$.

P5) Por fim, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle x,x\rangle=0 &\Leftrightarrow {x_1}^2+\cdots+{x_n}^2=0\\
&\Leftrightarrow {x_1}^2=0,...,{x_n}^2=0\\
&\Leftrightarrow x_1=0,...,x_n=0.
\end{aligned}
$$

□

Definição 2.1.4. *A aplicação* $||\cdot||:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$||x||=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2}$$

é denominada norma euclidiana.

A norma euclidiana possui as seguintes propriedades imediatas:

NE1) $||x||>0$, se $x\neq\overrightarrow{0}$;

NE2) $||x||=0\Leftrightarrow x=\overrightarrow{0}$;

NE3) $||\alpha x||=|\alpha|||x||$;

As propriedades acima são consequências imediatas da definição da norma euclidiana e das propriedades análogas do produto interno que a define, listadas na Proposição 2.1.2: NE1) é consequência de P4), NE2) de P5) e NE3), provém de P3).

Definição 2.1.5. *Dois vetores* x *e* $y \in \mathbb{R}^n$ *são ditos ortogonais ou perpendiculares se* $\langle x, y\rangle = 0$, *e denota-se por* $x \perp y$.

Exemplo 2.1.1. *Considere os vetores* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, *que constituem a base canônica de* $\mathbb{R}^n$. *Estes vetores são dois a dois ortogonais, se distintos um do outro, ou seja,* $e_i \perp e_j$, *se* $i \neq j$, *e a verificação é simples: suponha, por exemplo, que* $i < j$. *Neste caso, teríamos que*

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot 0 = 0.$$

Do mesmo modo verifica-se que $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, *se* $i > j$.

Exemplo 2.1.2. *O vetor* $\overrightarrow{0}$ *é ortogonal a qualquer vetor de* $\mathbb{R}^n$, *pois seja* $x \in \mathbb{R}^n$, *temos que* $\langle x, \overrightarrow{0}\rangle = x_1 \cdot 0 + \cdots + x_n \cdot 0 = 0 + \cdots + 0 = 0$

Proposição 2.1.3. *Seja* $x \in \mathbb{R}^n$ *um vetor não-nulo. Então para todo* $y \in \mathbb{R}^n$, *o vetor* $z = y - \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x$ *é ortogonal a* x.

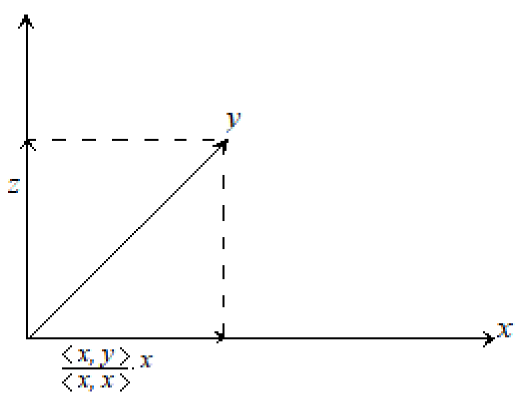
Demonstração. Como $z = y - \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x$, temos que

$$\langle x, z\rangle = \langle x, y - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x\rangle = \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot \langle x, x\rangle = 0$$

Logo o vetor z é ortogonal a x. □

Geometricamente a Proposição 2.1.3 diz que o vetor $\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x$ é a projeção ortogonal de y sobre a reta que contém x.

Figura 1 – Projeção ortogonal de y



A definição de ortogonalidade e a proposição acima nos permitem demonstrar três importantes resultados relacionados à norma euclidiana:

(a) **O Teorema de Pitágoras**: Se $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $x \perp y$, então

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

(b) **A desigualdade de Cauchy-Schwarz**: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

(c) **A desigualdade triangular**: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Para demonstrarmos (a) basta utilizarmos a definição da norma euclidiana:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 \end{aligned}$$

Para demonstrarmos (b), observemos primeiramente que se $x = \overrightarrow{0}$, temos que ambos os lados da desigualdade são nulas, pelo Exemplo 2.1.2 e por NE2) e a desigualdade se verifica (em igualdade) quando um deles é nulo. Suponhamos agora que $x \neq \overrightarrow{0}$. Neste caso, de acordo com a Proposição 2.1.3, tomando $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}$, $y - \alpha x$ é ortogonal a x e, portanto, a αx. Disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} y = (y - \alpha x) + \alpha x \Rightarrow ||y||^2 &= ||y - \alpha x||^2 + ||\alpha x||^2 \\ &\geq |\alpha|^2 ||x||^2 \\ &= \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||x||^4} ||x||^2. \end{aligned}$$

Ou seja, $||y||^2 \geq \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{||x||^2}$, que é equivalente a $|\langle x, y\rangle|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$ e o resultado segue, calculando a raiz quadrada de ambos os lados da desigualdade.

Para a demonstração de (c),

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

Portanto, $||x+y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$. Retirando a raiz quadrada de ambos os lados, chegamos à desigualdade triangular.

Definição 2.1.6. *Toda aplicação* $[[\cdot]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *que associe a cada vetor* $x \in \mathbb{R}^n$ *a um número* $[[x]]$ *com as três propriedades acima, é denominado norma.*

Exemplo 2.1.3. *A norma euclidiana não é a única norma possível em* $\mathbb{R}^n$, *existem duas outra normas, de mais fácil manipulação, que podemos definir:*

a) A norma do máximo: $||x||_M = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$,

b) A norma do soma: $||x||_S = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Mostraremos assim que ambas são normas. De fato, pois para $x \in \mathbb{R}^n$, *temos que* $||x||_S = |x_1| + \cdots + |x_n|$. *É evidente que* $||x||_S \geq 0$, *pois se trata de somas de valores absolutos, e que* $||x||_S = 0$ *se , e somente se,* $x = 0$. *Além disso, para um* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| &= |\lambda x_1| + \cdots + |\lambda x_n| \\ &= |\lambda| \cdot (|x_1| + \cdots + |x_n|) \\ &= |\lambda| \cdot ||x||_S. \end{aligned}$$

Lembrando que $||x_i + y_i|| \leq ||x_i|| + ||y_i||$ *para quaisquer reais* x_i *e* y_i, $i \in \{1, n\}$, *obtemos*

$$\begin{aligned} ||x + y||_S &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) \\ &= ||x||_S + ||y||_S. \end{aligned}$$

Para a norma do máximo $||x||_M = max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ *temos que* $||x||_M \geq 0$, *pois se trata do máximo dos valores absolutos, e que* $||x||_M = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$. *Além disso,*

$$\begin{aligned} ||\lambda x||_M &= \max\{|\lambda x_1|, ..., |\lambda x_n|\} \\ &= |\lambda| \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \\ &= |\lambda| \cdot ||x||_M, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} ||x + y||_M &= max\{|x_1 + y_1|, ..., |x_n + y_n|\} \\ &\leq max\{|x_1| + |y_1|, ..., |x_n| + |y_n|\} \\ &\leq max\{|x_1|, ..., |x_n|\} + max\{|y_1|, ..., |y_n|\} \\ &= ||x||_M + ||y||_M \end{aligned}$$

Logo $||x + y||_M \leq ||x||_M + ||x||_M$.

Observação 2.1.2. *Uma vez que* $\max\{|x_1| + |y_1|, \ldots, |x_n| + |y_n|\} = |x_i| + |y_i|$, *para algum* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e sendo,* $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |x_p|$ *e* $\max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\} = |y_q|$, *com* $1 \leq p, q \leq n$, *temos que* $|x_i| \leq |x_p|$ *e* $|y_i| \leq |y_q|$. *Assim,* $|x_i| + |y_i| \leq |x_p| + |y_q|$, *o que prova a última desigualdade acima.*

As normas definidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ nos fornecerão noções de *distância* entre dois vetores. Consideremos a seguir três maneiras de se definir distância no espaço $\mathbb{R}^n$ e representaremos estas da seguinte forma.

Definição 2.1.7. *Dado dois vetores* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *definiremos distância no espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *do seguinte modo:*

$$\begin{aligned} d(x;y) &= ||x-y|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \\ d'(x;y) &= |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n| \\ d''(x;y) &= \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \end{aligned}$$

Onde a distância d *e chamada de distância euclidiana.*

2.2 Bolas e Conjuntos Limitados

A norma euclidiana nos fornece propriedades para definir algumas noções geométricas básicas e fundamentais do $\mathbb{R}^n$. São estas:

Definição 2.2.1. *Sejam* $a \in \mathbb{R}^n$ *e um número real* $r > 0$, *definimos uma bola aberta de centro* a *e raio* r *como sendo o conjunto* $B(a;r)$, *formado pelos pontos* $x \in \mathbb{R}^n$ *cuja distância ao ponto* a *é menor que* r. *Mais precisamente,*

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x;a) < r\}.$$

Definição 2.2.2. *A bola fechada de centro* a *e raio* r *é o conjunto* $B[a;r]$ *dos pontos* $x \in \mathbb{R}^n$ *cuja distância ao ponto* a *é menor ou igual a* r, *dada por*

$$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x;a) \leq r\}.$$

Definição 2.2.3. *Esfera é o conjunto* $S[a;r]$ *de centro* a *e raio* r, *cujo a distância ao ponto* a *é igual a* r. *Mais precisamente,*

$$S[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x;a) = r\}.$$

Como já mencionado, adotaremos em $\mathbb{R}^n$ a norma euclidiana. Mas convém, entretanto, informar ao leitor que dependendo da norma a ser utilizada, a forma geométrica das bolas e esferas em $\mathbb{R}^n$ se alteram (ver referência [1]).

Definição 2.2.4. *Dizemos que um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é limitado quando existir* $r > 0$ *tal que* $d(x, y) \leq r$ *para todo* $x, y \in X$*, ou seja, quando está contido em alguma bola fechado* $B[a; r]$*, para algum* $r > 0$ *e* $a \in \mathbb{R}^n$*.*

Proposição 2.2.1. *Se* $k = r + ||a||$ *então* $B[a; r] \subset B[0; k]$*. Logo, dizer que X é limitado equivale a dizer que existe* $k > 0$ *tal que* $||x|| \leq k$ *para todo* $x \in X$*.*

Demonstração. Para mostrar que $B[a; r] \subset B[0; r + ||a||]$, note que

$$d(x; a) \leq r \Rightarrow ||x|| = ||x - a + a|| \leq \; d(x; a) + ||a|| \leq r + ||a||.$$

Assim, se $x \in B[a; r]$ então temos que $x \in B[0; r + ||a||]$. □

Observação 2.2.1. *Assim, temos que se um conjunto* Y *é limitado, qualquer subconjunto* $X \subset Y$ *também será limitado.*

Exemplo 2.2.1. *Temos que a bola* $B[a; r]$ *e* $B(a; r)$ *são conjuntos limitados de* $\mathbb{R}^n$*. De fato, segue que pela definição* $B[a; r]$ *é limitado e como* $B(a; r)$ *é subconjunto de* $B[a; r]$ *consequentemente* $B(a; r)$ *é limitado.*

Definição 2.2.5. *Uma aplicação* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é dita limitada no conjunto* $X \subset \mathbb{R}^m$ *quando sua imagem* $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto limitado, isto é, quando existe* $c > 0$ *tal que* $||f(x)|| \leq c$*, para todo* $x \in X$*.*

No tópico seguinte, estenderemos para o espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ o conceito de sequências e de limites de sequências de números reais, dando enfoque especial às sequências de Cauchy, que serão utilizadas para a definição do conceito de Espaço Métrico Completo e a verificação do espaço $\mathbb{R}^n$ como um exemplo de tal espaço.

2.3 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Definição 2.3.1. *Uma sequência em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$*, que associa a cada número natural* k *um ponto* x_k *no conjunto* $\mathbb{R}^n$*.*

Usaremos a notação (x_k) para indicar o conjunto de valores da sequência. Essa distinção é importante, pois uma sequência pode possuir infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito.

Para cada $i = 1, ..., n$, indicaremos com x_{ki} a i-ésima coordenada de x_k. Dessa forma, $x_k = (x_{k1}, ..., x_{kn})$. Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ equivale a n sequências de números reais $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, ..., (x_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$. Essas n sequências $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ de números reais são chamadas de *sequências coordenadas de* (x_k).

Definição 2.3.2. *Uma subsequência de uma sequência* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito* $\mathbb{N}' = \{k_1 < \cdots < k_m < \cdots\} \subset \mathbb{N}$.

Definição 2.3.3. *Diz-se que o ponto* $a \in \mathbb{R}^n$ *é o limite da sequência* (x_k) *quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall\ k > k_0 \Rightarrow d(x_k; a) < \epsilon$. *Escreve-se então* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

A definição acima nos diz que dado um certo $\epsilon > 0$ vai existir um $k_0 \in \mathbb{N}$ onde, para todo $k > k_o \Rightarrow x_k \in B(a; \epsilon)$.

Observação 2.3.1. *De acordo com a definição de sequência e com a definição de função limitada, uma sequência* (x_n) *diz-se uma sequência limitada quando existe* $c > 0$ *tal que* $||x_n|| \leq c$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.3.4. *Uma sequência* $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ *é dita convergente se existe* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. *Caso ela não possua limite ela é denominada divergente.*

Exemplo 2.3.1. *Uma sequência constante* $(a, a, .., a, ...)$ *é convergente e seu limite é* a. *Por sua vez, se* $a \neq b$ *então a sequência* $(a, b, a, b, ...)$ *é uma sequência divergente porque possui duas subsequência que convergem para limites diferentes, a saber,* a *e* b.

O teorema seguinte demonstrado por Bernard Bolzano e Karl Weierstrass é uma generalização do caso considerado na reta e diz o seguinte:

Teorema 2.3.1. ***(Bolzano - Weierstrass)****. Toda sequência limitada em* $\mathbb{R}^n$ *possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Com efeito, fazendo indução sobre n, temos que o Teorema de Bolzano - Weierstrass é valido para valores em $\mathbb{R}$. Suponha-se que o teorema é válido para $n-1$, ou seja, toda sequência limitada em $\mathbb{R}^{n-1}$ possui uma subsequência convergente. Logo dada uma sequência limitada $(x_k) \in \mathbb{R}^n$, temos que (y_k) é limitada em $\mathbb{R}^{n-1}$, onde para cada $k \in \mathbb{N}$, $y_k = (x_{k1}, ..., x_{kn-1})$, ou seja, as primeiras $n-1$ coordenadas de (x_k). Como $||(x_n)||_{\mathbb{R}^n} \geq ||(y_n)||_{\mathbb{R}^{n-1}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que (y_k) é limitada. Pela hipótese, segue que existe um conjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, de índices, tal que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ converge, portanto cada coordenada converge. Analogamente pelo Teorema de Bolzano - Weierstrass na reta, existe um conjunto $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito de índices que torna $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_2}$ convergente em $\mathbb{R}$. Logo, tem-se que toda coordenadas de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_2}$ converge, ou seja, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_2}$ converge em $\mathbb{R}^n$. □

Destacaremos a seguir que as *sequências de Cauchy* são aquelas que possuem a interessante propriedade de que seus termos vão se aproximando uns dos outros, tanto quanto se queira, à medida que cresce o índice n. Esse tipo de sequência, intuitivamente simples de ser entendida, possui uma propriedade valiosíssima: a convergência. Uma sequência de Cauchy é "sempre"convergente, como mostraremos daqui a pouco, com o Teorema 2.3.2. A partir da verificação de que uma dada sequência é uma sequência de Cauchy, não há mais a necessidade de se procurar um candidato a ponto de convergência da sequência.

Definição 2.3.5. *Seja* $(x_k) \in \mathbb{R}^n$*. Temos que* (x_k) *é uma Sequência de Cauchy quando, para todo* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $k, r > k_0 \Rightarrow d(x_k; x_r) < \epsilon$*.*

Os resultados de Sequências de Cauchy que serão apresentados adiante nos darão condições, não somente suficientes mas também necessárias, para convergência de sequências no espaço $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.3.1. *Toda sequência de Cauchy* $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ *é limitada.*

Demonstração. Com efeito, seja $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ uma Sequência de Cauchy. Tomando $\epsilon = 1$ então, existe um índice $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k, r > k_0 \Rightarrow d(x_k; x_r) < 1$, ou seja, salvo possivelmente os pontos $\{x_1, ..., x_{k_0}\}$ todos os demais termos de (x_k) pertencerão à bola aberta $B(x_{k_0+1}; 1)$. Portanto, o conjunto dos termos da sequência (x_k) é limitada. □

Exemplo 2.3.2. *A recíproca do teorema anterior é falsa, pois nem toda sequência limitada é de Cauchy. O caso mais simples é a sequência dado por* $(1, 0, 1, 0, \ldots) \in \mathbb{R}$*. Embora limitada, esta sequência não é de Cauchy pois* $d(x_k; x_{k+1}) = 1$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Proposição 2.3.2. *Toda subsequência* $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ *de uma sequência* $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ *de Cauchy é de Cauchy.*

Demonstração. De fato, se (x_k) é de Cauchy então para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $k, r > k_0 \Rightarrow d(x_k; x_r) < \epsilon$. Como todo termo da subsequência $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ é também termo de (x_k) temos que, para todo $k_p, k_q > k_0 \Rightarrow d(x_{k_p}; x_{k_q}) < \epsilon$. Logo, a subsequência é de Cauchy. □

Proposição 2.3.3. *Uma sequência* $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ *de Cauchy que possui uma subsequência* $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ *convergente é convergente e tem o mesmo limite que sua subsequência.*

Demonstração. Seja $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ uma sequência de Cauchy e $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ uma subsequência de (x_k) que converge para um ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Queremos mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. De fato, sendo $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ uma subsequência que converge para um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, temos que dado um $\epsilon > 0$ existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $k_r > p \Rightarrow d(x'_{k_r}; a) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Como (x_k) é uma Sequência de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $k, l > q \Rightarrow d(x_k; x_l) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Seja $k_0 = \max\{p, q\}$.

Para todo $k > k_0$ existe termos da subsequência de $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}'}$ que ultrapassam o índice k_0, ou seja, existe $k_r > k_0$. Sendo assim,

$$d(x_k; a) \leq d(x_k; x_{k_r}) + d(x_{k_r}; a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo obtemos que, dado um $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $k > k_0 \Rightarrow d(x_k; a) < \epsilon$, ou seja, que $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. □

Teorema 2.3.2. *Toda sequência $(x_k) \in \mathbb{R}^n$ convergente é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_k) uma sequência que converge para $a \in \mathbb{R}^n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow d(x_k; a) < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $k, r > k_0$, temos

$$d(x_k; x_r) \leq d(x_k; a) + d(a; x_r) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Logo, a sequência (x_k) é de Cauchy. □

A seguir definiremos dois conceitos essenciais referentes as noções topológicas do $\mathbb{R}^n$. Estes se resumem em *Conjuntos abertos* e *Conjuntos Fechados*. O estudo de conjuntos abertos e fechados é fundamental para entendermos a estrutura topológica do espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$.

2.4 Conjuntos Abertos e Conjuntos Fechados

Informalmente falando, podemos dizer que as noções topológicas de um espaço se resumem às condições de conjuntos abertos e Conjuntos Fechados. Neste sentido, esta sessão será reservada para estudarmos o aspecto topológico do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Assim, começaremos definindo os conjuntos abertos, e como uma consequência imediata da noção de aberto definiremos os conjuntos fechados.

Definição 2.4.1. *Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, um ponto $a \in X$ chama-se ponto interior de X, quando para algum $r > 0$, tem-se a bola aberta $B(a, r) \subset X$.*

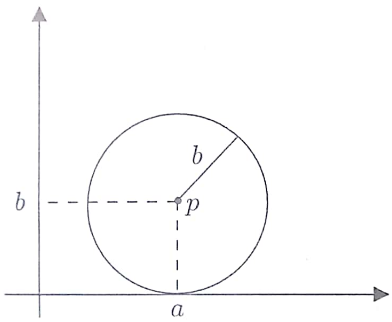
Observação 2.4.1. *O conjunto $intX$ dos pontos interiores a X é denominado interior do conjunto X. Evidentemente, $intX \subset X$. Quando $a \in intX$, diz-se que X é uma vizinhança de a.*

Definição 2.4.2. *A fronteira de $X \in \mathbb{R}^n$, denotada por ∂X, é o conjunto formado pelos pontos $a \in \mathbb{R}^n$ tais que toda bola aberta de centro a contém uma parte pertencente a X e a outra no seu complementar $\mathbb{R}^n - X$.*

Exemplo 2.4.1. *Seja $\mathbb{Q}^n$ o conjunto dos números racionais de $\mathbb{R}^n$. Não existe ponto interior de $\mathbb{Q}^n$ em $\mathbb{R}^n$, pois não existe uma bola aberta formada apenas por números racionais, ou seja, qualquer bola aberta contém números racionais e irracionais, logo $\partial\mathbb{Q}^n$ é todo o espaço $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.4.2. *Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Se $p = (a, b)$ com $b > 0$, então $p \in int.X$. De fato, afirmamos que $B = B(p; b) \subset X$. Geometricamente temos,*

Figura 2 – Disco aberto.



Assim:

$$\begin{aligned}(x, y) \in B \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < b \Rightarrow (y-b)^2 < b^2 \\ &\Rightarrow \quad y^2 - 2by + b^2 < b^2 \Rightarrow y^2 < 2by \Rightarrow y > 0 \quad (\textit{pois } b > 0).\end{aligned}$$

E portanto $(x, y) \in X$.

Definição 2.4.3. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito conjunto aberto se todos os seus pontos são pontos interiores, isto é, quando $A = intA$.*

Observação 2.4.2. *Desta forma, temos que A é aberto se, e somente se, para cada $x \in A$ existe $r > 0$, tal que $x \in B(a; r) \subset A$.*

Exemplo 2.4.3. *Toda bola aberta $B = B(a; r)$ é um conjunto aberto. Com efeito, seja $x \in B$. Então $d(x; a) < r$, logo $s = r - d(x; a) > 0$. Afirmamos que, $B(x; s) \subset B$. Com efeito, para todo $y \in B(x; s) \Rightarrow d(y; x) < r - d(x; a)$. Logo*

$$y \in B(x; s) \Rightarrow d(y; a) \leq d(y; a) + d(x; a) < r - d(x; a) + d(x; a) = r$$

Donde concluímos que $y \in B(a; r)$

Teorema 2.4.1. *Os conjuntos abertos do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *possuem as seguintes propriedades:*

a) O conjunto vazio $\varnothing$ *e o espaço* $\mathbb{R}^n$ *são abertos;*

b) A intersecção $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ *de um número finito de conjuntos abertos* $A_1 \cap, ..., \cap A_k$ *é um conjunto aberto.*

c) A reunião$A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *de uma família arbitraria* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$*de conjuntos abertos* A_λ *é um conjunto aberto.*

Demonstração. a) Pela definição de conjunto aberto temos que um conjunto só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior. Como $\varnothing$ não contém ponto algum,então é aberto. Evidentemente temos que $\mathbb{R}^n$ é aberto.

b) Se $a \in A$ então para cada $i = 1, ..., k$, temos que $a \in A_i$. Como A_i é aberto, então existe um $r_i > 0$ tal que a bola aberta $B(a; r)$ está contido em A_i. Seja $r = \min\{r_1, ..., r_n\}$. Então $B(a; r) \subset A_i$ para cada i. Logo $B(a; r) \subset A$, provando o item b.

b) Dado $a \in A$ então, existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto $a \in A$ é interior a A, isto é, A é aberto.

□

Do Teorema 2.4.1 temos que a interseção $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ de número finitos de conjuntos abertos $A_1, ..., A_k$ é ainda um conjunto aberto. Entretanto, a interseção de infinitos abertos pode não ser um aberto.

Exemplo 2.4.4. *Para verificarmos que a interseção de infinitos abertos pode não ser aberto consideremos a bola aberta* $B(a; \frac{1}{k})$ *com* $k \geq 1$*. Temos que* $\bigcap_{k=1}^{\infty} B(0; \frac{1}{k}) = \{0\}$ *que é fechado pois não possui pontos interiores.*

Definidos conjuntos abertos e mostrados no Teorema 2.4.1 suas principais características no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, podemos definir conjuntos fechados no $\mathbb{R}^n$. Para isso necessitamos de algumas definições importantes.

Definição 2.4.4. *Um ponto* $a \in \mathbb{R}^n$ *é dito aderente a um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *quando existir uma sequência de pontos* $x_k \in X$ *tais que* $\lim x_k = a$*.*

Exemplo 2.4.5. *Todo ponto* $a \in X$ *é aderente a X: basta tomar a sequência de pontos* $x_n = a$*. Mas pode-se ter a aderente a X sem que a pertença a X. Por exemplo, se*

$X = (0, +\infty)$, *então 0 não pertence a X, mas 0 é aderente a X, pois* $0 = \lim \frac{1}{k}$, *onde* $\frac{1}{k} \in X$ *para todo k.*

Definição 2.4.5. *Chama-se de fecho do conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *ao conjunto* $\overline{X}$ *formado por todos os pontos aderentes a X. Portanto* $a \in \overline{X}$ *equivale a* $a = \lim x_k$ *com* $x_k \in X$.

Definição 2.4.6. *Um conjunto* $F \subset \mathbb{R}^n$ *é dito fechado se, e somente se,* $\overline{F} = F$, *isto é, quando o limite de toda sequência convergente de pontos de F é ainda um ponto de F.*

O teorema apresentado abaixo resume as principais propriedades do fecho de um conjunto no espaço $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4.2. *a) O ponto a é aderente ao conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *se, e somente se, toda bola de centro a contém algum ponto de X.*

b) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado se, e somente se, seu complementar* $\mathbb{R}^n - F$ *é aberto. Equivalentemente:* $A \subset \mathbb{R}^n$ *é aberto se, e somente se,* $\mathbb{R}^n - A$ *é fechado.*

c) O fecho de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado. Noutras palavras: para todo* $X \subset \mathbb{R}^n$ *tem-se* $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração. a) Se a é aderente a X então $a = \lim x_k$, com $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto qualquer bola $B(a;r)$ contém pontos de X, a saber, todos os x_k com k suficientemente grande. Reciprocamente, se toda bola de centro a contém pontos de X, podemos escolher, para cada $k \in \mathbb{N}$, um ponto $x_k \in X$ que esteja na bola $B\left(a; \frac{1}{k}\right)$, isto é, $d(x_k; a) < \frac{1}{k}$. Então $\lim x_k = a$, logo a é aderente a X.

b) As seguintes afirmações são equivalentes: (1) F é fechado. (2) Se $x \in \mathbb{R}^n - F$ então x não é aderente a F. (3) Se $x \in \mathbb{R}^n - F$ então existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset \mathbb{R}^n - F$, em virtude da parte (a) acima. (4) $\mathbb{R}^n - F$ é aberto. Assim, F fechado $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n - F$ aberto. Escrevendo $A = \mathbb{R}^n - F$, donde $F = \mathbb{R}^n - A$, está ultima conclusão diz que: A é aberto se, e somente se, $\mathbb{R}^n - A$ é fechado.

c) Se $x \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$, isto é, x não é aderente a X, então por (a), existe uma bola $B = B(x;r)$ que não contém pontos de X, ou seja, $X \subset \mathbb{R}^n - B$. Logo $\overline{X} \subset \overline{\mathbb{R}^n - B}$. Mas, pela parte (b) acima, $\mathbb{R}^n - B$ é fechado; portanto $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n - B$ ou, equivalentemente, $B \subset \mathbb{R}^n - \overline{X}$. Assim, todo ponto $x \in \mathbb{R}^n - \overline{X}$ é um ponto interior, logo $\mathbb{R}^n - \overline{X}$ é aberto. Segue-se que $\overline{X}$ é fechado.

□

Vejamos agora um exemplo que mostram algumas operações que podem ser utilizadas no espaço $\mathbb{R}^n$ referente ao fecho de um conjunto.

Exemplo 2.4.6. *Para quaisquer* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ *temos que* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *e* $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. *Não valendo* $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$. *A verificação é simples pois, temos que:*

- $X \subseteq \overline{X}$ *e* $Y \subseteq \overline{Y}$, *logo* $X \cup Y \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$. *Como* $\overline{X} \cup \overline{Y}$ *é fechado, segue que* $\overline{X \cup Y} \subseteq \overline{X} \cup \overline{Y}$. *Temos ainda que* $X \subseteq X \cup Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{X \cup Y}$ *e* $Y \subseteq X \cup Y \Rightarrow \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$. *Logo* $\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$. *Portanto* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

- *Como* $X \subseteq \overline{X}$ *e* $Y \subseteq \overline{Y}$, *logo* $X \cap Y \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$. $\overline{X} \cap \overline{Y}$ *é fechado e contém* $X \cap Y$, *mas* $\overline{X \cap Y}$ *é o menor fechado que contém* $X \cap Y$, *portanto* $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

- *Para mostrar que não vale* $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ *é só considerarmos* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b < c$. *Seja* $X = (a, b)$ *e* $Y = (b, c)$ *onde temos que* $\overline{X} \cap \overline{Y} = \{b\} \neq \emptyset = \overline{X \cap Y}$.

Logo à frente veremos que da mesma forma que os conjuntos abertos apresentam propriedades de extrema importância mostradas no teorema 2.4.1, os conjuntos fechados apresentam características similares.

Teorema 2.4.3. *Os conjuntos fechados do espaço* $\mathbb{R}^n$, *possuem as seguintes características:*

a) *O conjunto* $\emptyset$ *e o espaço* $\mathbb{R}^n$ *são fechados.*

b) *Seja* $F_1, ..., F_k$ *subconjuntos fechados de* $\mathbb{R}^n$ *então* $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ *é um conjunto fechado.*

c) *Seja* $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família qualquer de conjuntos fechados em* $\mathbb{R}^n$, *então a interseção* $F = \bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ *é um conjunto fechado.*

Demonstração. a) $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são fechados por que seus complementares são conjuntos abertos $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$, respectivamente.

b) Pelo item (b) do Teorema 2.4.2, temos que os conjuntos $A_1 = \mathbb{R}^n - F_1, ..., A_k = \mathbb{R}^n - F_k$ são abertos. Logo, pelo item (b) do Teorema 2.4.1, $A_1 \cap \cdots \cap A_k = \mathbb{R}^n - (F_1 \cup \cdots \cup F_k)$ é aberto. Consequentemente pelo item (b) do Teorema 2.4.2, $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ é fechado.

c) Para cada $\lambda \in L$ temos que $A_\lambda = \mathbb{R}^n - F_\lambda$ é aberto. Segue-se que $A = \bigcap\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Mas $A = \mathbb{R}^n - F$. Logo F é fechado.

□

Cabe observamos que a reunião $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado. Entretanto, isso não vale para reuniões infinitas que podem não ser fechadas.

Exemplo 2.4.7. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto qualquer que não seja fechado.Temos que* $X = \bigcup\limits_{x \in X} \{x\}$. *Como todo conjunto* X *é reunião de seus pontos; cada ponto* $x \in X$ *forma um conjunto fechado* $\{x\}$ *mas a reunião* X *não é fechado.*

2.5 Continuidade

O estudo de funções contínuas no $\mathbb{R}^n$, que faremos nesta secção, tem um duplo propósito de estabelecer os fatos e conceitos topológicos essenciais a Análise e, ao mesmo tempo, fornecer ao leitor um contato com as noções básicas da topologia do $\mathbb{R}^n$.

Intuitivamente dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ com $X \subset \mathbb{R}^m$ é contínua no ponto $a \in X$ quando a distância de$f(x)$ a $f(a)$ tornam-se cada vez mais próximo um do outro desde que se tome x suficientemente próximo de a. Em termos mais formais temos:

Definição 2.5.1. *Diz-se que* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *com* $X \subset \mathbb{R}^m$ *é contínua no ponto* $a \in X$ *quando, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in X, \qquad d(x; a) < \delta \Rightarrow d(f(x); f(a)) < \epsilon.$$

Definição 2.5.2. *Diremos que* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é contínua quando for contínua em todos os ponto de* X.

Definição 2.5.3. *Seja* $f : X \to \mathbb{R}^n$, *com* $X \subset \mathbb{R}^m$. *Diremos que* f *é uma função lipschitzianas, se existir um* $c > 0$ *(chamado constante de Lipschitz), tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Exemplo 2.5.1. *Seja o espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$, *temos que toda norma* $x \mapsto ||x||$ *é Lipschitziana. De fato, temos que* $f(x) = ||x||$ *assim,*

$$d(f(x), f(y)) = |\ ||x|| - ||y||\ | \leq ||x - y|| = d(x, y)$$

o que mostra que a norma $||x||$ *é Lipschitziana com constante de Lipschitz* $c = 1$.

Proposição 2.5.1. *Se* $f : X \to \mathbb{R}^n$, *com* $X \subset \mathbb{R}^m$, *é uma função Lipschitziana então* f *é contínua.*

Demonstração. De fato, dado um $\varepsilon > 0$ queremos determinar um $\delta > 0$ tal que satisfaça

$$d(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Assim, sendo f Lipschitziana existe um $c > 0$ tal que

$$d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a).$$

Desta forma, considerando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{c}$ segue que

$$d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x,a) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon.$$

Portanto f é contínua. □

Observação 2.5.1. *Por meio da proposição acima observe que toda norma a ser considerada no espaço $\mathbb{R}^n$ é em particular uma função contínua.*

Teorema 2.5.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}^n$ com $f(X) \subset Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^p$. Se f é contínua no ponto $a \in X$ e g é contínua no ponto f(a) então $g \circ f : X \to \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a. Ou seja, a composta de duas funções contínuas é contínua.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como por hipótese g é contínua no ponto *f(a)* temos que, existe $\lambda > 0$ tal que $y \in Y, d(y; f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y) - g(f(a)) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, Como f é contínua no ponto a temos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$,

$$d(x; a) < \delta \Rightarrow d(f(x); f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(f(x)); g(f(a))) < \varepsilon.$$

Logo $g \circ f$ é contínua no ponto a. □

Teorema 2.5.2. *Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas $f_1, ..., f_n$ o for.*

Demonstração. Se cada $f_i : X \to \mathbb{R}^n$, com $i \in \{1, n\}$ for contínua em um ponto $a \in X$, então dado $\epsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0, ..., \delta_n > 0$ tais que $d(x; a) < \delta_i \Rightarrow d(f_i(x); f_i(a)) < \epsilon$ com $x \in X$. Considerando a norma do maxímo em $\mathbb{R}^n$, seja $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Então $d(x; a) < \delta \Rightarrow d(f(x); f(a)) = \max_{x \in X}\{d(f_i(x); f_i(a))\} < \epsilon$ com $i \in \{1, n\}$. Portanto f é continua no ponto a. Reciprocamente se f é continua temos pelo Teorema 2.5.1 que cada f_i com $i \in \{1, n\}$ é continua. □

Proposição 2.5.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto em X.*

Demonstração. Seja f contínua. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto então, para todo $x \in f^{-1}(A)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon) \subset A$. Pela continuidade de *f*, x é centro de uma bola aberta B_x tal que $f(B_x \cap X) \subset B(f(x); \varepsilon) \subset A$, logo $x \in B_x \cap X \subset f^{-1}(A)$. Isto valendo para todo $x \in f^{-1}(A)$, resulta que $f^{-1}(A) \subset U \cap X \subset f^{-1}(A)$, logo $f^{-1}(A) = U \cap X$, onde U é a reunião das bolas abertas $B_x, x \in f^{-1}(A)$. Reciprocamente, suponhamos que, para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n, f^{-1}(A)$ seja aberto em X, e $\varepsilon > 0$, tomamos $A = B(f(x); \varepsilon)$ e obtemos $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto tal que $U \cap X = f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$. Certamente $x \in U$, logo existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset U$ e assim $f(B(x; \delta) \cap X \subset B(f(x); \varepsilon)$. Portanto, f é contínua em todos os pontos $x \in X$. □

Corolário 2.5.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto $f^{-1}(F)$ fechado em X.*

Demonstração. Isto resulta do Teorema 2.5.1 se observarmos que, pondo $A = \mathbb{R}^n - F$, então A é aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(A)$ é fechado em X se, e somente se, $f^{-1}(A)$ é aberto em X, mais pelo Teorema 2.5.1 segue que $f^{-1}(A)$ é aberto. O que demonstra o teorema. $\square$

No Capítulo seguinte intitulado como Teorema do Ponto Fixo de Banach, é reservado para a demonstração do mesmo. Sendo assim, temos a necessidade de apresentar o conceito de *Espaços Métricos* e *Espaços Métrico Completos* com o intuito de mostrarmos que o espaço $\mathbb{R}^n$ satisfaz ambas as condições.

3 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Neste Capítulo trataremos de enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Um dos motivos de sua importância está no fato de fornecer um método iterativo de determinar existência e unicidade de pontos fixos sob certas hipóteses. Para tal demonstração definiremos primeiramente o conceito de Espaços Métricos e Espaços Métricos Completos e mostraremos que o espaço $\mathbb{R}^n$ cumpre ambas as condições. Dessa forma nosso estudo, exemplos, definições e teoremas será baseado nas seguintes referencias [2], [3], [4] e [5].

3.1 Espaço Métrico

Definição 3.1.1. ***(Métrica)*** *Seja M um conjunto não vazio. Uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma métrica em M se satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y, z \in M$:*

d1) $d(x; x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ *então* $d(x; y) > 0$;

d3) $d(x; y) = d(y; x)$;

d4) $d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$.

Definição 3.1.2. *Um Espaço Métrico é um conjunto munido de uma métrica. Em outras palavras, é um par (M, d) onde M é um conjunto não vazio e d é uma métrica em M.*

O exemplo a seguir nos garante que qualquer conjunto não vazio é um espaço métrico e possui, no mínimo, a métrica *zero-um*.

Exemplo 3.1.1. ***(Métrica "Zero-Um")***. *Seja M um conjunto qualquer não vazio. Definamos $d : M \times M \to \mathbb{R}$, onde $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ para $x \neq y$, dessa forma temos que M é um espaço métrico. De fato, para isto, vejamos que d define uma métrica em M. Pela construção, temos que $d(x; x) = 0$ para qualquer $x \in M$ e que $d(x; y) = 1 > 0$ para quaisquer $x, y \in M$, com $x \neq y$. Logo as condições (d1) e (d2) estão verificadas. Também é imediata a condição (d3), pois $d(x, y) = 1 = d(y, x)$ para quaisquer $x, y \in M$, com $x \neq y$. Agora, para mostramos (d4), vamos separar em dois casos: Sejam $x, y, z \in M$.*

1) *Se $x = z$, então é claro que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, independentemente de quem seja y, pois 0 é menor ou igual que a soma de quaisquer números não negativos.*

2) Se $x \neq z$, então certamente temos que ou $x \neq y$ ou $z \neq y$ (pois, se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$ contrariando a hipótese). Logo, $d(x,y) + d(y,z) \geq 1 = d(x,z)$.

Observação 3.1.1. *Quase sempre, mencionaremos M como sendo um espaço métrico, deixando implícito que uma métrica d atua sobre M, exceto em casos que houver riscos de confusão.*

A seguir mostraremos dois exemplos de espaços métricos. O primeiro trata-se do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ que, de antemão, é o exemplo mais importante de espaços métricos.

Exemplo 3.1.2. ***(Métrica Usual da Reta)****. Seja $M = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, e seja $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |x-y|$, segue que d é uma metrica em $\mathbb{R}$. De fato, sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.*

d1) Se $x = y \Rightarrow d(x,y) = |x-x| = |0| = 0$, ou seja $d(x,x) = 0$.

d2) Se $x \neq y$, então $x - y \neq 0 \Rightarrow |x-y| > 0$. Logo $d(x,y) = |x-y| > 0$.

d3) Temos que

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |-1(y-x)| \\ &= |-1| \cdot |y-x| \\ &= |y-x| \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

Portanto, $d(x,y) = d(y,x)$.

d4) Usando a desigualdade triangular da função modular, temos

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x-z| \\ &= |x-y+y-z| \\ &\leq |x-y| + |y-z| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Assim, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Isso mostra que d é uma métrica em $\mathbb{R}$ o que nos dá que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Observação 3.1.2. *Note que os resultados da métrica $d(x,y) = |x-y|$ definida no exemplo anterior são provenientes das propriedades do valor absoluto e é conhecida como "métrica usual da reta".*

O outro exemplo de espaço métrico é o *Espaço* $\mathbb{R}^n$, que se trata de uma generalização do exemplo anterior. Para isto, vimos no Capitulo 2 que há três maneiras de medirmos distancia em $\mathbb{R}^n$, que são d, d' *e* d''. Dessa forma, veremos que com o mesmo conjunto $\mathbb{R}^n$, as funções d, d' *e* d'' nos dará três espaços métricos distintos.

Exemplo 3.1.3. ***(Espaço*** $\mathbb{R}^n$***).*** *O espaço* $\mathbb{R}^n$ *é um espaço métrico. De fato, para isso mostraremos que as funções* $d, d', d'' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *são métricas em* $\mathbb{R}^n$*. Dessa forma, se* $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ *e* $z = (z_1, ..., z_n)$ *são elementos quaisquer de* $\mathbb{R}^n$*, temos:*

d1) Se $x = y$ *então* $x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n$ *e*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = \sqrt{0+\cdots+0} = 0. \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| = |0|+\cdots+|0| = 0. \\ d''(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,\cdots,|x_n-y_n|\} = \max\{|0|,...,|0|\} = 0. \end{aligned}$$

d2) Se $x \neq y$ *então existe* $1 \leq i \leq n$ *tal que* $x_i \neq y_i$*, neste caso temos*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \geq \sqrt{(x_i-y_i)^2} = |x_i-y_i| > 0. \\ d'(x,y) &= |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| \geq |x_i-y_i| > 0. \\ d''(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} \geq |x_i-y_i| > 0. \end{aligned}$$

d3) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ *temos*

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2} \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n| \\ &= |y_1-x_1|+\cdots+|y_n-x_n| \\ &= d'(y,x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d''(x,y) &= \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\} \\ &= \max\{|y_1-x_1|,...,|y_n-x_n|\} \\ &= d''(y,x). \end{aligned}$$

d4) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *temos*

$$d(x,y) = ||x-z||$$

$$\begin{aligned}
&= ||x-y+y-z|| \\
&\leq ||x-y||+||y-z|| \\
&= d(x,y)+d(y,z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'(x,z) &= |x_1-z_1|+\cdots+|x_n-z_n| \\
&= |x_1-y_1+y_1-z_1|+\cdots+|x_n-y_n+y_n-z_n| \\
&\leq |x_1-y_1|+|y_1-z_1|+\cdots+|x_n-y_n|+|y_n-z_n| \\
&= |x_1-y_1|+\cdots+|x_n-y_n|+|y_1-z_1|+\cdots+|y_n-z_n| \\
&= d'(x,y)+d'(y,z).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d''(x,y) &= \max\{|x_1-z_1|,...,|x_n-z_n|\} \\
&= \max\{|x_1-y_1+y_1-z_1|,...,|x_n-y_n+y_n-z_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1-y_1|+|y_1-z_1|,...,|x_n-y_n|+|y_n-z_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}+\max\{|y_1-z_1|,...,|y_n-z_n|\} \qquad (1) \\
&= d''(x,y)+d''(y,z).
\end{aligned}$$

Observação 3.1.3. *Uma vez que*

$$\max\{|x_1-y_1|+|y_1-z_1|,...,|x_n-y_n|+|y_n-z_n|\}=|x_i-y_i|+|y_i-z_i|$$

para algum i, $1\leq i\leq n$ e sendo

$$\max\{|x_1-y_1|,...,|x_n-y_n|\}=|x_p-y_p| \text{ e } \max\{|y_1-z_1|,...,|y_n-z_n|=|y_q-z_q|$$

com $1\leq p,q\leq n$, temos que $|x_i-y_i|\leq|x_p-y_p|$ e que $|y_i-z_i|\leq|y_q-z_q|$. Assim,

$$|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\leq|x_p-y_p|+|y_q-z_q|.$$

O que garante a desigualdade (1) .

Assim, temos que d, d' e d'' são métricas em $\mathbb{R}^n$.

Um exemplo de métrica que será usada no Capítulo 4 é a "métrica da convergência uniforme"ou "métrica do sup". Para isto, mostraremos que esta define uma métrica no seguinte exemplo.

Exemplo 3.1.4. ***(Métrica da Convergência Uniforme)****. Seja X um conjunto arbitrário e $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f: X\to\mathbb{R}$. Para qualquer $f,g\in\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ temos que*

$$d(f;g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

é uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$. De fato, para isso verifiquemos as condições que fazem de d uma métrica:

d1) Se $f = g$ então

$$\begin{aligned} d(f;g) &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |f(x) - f(x)| \\ &= \sup |0| \\ &= 0; \end{aligned}$$

d2) Se $f \neq g$, então existe $\overline{x} \in X$ tal que $f(\overline{x}) \neq g(\overline{x})$. Daí,

$$\begin{aligned} d(f;g) &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &\geq |f(\overline{x}) - g(\overline{x})| \\ &> 0; \end{aligned}$$

d3) Pelas propriedades do valor absoluto

$$\begin{aligned} d(f;g) &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |-(f(x) - g(x))| \\ &= \sup_{x\in X} |g(x) - f(x)| \\ &= d(g;f); \end{aligned}$$

d4) Dados $f, g, h \in B(X;\mathbb{R})$, tomos

$$\begin{aligned} d(f;h) &= \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x) + g(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\}; \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ *visto em na referência* [4] *temos:*

$$\begin{aligned} d(f;g) &\leq \sup_{x\in X} \{|f(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|\} \\ &\leq \sup_{x\in X} \{|f(x) - g(x)|\} + \sup_{x\in X} \{|g(x) - f(x)|\} \\ &= d(f;g) + d(g;h). \end{aligned}$$

Outro exemplo de espaço métrico que podemos considerar e que possui características simples mas não menos importantes é a de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.1.5. *Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico, temos que todo subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é um espaço métrico. De fato, basta considerar a restrição da métrica d a $C \times C$, ou seja, usar entre os elementos de C a mesma distância de $\mathbb{R}^n$, pois assim está-se usando entre os elementos de C a mesma distância que eles possuem como elementos de $\mathbb{R}^n$. Desta forma, C chama-se um subespaço métrico de $\mathbb{R}^n$ e a métrica de C diz-se induzida pela de $\mathbb{R}^n$.*

3.2 Espaço Métrico Completo

Nesta sessão é apresentado o conceito de *espaço métrico completo* e mostramos que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo. Diante disto poderemos definir *espaços de Banach* e concluir que $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de espaço de Banach.

A definição de convergência de sequências de $\mathbb{R}^n$, Definição 2.3.4 estende-se naturalmente para qualquer espaço métrico, como segue.

Definição 3.2.1. *Diz-se que o ponto a do espaço métrico (M, d) é o limite da sequência (x_k) quando, para cada $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > k_0 \Rightarrow d(x_k, a) < \epsilon$. Escreve-se então $\lim\limits_{x\to\infty} x_k = a$.*

Definição 3.2.2. *Um espaço métrico M é dito completo se toda sequência de Cauchy em M converge para um pondo de M.*

Alguns exemplos de espaços métricos completos:

Exemplo 3.2.1. ***Espaço*** $\mathbb{R}^n$. *Já vimos pelo, Exemplo 3.1.3, que $\mathbb{R}^n$ é um Espaço Métrico. Mostraremos agora que ele é completo, ou seja, que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ converge em $\mathbb{R}^n$. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Pela Proposição 2.3.1 segue que (x_n) é limitada e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) convergente. Logo, pela Proposição 2.3.3 (x_n) é convergente, o que mostra que $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo.*

Vimos no Exemplo 3.1.1 que a métrica zero-um nos garante que qualquer conjunto não vazio possui uma métrica, isto é, qualquer conjunto não vazio é um espaço métrico. Visto isso mostraremos agora que todo espaço com a métrica zero-um é completo.

Exemplo 3.2.2. *Todo espaço M com a métrica zero-um é completo. De fato, sejam M um espaço com a métrica "zero-um"e (x_n) uma sequência de Cauchy em M. Assim, dado $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n; x_{n+p}) < 1$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$. Como d é a métrica zero-um, segue que $d(x_n; x_{n+p}) = 0$ e, portanto, $x_n = x_{n+p}$ qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, ou seja, a partir de um certo índice n_0 a sequência (x_n) é constante.*

Desse modo, existe $a \in M$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$ qualquer, temos que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n; a) = 0 < \epsilon$. Portanto $\lim x_n = a$. Ou seja, M é completo

Exemplo 3.2.3. *Temos que o espaço das aplicações limitadas $\mathcal{B}(I; \mathbb{R}^n)$ é completo com a métrica da convergência uniforme ($d(f; g) = \sup\limits_{t \in I} ||f(t) - g(t)||_{\mathbb{R}^n}$). Para isto, consideremos $(f_n) \in \mathcal{B}(I; \mathbb{R}^n)$ uma sequência de Cauchy. Como toda sequência de Cauchy é limitada (Proposição 2.3.1), existe $c > 0$ tal que*

$$||f_n(x)|| < c \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I. \tag{3.1}$$

Sendo (f_n) de Cauchy temos que para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \Rightarrow ||f_m - f_n|| < \epsilon.$$

Pelo fato de (f_n) ser de Cauchy e usando a propriedade de supremo temos,

$$m, n > N \Rightarrow \sup_{x \in I} ||f_m(x) - f_n(x)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$$

Assim, fixando $x = x_0 \in I$ arbitrário, temos que

$$m, n > N \Rightarrow ||f_m(x_0) - f_n(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon. \tag{3.2}$$

Isso mostra que $(f_m(x_0))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, e sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo então $(f_m(x_0))$ é convergente em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(x_0) = f(x_0)$, de modo que, pela unicidade do limite e pela arbitrariedade da escolha de x_0, concluímos que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ podemos associar um único elemento $f(x) \in \mathbb{R}^n$, que define uma função $f : I \to \mathbb{R}^n$.
Afirmação: *temos que $f \in \mathcal{B}(I; \mathbb{R}^n)$ e que $f_n \longrightarrow f$. De fato, pois fazendo $n \to \infty$ em (3.1) temos que*

$$||f(x)|| < c \ \forall \ x \in I,$$

o que implica que $f \in \mathcal{B}(I; \mathbb{R}^n)$. Agora fazendo $n \longrightarrow +\infty$ em (3.2) temos

$$m > N \Rightarrow ||f_m - f|| < \epsilon,$$

ou seja, $f_m \longrightarrow f \in \mathcal{B}(I; \mathbb{R}^n)$. Logo $\mathcal{B}(I; \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo.

Exemplo 3.2.4. *O espaço das aplicações continuas $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é completo com a métrica da convergência uniforme. Seja uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$m, n > N \Rightarrow ||f_m - f_n|| < \epsilon. \tag{3.3}$$

Assim, dado $x_0 \in I$ arbitrariamente, por (3.3), temos que

$$m, n > N \Rightarrow ||f_m(x_0) - f_n(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon.$$

Dais, segue que $(f_n(x_0))$ é uma sequencia de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, logo converge, pois $\mathbb{R}^n$ é completo. Pela arbitrariedade de x_0, segue que existe $f : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Precisamos mostrar que (f_n) converge para f na norma do espaço, ou seja, mostrar que, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow ||f_n - f|| < \epsilon,$$

com $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, (3.3) nos dá

$$\begin{aligned} m, n > N \quad &\Rightarrow \quad ||f_m - f_n|| < \epsilon. \\ &\Leftrightarrow \quad \max_{x\in I} ||f_m(x) - f_n(x)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad ||f_m(x) - f_n(x)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. Fazendo $m \longrightarrow \infty$ em $||f_m - f_n|| < \epsilon$ para todo $x \in I$, segue que, $||f_n - f|| < \epsilon$; isto mostra que $f_n \longrightarrow f$ com a métrica da convergência uniforme. Por fim,mostraremos que $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$. Para cada $\epsilon > 0$, queremos mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon.$$

Para isso, temos que

$$\begin{aligned} ||f(x) - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} &= ||f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq ||f_n(x) - f(x)||_{\mathbb{R}^n} + ||f_n(x) - f_n(x_0)||_{\mathbb{R}^n} + ||f_n(x_0) - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ onde (f_n) é a sequência de Cauchy em $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ que converge para f com a norma da convergência uniforme. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f|| < \dfrac{\epsilon}{3}$ o que acarreta que $||f_n(x) - f(x)|| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in I$ e $||f_n(x_0) - f(x_0)|| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Como $(f_n) \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f_n(x) - f_m(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)||_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

O que mostra que $f \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ e que $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é completo.

O próximo teorema estabelece um resultado importante, que utilizaremos em nossas aplicações, no próximo Capítulo. Ele garante que todo subespaço fechado de um espaço métrico completo também é um espaço métrico completo. Uma amostra de sua utilidade é exibida logo depois de sua demonstração, providenciando uma demonstração um pouco mais simples de que $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ é completo

Teorema 3.2.1. *Todo subconjunto $F \subset M$ do espaço métrico completo M é completo se, e somente se, F for fechado.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Supondo que $F \subset M$. Seja completo, seja $(x_n) \in F$ uma sequência convergente, isto é, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ onde $a \in M$. Temos pela Proposição (4.1) que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Logo vai existe um $b \in F$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ o que pela unicidade do limite temos que $a = b$, Assim $F \subset M$ é fechado.
$(\Leftarrow)$ Do mesmo modo, seja $F \subset M$ um subconjunto fechado. Seja (x_n) sequência de Cauchy em F, logo existe um $a \in M$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Sendo o subconjunto F fechado em M segue que $a \in F$. Portanto $F \subset M$ é completo. $\square$

Outra maneira de mostrar que $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é completo vem sob a luz do Teorema 3.2.1. De fato, observe que $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto de $\mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$ pois, seja a aplicação $f : I \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ arbitrariamente escolhida. Como $Im(f) \subset \mathbb{R}^n$, segue que existe funções $f_1, ..., f_n : I \to \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ para todo $x \in I$. Pelo Teorema 2.5.2 cada $f_i : I \to \mathbb{R}$ é continua. Assim, por um teorema de Weierstrass, cada função componente de $f(x)$ é limitada o que nos garante então que f é limitada, ou seja, $f \in \mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$ onde pela arbitrariedade de f, segue que $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$. Resta mostrar que $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é fechado em $\mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$. Observe que, $\mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n) - \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n) = \bigcup_{p\in I} D_p$, onde $D_p = \{f : I \to \mathbb{R}^n; f \text{é descontínua em } p \in I\}$. Sendo $p \in I$ arbitrariamente fixado temos que $f \in D_p$ se existir $\epsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$0 < ||x_n - p|| < \frac{1}{n} \Rightarrow ||f(x_n) - f(p)||_{\mathbb{R}^n} \geq 3\epsilon.$$

Queremos mostrar que D_p é aberto. Isso consiste em, dado $f \in D_p$ existe $\epsilon > 0$ tal que $||g - f|| < \epsilon \Rightarrow g \in D_p$. Assim seja $g \in \mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$ tal que $||g - f|| < \epsilon$, temos que

$$\begin{aligned} 3\epsilon \leq ||f(x_n) - f(p)||_{\mathbb{R}^n} &= |f(x_n) - g(x_n) + g(x_n) - g(p) + g(p) - f(p)||_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq ||f(x_n) - g(x_n)||_{\mathbb{R}^n} + ||g(x_n) - g(p)||_{\mathbb{R}^n} + ||g(p) - f(p)||_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Como $||g-f|| < \epsilon \Rightarrow ||f(x_n)-g(x_n)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$ e $||g(p)-f(p)||_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$. Logo $||g(x_n)-g(p)|| \geq \epsilon$ portanto $||g - f|| \Rightarrow g \in D_p$, o que mostra que D_p é aberto e consequentemente $\bigcup_{p\in I} D_p = \mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n) - \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é aberto. Logo $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é fechado e como temos que $\mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$ e completo, segue pelo Teorema 3.2.1 que $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é completo.

Definição 3.2.3. *Chamamos de espaço de Banach um espaço vetorial normado completo.*

Exemplo 3.2.5. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach em relação a qualquer uma das três normas $||\cdot||, ||\cdot||_s$ e $||\cdot||_M$. Além do mais, $\mathcal{B}(I;\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach com a norma da convergência uniforme ($||f|| = \sup_{x\in I} ||f(x)||$).*

A seguir apresentaremos dois conceitos essenciais, que serão o de *ponto fixo* e o de *contração*. Além do mais, apresentaremos a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach para Contrações que garante não só a existência de pontos fixos como também a unicidade dos mesmos em espaços métricos completos.

3.3 Demonstração do Teorema

O método das aproximações sucessivas é um processo iterativo que se baseia em uma formula de recorrência, que em outras palavras, consiste na construção de uma sequência convergente, que tem seus termos dependentes uns dos outros partindo de uma condição inicial arbitrária por meio de sucessivas composições de uma mesma função. Um pouco mais precisamente, dada uma contração $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, considera-se a sequência $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$, onde em seu limite com $n \longrightarrow \infty$, esperamos obter um elemento $a \in \mathbb{R}^n$ que seja um ponto fixo para a função f.

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, o qual demonstraremos mais à frente, garante que, sob determinadas hipótese, a sequência a cima é convergente para um ponto fixo da função que a define, providenciando um método bastante utilizado na área de Análise Matemática que possui diversas aplicações interessantes.

Definição 3.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Diremos que $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo de f quando $f(x) = x$.*

Ou seja, um ponto fixo é um valor pertencente ao domínio onde não sofre alteração pela função. Vejamos agora alguns exemplos de pontos fixos.

Exemplo 3.3.1. *Temos que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$ tem dois pontos fixos que são $x = -1$ e $x = 2$, pois $f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$ e $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.*

Exemplo 3.3.2. *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Temos que todos os pontos reais são pontos fixos de f.*

Exemplo 3.3.3. *Seja a aplicação $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. Considerando $g(x) = f(x) - x$, temos que g é contínua pois é combinação de funções continuas, com $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = 0$, isto é, $f(x) = x$.*

Os Exemplos acima nos mostram que os pontos fixos de uma função não precisam necessariamente ser únicos.

Definição 3.3.2. *Diremos que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma contração quando existir uma constante $0 \leq c < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in M$.*

Exemplo 3.3.4. *Temos que a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = \cos(\cos x)$*, é uma contração, mas* $g(x) = \cos x$ *e* $h(x) = \sin(\sin x)$ *não são contrações. De fato, para mostrarmos que* f *é uma contração observe que*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\cos[\cos(x)] - \cos[\cos(y)]| \\ &= |\int_x^y sin[\cos(x)]sin(x)dx| \\ &\leq \int_x^y |sin[\cos(x)]sin(x)|dx. \\ &\leq \int_x^y c\ dx \\ &\leq c \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Pois, $|\sin[\cos(x)]\sin(x)| = |\sin[\cos(x)]| \cdot |\sin(x)|$*, onde* $|\sin(x)| \leq 1$ *e* $|\sin[\cos(x)]| < 0,85$ *pois o máximo que cos(x) pode atingir é 1 e* $|\sin(1)| = 0,841... < 0,85$ *e chamando* $c = 0,85$ *vimos que* $f(x) = \cos[\cos(x)]$ *é uma contração. Da mesma forma para mostrar que* h *não é uma contração note que*

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |\sin[\sin(x)] - \sin[\sin(x)]| \\ &\leq \int_x^y |\cos[\sin(x)]\cos(x)|dx \\ &\leq \int_x^y 1\ dx \\ &\leq |x - y|. \end{aligned}$$

Pois, para $x = \pi$ *temos que* $|\cos[\sin(\pi)]\cos(\pi)| = 1$ *o que contradiz a definição de contração. Assim* $h(x) = \sin[\sin(x)]$ *não é contração. Por fim, para mostrar que* g *não é uma contração basta vermos que*

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &\leq \int_x^y |\sin(x)|\ dx \\ &\leq |x - y|, \end{aligned}$$

pois $|\sin(x)| \leq 1$*. Assim,* $g(x) = \cos(x)$ *não é contração.*

Observação 3.3.1. *Em geral toda contração é uma função contínua já que toda contração é um caso particular de funções lipschitzianas.*

Logo abaixo é apresentado a demonstração do teorema conhecido como *"Teorema do Ponto Fixo de Banach"* que garante a existência e a unicidade de pontos fixos por uma contração em um espaço métrico completo.

Teorema 3.3.1. ***(Teorema do ponto fixo de Banach)*** *Seja* $\mathbb{R}^n$ *o espaço métrico completo. Toda contração* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *possui um único ponto fixo em* $\mathbb{R}^n$*.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em M, fixemos um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qualquer. Seja $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$, mostraremos que $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f. Para isso, primeiramente, admita que a sequência (x_n) seja convergente a um ponto $a \in \mathbb{R}^n$.

Existência do Ponto Fixo: Como por hipótese, $a = \lim x_n$, temos que $f(a) = f(\lim x_n)$. Sendo f continua segue que

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) \;\Rightarrow\; f(a) = \lim f(x_n).$$

mas $f(x_n) = x_{n+1}$, logo $f(a) = \lim x_{n+1}$.Como (x_n) converge para a, pela unicidade do limite temos que

$$f(a) = \lim x_{n+1} = a \;\Rightarrow\; f(a) = a.$$

Logo a é ponto fixo de f.

Unicidade: Suponha por absurdo que exista $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(y) = y$, onde $y \neq x$. Assim

$$0 < d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

Então $d(x, y) \leq c \cdot d(x, y)$ o que implica que $c \geq 1$, o que é um absurdo. Logo $x = y$.

Provaremos agora que (x_n) é convergente, isto é, que (x_n) seja uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Assim, temos que

$$\begin{array}{rcl} d(x_1, x_2) & = & d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1) \\ d(x_2, x_3) & = & d(f(x_1), f(x_2)) \leq c^2 \cdot d(x_0, x_1) \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ d(x_n, x_{n+1}) & = & d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1). \end{array}$$

A verificação desta generalização é feita por indução. Portanto para todo $n \geq 1$ vale,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1). \tag{3.4}$$

Assim, seja $n, p \in \mathbb{N}$, por meio de (3.4), temos que

$$\begin{array}{rcl} d(x_n, x_{n+p}) & \leq & d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ & \leq & c^n \cdot d(x_0, x_1) + c^{n+1} \cdot d(x_0, x_1) + \cdots + c^{n+p-1} \cdot d(x_0, x_1) \\ & = & (c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ & = & c^n[1 + c + \cdots + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1) \\ & = & c^n \cdot \dfrac{1 - c^p}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1) \end{array}$$

Pois $[1 + c + \cdots + c^{p-1}]$ é soma de uma Progressão Geométrica de razão c. Assim, como $\lim c^n = 0$, pois $0 \leq c < 1$ e $\dfrac{1-c^p}{1-c}$ é constante, conclui-se que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$, e sendo $\mathbb{R}^n$ completo (x_n) é convergente, o que completa esta demonstração. $\square$

Os exemplo a seguir nos mostram a importância das hipótese do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Exemplo 3.3.5. *Seja a função* $g : [1, +\infty] \to [1, +\infty]$, *dada por* $g(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x}}$. *Observe que esta função não possui pontos fixos pois* $g(x) < x$ *para todo* $x \in [1, +\infty]$. *Isto nos mostra que, no Teorema do Ponto Fixo de Banach, é essencial verificar a condição* $g([1, \infty]) \subset [1, \infty]$ *onde neste caso não se tem.*

Exemplo 3.3.6. *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ln(1 + e^x)$, *não possui ponto fixo pois* $f(x) > x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Note que* $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. *Além disso* f *é uma contração fraca (quando* $c = 1$*), pois pelo Teorema do Valor Médio, e pelo fato de* $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ *com* $0 < f'(x) \leq 1$, *temos*

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x)| \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

Isto nos mostra a importancia da hipotese de f *ser uma contração onde* $0 \leq c < 1$.

Exemplo 3.3.7. *Note que a aplicação* $h : (0, 1] \to (0, 1]$, *dado por* $h(x) = \dfrac{x}{2}$ *é uma contração pois* $|h(x) - h(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$ *e* $f(]0, 1]) \subset]0, 1]$. *Mas* f *não possui ponto fixo pois o intervalo* $(0, 1]$ *não é fechado.*

Teorema 3.3.2. *Seja* $F \subset \mathbb{R}^n$ *fechado. Seja* $g : F \to F$ *satisfazendo a condição de lipschitz.* $||g(x) - g(y)|| \leq c \cdot ||x - y||$, *para quaisquer* $x, y \in F$ *com* $0 \leq c < 1$, *então existe um único* $t \in F$ *tal que* $g(t) = t$.

Demonstração. De fato, temos que $\mathbb{R}^n$ é um Espaço Métrico Completo, e como $F \subset \mathbb{R}^n$ sendo fechado temos que F também é um espaço métrico completo. Sendo g uma contração por hipótese então pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe um único ponto fixo de g em F, ou seja, um único $t \in F$ tal que $g(t) = t$. $\square$

Exemplo 3.3.8. *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto fechado e* $f : A \to A$ *sobrejetiva tal que* $d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x, y)$ *com* $k > 1$ *para todo* $x, y \in A$. *Existe um único ponto fixo* $a \in A$ *tal que* $f(a) = a$. *De fato, observe que* f *é injetiva, pois para todo* $x, y \in A$ *com* $x \neq y$ *temos que* $d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x, y) > 0$, *o que nos mostra que* $f(x) \neq f(y)$. *Logo existe* $f^{-1} : A \to A$. *Além disso temos que* f^{-1} *é uma contração pois*

$$d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x, y) \Rightarrow d(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) \leq \frac{1}{k} \cdot d(f(x), f(y)).$$

Logo pelo Teorema 3.3.2 existe um único ponto $a \in A$ tal que $f^{-1}(a) = a$ o que nos garante um único ponto fixo tal que $f(a) = a$.

Em alguns casos a aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach é restringido a um subconjunto fechado F de um espaço métrico completo, que em nosso caso é o $\mathbb{R}^n$. Ou seja, para mostrarmos que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sendo contração, possui um único ponto fixo de f, é suficiente mostrar que F é um subconjunto fechado *invariante* por f, ou seja, que $f(F) \subset F$. Assim, o exemplo a seguir é de grande significância para garantirmos que uma bola fechada seja invariante por f.

Exemplo 3.3.9. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma contração. Dado qualquer ponto $a \in \mathbb{R}^n$, se $r \geq \dfrac{d(a, f(a))}{1-c}$ então a bola fechada $B = B[a; r]$ é invariante por f, isto é, $f(B) \subset B$. Seja $x \in B$, temos que $d(x, a) \leq r$. Nosso objetivo é mostrar que $f(x) \in B$. Ora, observe que*

$$\begin{aligned} d(f(x), a) &\leq d(f(x), f(a)) + d(f(a), a) \\ &\leq c \cdot d(x, a) + d(f(a), a) \\ &\leq c \cdot r + d(f(a), a) \\ &\leq c \cdot r + (1-c)r = r. \end{aligned}$$

Ou seja, $d(f(x), a) \leq r$ portanto temos que $f(x) \in B$.

Observação 3.3.2. *Em particular o teorema acima nos garante que sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma contração, então toda bola fechada em $\mathbb{R}^n$, que seja invariante por f, contem o ponto fixo de f.*

Nota-se que o fato do teorema 3.3.9 considerar a hipótese $r \geq \dfrac{d(a, f(a))}{1-c}$ provem, estrategicamente, de uma necessidade a ser considerada na demonstração onde, para chegarmos no objetivo, temos a considerar que $c \cdot r + d(f(a), a) \leq r$ o que resulta na hipótese colocada no teorema.

No Capítulo seguinte é apresentado algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach na demonstração de alguns problemas, em especial na demonstração de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais.

4 ALGUMAS APLICAÇÕES

Este Capítulo será reservado para algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach, em especial na demonstração de Existência e Unicidades de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias. Para isto, os exemplos, teoremas e definições são releituras baseadas nas seguintes referencias [3], [4] e [5].

4.1 Primeira Aplicação

Como aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach, provaremos um resultado de grande importância para a demonstração do Teorema da Função Inversa conhecido como *Perturbação da identidade.*

Definição 4.1.1. *Seja X e Y espaços métrico. Um homeomorfismo de M sobre N é um bijeção continua $f : M \to N$ cuja a inversa $f^{-1} : N \to M$ é continua.*

Teorema 4.1.1. ***(Perturbação da Identidade.)*** *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ uma contração definida em um subconjunto aberto U do espaço de Banach $\mathbb{R}^m$. A aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre um subconjunto abertos de U.*

Demonstração. Temos que $f : U \to \mathbb{R}^n$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$ é lipschitziana, pois é soma de funções lipschitziana. Além disso temos que f é injetiva pois, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ distintos e considerando a desigualdade $||x| - |y|| \leq |x + y|$ temos

$$\begin{aligned}
||f(x) - f(y)|| &= ||x + \varphi(x) - y - \varphi(y)|| \\
&\geq |\ ||\varphi(x) - \varphi(y)|| - ||x - y||\ | \\
&\geq ||x - y|| - ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \\
&\geq ||x - y|| - c \cdot ||x - y|| \\
&= (1 - c) \cdot ||x - y|| \\
&> 0,
\end{aligned}$$

o que implica que $f(x) \neq f(y)$, logo existe $f^{-1} : f(U) \to U$. Além do mais f^{-1} é lipschitziana pois pela desigualdade acima temos

$$||f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|| \leq \frac{1}{1 - c} \cdot ||x - y||$$

Portando f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Veremos agora que $f(U)$ é aberto, para isso tomemos um $y_0 \in f(U)$ e tomemos $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como U é um aberto do espaço $\mathbb{R}^m$ existe $r > 0$ tal que $B[x_0; r] \subset U$. Queremos determinar um $\delta > 0$ tal que $B(y_0; \delta) \subset f(U)$, ou seja, queremos um δ onde para todo $y \in B(y_0; \delta)$ temos que existe $x \in U$ tal que $y = x + \varphi(x)$, o que equivale a dizer que a função $\xi_y(x) = y - \varphi(x)$ ter ponto fixo para todo $f(x) \in B(y_0; \delta)$. Além do mais, $\xi_y(x)$ é uma contração pois,

$$\begin{aligned} ||\xi_y(x) - \xi_y(x')|| &= ||y - \varphi(x) - y + \varphi(x')|| \\ &= ||\varphi(x) - \varphi(x')|| \\ &\leq c \cdot ||x - x'||. \end{aligned}$$

Assim tomando $\delta = r(1 - c)$ temos que

$$\begin{aligned} ||\xi_y(x) - x_0|| &= ||y - \varphi(x) - x_0|| \\ &= ||y - \varphi(x_0) - x_0 + \varphi(x_0) - \varphi(x)|| \\ &\leq ||y - f(x_0)|| + ||\varphi(x) - \varphi(x_0)|| \\ &\leq \delta + c \cdot ||x - x_0|| \\ &\leq \delta + c \cdot r = r. \end{aligned}$$

Ou seja, determinamos um $\delta > 0$ tal que para todo $y \in B(y_0; \delta) \Rightarrow \xi_y[B[x_0; r]] \subset B[x_0; r]$ então pelo Teorema do ponto fixo de Banach cada ξ_y terá um único ponto fixo. O que completa a demonstração. $\square$

4.2 Existência e Unicidade de Solução para Equações Diferenciais Ordinárias

Uma das principais aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach se dá na demonstração de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Ordinárias ou em Problemas de Valor Inicial. Assim, no teorema abaixo mostraremos uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach no Teorema de Picard. Antes disso precisamos das seguintes definições.

Definição 4.2.1. *Dada uma função contínua $f : U \to \mathbb{R}^n$ onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $(t_0, x_0) \in U$, a equação diferencial de primeira ordem, com valor inicial, definida por f e escrita como:*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f(t, \varphi(t)) \qquad (4.1) \\ \varphi(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Definição 4.2.2. *Uma solução de (4.1) é uma função diferencial $x : I \to \mathbb{R}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ onde I é um intervalo tal que $t_0 \in I$ e $\varphi(t_0) = x_0$ e que satisfaça a equação $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.*

Definição 4.2.3. *Uma função $f : U \to \mathbb{R}^n$, onde $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, é dita lipschitzuana na segunda variável se existir um $c > 0$ tal que*

$$||f(t,x) - f(t,y)|| \leq c \cdot ||x - y||$$

para quaisquer $(t,x),(t,y) \in U$.

Teorema 4.2.1. ***(Teorema de Picard)*** *Dado um aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach, e uma aplicação contínua $f : U \to \mathbb{R}^n$, cumprindo a condição de ser Lipschitziana na segunda variável. Dado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, queremos uma aplicação diferenciavel $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, definida num intervalo I que contenha t_0 tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e para todo $t \in I$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.*

Demonstração. Temos que as condições $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podem ser representada da seguinte forma: Para todo $t \in I$, temos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Tomemos um $\alpha > 0$ e um $\beta > 0$. Tomemos ainda o intervalo $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ e uma bola $B = B[x_0; \beta]$ no espaço de Banach $\mathbb{R}^n$.
Consideremos o espaço métrico $\mathcal{C}(I; B)$ formado pelas aplicações contínuas $\varphi : I \to B$, com a métrica da convergência uniforme. Definamos $F : \mathcal{C}(I; B) \to \mathcal{C}(I; B)$ tal que

$$[F(\varphi)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Mostraremos primeiramente que F está bem definida. Para isto basta provarmos que $F(\varphi)$ é uma função contínua para todo $\varphi \in \zeta(I; B)$.
Seja $M > 0$ tal que $||f(s, \varphi(s)|| < M$ para todo $s \in I \times B$. Logo para todo $t, t' \in I$ com $t' \geq t$ temos

$$\begin{aligned}
||F(\varphi)(t) - F(\varphi)(t')|| &= ||x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t'} f(s, \varphi(s))ds||_{\mathbb{R}^n} \\
&= ||\int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds - \int_{t_0}^{t'} f(s, \varphi(s))ds||_{\mathbb{R}^n} \\
&= ||\int_{t}^{t'} f(s, \varphi(s))ds||_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \int_{t}^{t'} ||f(s, \varphi(s))||_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \int_{t}^{t'} M ds \\
&\leq M \cdot ||t - t'||.
\end{aligned}$$

Ou seja, $F(\varphi)$ é lipschitziana, ou seja, contínua. Além disso considerando $\alpha \leq \dfrac{\beta}{M}$ temos que

$$\begin{aligned}
||F(\varphi)(t) - x_0|| &= ||x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds - x_0||_{\mathbb{R}^n} \\
&= ||\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds||_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||f(s,\varphi(s))||_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M ds \\
&\leq M \cdot ||t - t'|| \\
&\leq M \cdot \alpha \\
&\leq \beta
\end{aligned}$$

Assim, $F(\varphi) \in \mathcal{C}(I;B)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}(I;B)$ ou seja, $F : \mathcal{C}(I;B) \to \mathcal{C}(I;B)$. Dessa forma tomando $k = \alpha \cdot c$ temos que para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{C}(I;B)$ temos

$$\begin{aligned}
||F(\varphi) - F(\psi)|| &= ||\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds||_{\mathbb{R}^n} \\
&= ||\int_{t_0}^{t} [f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))]ds||_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \sup_{s \in I} ||f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))||_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \alpha \cdot \sup_{s \in I} ||f(s,\varphi(s)) - f(s,\psi(s))||_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \alpha \cdot c \cdot \sup ||\varphi(s) - \psi(s)||_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq k \cdot ||\varphi - \psi||.
\end{aligned}$$

Ou seja, F é uma contração do espaço métrico completo $\mathcal{C}(I;B)$ em si mesmo. Logo pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe uma única aplicação contínua $\varphi : I \to B$ tal que $F(\varphi) = \varphi$, ou seja,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds.$$

o que equivale a dizer que $\varphi(t_0) = x_0$ e $\varphi'(t) = f(t,\varphi(t))$ é solução para todo $t \in I$. □

Proposição 4.2.1. *Seja $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para um certo $p \in \mathbb{N}$, $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p fatores) é uma contração de $\mathbb{R}^n$. Então f possui um único ponto fixo $a \in \mathbb{R}^n$, a qual é um ponto fixo "atrator", isto é, $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Temos por hipótese que para um certo $p \in \mathbb{N}$, f^p é uma contração. Assim, como $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico completo segue pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^p(a) = a$. Devemos mostrar agora que a é o ponto fixo de f. De fato, temos que,

$$f(f^p(a)) = f^p(f(a)) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n.$$

Como a é ponto fixo de f^p segue que

$$a = f^p(a) \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(f^p(a)) = f^p(f(a)),$$

ou seja, $f(a)$ também é ponto fixo de f^p. Assim, segue pela unicidade de ponto fixo que $f(a) = a$. Logo a é o único ponto fixo de f.

Se $n = pk + r$, então para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f^n(x_0) = f^{pk}(f^r(x_0))$; Observamos que f^p contração $\Rightarrow$ f^{pk} contração: $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|f^p(x) - f^p(y)| \leq c \cdot |x - y| \Rightarrow |f^{pk}(x) - f^{pk}(y)| \leq c^k \cdot |x - y|,$$

com $0 \leq c^k < 1$, pois $0 \leq c < 1$; Daí, como $f^r(x_0) \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim_{k\to\infty} f^{pk}(f^r(x_0)) = a = f(a)$$

pelo que vimos no início da demonstração. □

Logo abaixo segue a demonstração de Existência e Unicidade de Equações Diferenciais Ordinárias em um caso mais geral, onde nos garante que F^m é uma contração para um m suficientemente grande.

Teorema 4.2.2. ***(Teorema de Picard-Lindelof)*** *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, cumprindo a condição de ser Lipschitziana na segunda variável. Dado um ponto $(t_0, x_0) \in U$, queremos uma aplicação diferenciavel $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, definida num intervalo I que contenha t_0 tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e para todo $t \in I$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.*

Demonstração. Consideremos $\zeta(I; \mathbb{R}^n)$ o espaço métrico formado pelas aplicações contínuas $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, com a métrica da convergência uniforme. Definamos $F : \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^n)$ tal que

$$[F(\varphi)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Seja $M > 0$ tal que $||f(s, \varphi(s)|| < M$ para todo $s \in I \times B$. Logo para todo $t, t' \in I$ com $t' \geq t$ temos

$$\begin{aligned} ||F(\varphi)(t) - F(\varphi)(t')|| &= ||\int_t^{t'} f(s, \varphi(s))ds||_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \int_t^{t'} ||f(s, \varphi(s))||_{\mathbb{R}^n} ds \\ &\leq \int_t^{t'} M ds \\ &\leq M \cdot ||t - t'||. \end{aligned}$$

Ou seja, $F(\varphi)$ é lipschitziana, e consequentemente contínua. Além disso, considerando $\alpha \leq \dfrac{\beta}{M}$ temos que

$$\begin{aligned}
||F(\varphi)(t) - x_0|| &\leq \int_{t_0}^{t} ||f(s,\varphi(s))||_{\mathbb{R}^n} ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M ds \\
&\leq M \cdot ||t - t'|| \\
&\leq M \cdot \alpha \\
&\leq \beta
\end{aligned}$$

Assim, $F(\varphi) \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ ou seja, $F : \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$.
Vamos provar por indução que para todo $\varphi \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ e todo $m \geq 1$ temos F^m é uma contração para m suficientemente grande, ou seja,

$$||F^m(\varphi) - F^m(\psi)|| \leq c^m \frac{||t - t_0||^m}{m!} ||\varphi - \psi||,$$

onde c é a constante de Lipschitz de f. Para $m = 1$ temos que a desigualdade é valida visto no teorema anterior. Suponhamos que seja verdade para um certo $m = k$.

$$||F^k(\varphi) - F^k(\psi)|| \leq c^k \frac{||t - t_0||^k}{k!} ||\varphi - \psi||.$$

Mostraremos que a desigualdade é valida para um $m = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
||F^{k+1}(\varphi) - F^{k+1}(\psi)|| &= ||F(F^k(\varphi)) - F(F^k(\psi))|| \\
&= ||x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi)(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\psi)(s))ds|| \\
&= ||\int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\varphi)(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, F^k(\psi)(s))ds|| \\
&= ||\int_{t_0}^{t} [f(s, F^k(\varphi)(s)) - f(s, F^k(\varphi)(s))]ds|| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ||f(s, F^k(\varphi)(s)) - f(s, F^k(\psi)(s))||ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} c \cdot ||F^k(\varphi)(s)) - F^k(\psi)(s))||ds \\
&\leq c \int_{t_0}^{t} c^k \frac{||t - t_0||^k}{k!} ds \\
&= c^{k+1} \frac{||t - t_0||^{k+1}}{k + 1!} ||\varphi - \psi||.
\end{aligned}$$

Logo concluímos que

$$||F^m(\varphi) - F^m(\psi)|| \leq c^m \frac{||t - t_0||^m}{m!} ||\varphi - \psi||.$$

Como $||t - t_0|| \leq \alpha$ temos

$$||F^m(\varphi) - F^m(\psi)|| \leq \frac{c^m \alpha^m}{m!} ||\varphi - \psi||,$$

onde para um m suficientemente grande temos que $\dfrac{c^m\alpha^m}{m!} < 1$, pois isto é o termo geral de uma série onde sua soma é $e^{c\alpha}$. De fato, note que $\dfrac{(c\alpha)^m}{m!} < 1$, pois a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c\alpha)^m}{m!} = e^{c\alpha},$$

é convergente. Assim, temos que $\lim_{m\to\infty} \dfrac{(c\alpha)^m}{m!} = 0$. Logo existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m > m_0 \Rightarrow \dfrac{(c\alpha)^m}{m!} < 1$. Portanto F^m é uma contração em $\mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$, assim pela Proposição 4.2.1 existe um único ponto $\varphi \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ tal que $F(\varphi) = \varphi$. O que finaliza a demonstração. □

4.3 Método de Newton

O Método de Newton para determinação de zeros de funções pode ser estudado à luz do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Este método nos possibilita acharmos valores aproximados da raiz de uma equação $f(x) = 0$. Para isto, é ultilizado o método da aproximações sucessivas onde a partir de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1 no intervalo I com $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ onde, tomamos um valor inicial $x_0 \in I$, usando a sequência recursiva temos,

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}$$

Assim, se a sequência (x_n) for convergente, isto é, se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, temos que a será uma raiz da equação $f(x) = 0$ pois

$$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \Rightarrow \quad f(a) = 0.$$

Intuitivamente a ideia da sequência acima vem do fato das interseções das retas tangentes ao gráfico da função se aproximarem da raiz procurada. A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dado por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

Onde para $y = 0$:

$$\begin{aligned} -f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

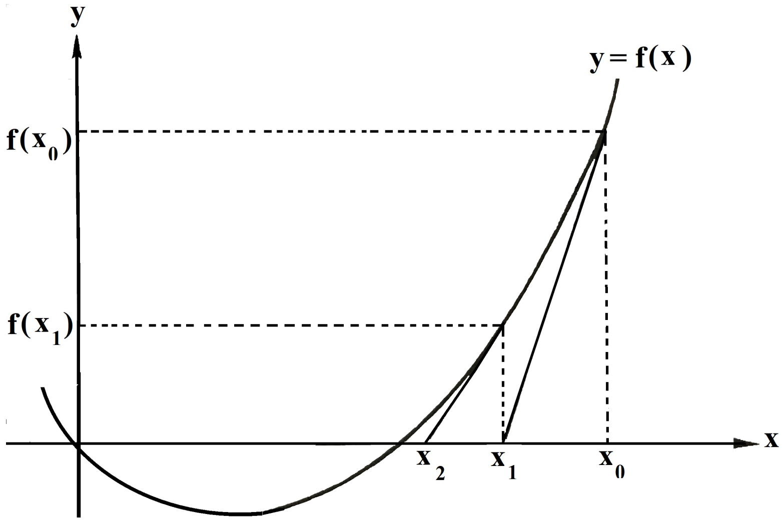


Figura 3 – Inclinação da reta tangente

Visto isso, a definição da "função de Newton"é dada por,

Definição 4.3.1. *Chamamos de função de Newton a aplicação $N : I \to \mathbb{R}$, dada por*

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

É interessante observarmos que o método de Newton é um resultado que nos garante que as raízes da equação $f(x) = 0$ são exatamente os pontos fixos da função de Newton. Para melhor compreensão vejamos isso no seguinte exemplo.

Exemplo 4.3.1. ***(Cálculo Aproximado de Raízes Quadradas)*** *Dado $a > 0$, suponha que se queira determinar $x = \sqrt{a}$. Então $x^2 = a$ e $x^2 - a = 0$, ou seja, $\sqrt{a}$ é a raiz da função $f(x) = x^2 - a$. Como $f'(x) = 2x$, a função de Newton $N(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ é dada por:*

$$\begin{aligned} N(x) &= x - \frac{(x^2 - a)}{2x} \\ &= \frac{2x^2 - x^2 + a}{2x} \\ &= \frac{x^2 + a}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{a}{x}\right]. \end{aligned}$$

A expressão acima é a média aritmética dos números x e $\frac{a}{x}$. Pela desigualdade entre as médias aritmética (A) e geométrica (G), $A \geq G$, segue que

$$\frac{1}{2}\left[x+\frac{a}{x}\right] \geq \sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} = \sqrt{a},$$

ou seja, $N(x) \geq \sqrt{a}$. Como $N(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a}+\frac{a}{\sqrt{a}}\right] = \sqrt{a}$ e $\lim_{x\to\infty} N(x) = +\infty$, segue que $N([\sqrt{a},+\infty)) \subset [\sqrt{a},+\infty)$. Tendo, portanto, uma função $N : [\sqrt{a},+\infty) \to [\sqrt{a},+\infty)$. Além disso, como $N'(x) = \frac{1}{2}\left[1-\frac{a}{x^2}\right]$ é tal que $0 \leq N'(x) < \frac{1}{2}$ para todo $x \in [\sqrt{a},+\infty)$. Pelo Teorema do Valor Médio

$$|N(x)-N(y)| = |N'(x)| \cdot |x-y| < \frac{1}{2}|x-y|,$$

onde nos mostra que $N(x)$ é uma contração. Assim, pelo método iterativo, fixando um ponto $x_0 \in [\sqrt{a},+\infty)$ qualquer, definamos a sequência recursiva,

$$\begin{aligned} x_1 &= N(x_0) \\ x_2 &= N(x_1) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_{n+1} &= N(x_n) = \frac{1}{2}\left[x_n+\frac{a}{x_n}\right]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, como $N(x)$ é uma contração definido no espaço métrico completo $[\sqrt{a},+\infty)$, temos que a sequência (x_n) é convergente, isto é, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Assim,

$$L = \frac{1}{2}\left[L+\frac{a}{L}\right] \Rightarrow L = \sqrt{a},$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. Isto nos mostra que $\sqrt{a}$ é o único ponto fixo de $N(x)$.

Observação 4.3.1. *É fácil ver que, mais precisamente $N([\sqrt{a},+\infty)) = [\sqrt{a},+\infty)$. De fato, como N é contínua em $[\sqrt{a},+\infty)$ e $N([\sqrt{a},+\infty)) \subset [\sqrt{a},+\infty)$, onde $N(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, o Teorema do Valor Intermediário garante a igualdade.*

O método de Newton pode ser aplicado para a determinação da raízes n-ésimas, generalizando o método para a determinação de raízes quadradas.

Exemplo 4.3.2. ***(Cálculo Aproximado de Raízes n-ésima)*** *Dado $a > 0$, suponha que se queira determinar $x = \sqrt[n]{a}$. Então $x^n = a$ e $x^n - a = 0$, ou seja, $\sqrt[n]{a}$ é a raiz da* *função* $f(x) = x^n - a$. *Como* $f'(x) = nx^{n-1}$, *a função de Newton* $N(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} N(x) &= x - \frac{(x^n - a)}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{nx^n - x^n + a}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{(n-1)x^n + a}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n}\left[(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right]. \end{aligned}$$

A expressão acima é a média aritmética dos n *números* $x, ..., x$ *e* $\dfrac{a}{x^{n-1}}$. *Pela desigualdade entre as médias aritmética (A) e geométrica (G),* $A \geq G$, *segue que*

$$\frac{1}{n}\left[(n-1)x + \frac{a}{x^{n-1}}\right] \geq \sqrt[n]{x^{n-1} \cdot \frac{a}{x^{n-1}}} = \sqrt[n]{a},$$

ou seja, $N(x) \geq \sqrt[n]{a}$. *Como*

$$N(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\left[(n-1)\sqrt[n]{a} + \frac{a}{(\sqrt[n]{a})^{n-1}}\right] = \sqrt[n]{a}$$

e $\lim_{x \to \infty} N(x) = +\infty$, *segue que* $N([\sqrt[n]{a}, +\infty)) \subset [\sqrt[n]{a}, +\infty)$. *Tendo, portanto, uma função* $N : [\sqrt[n]{a}, +\infty) \to [\sqrt[n]{a}, +\infty)$. *Além disso, como* $N'(x) = \dfrac{(n-1)}{n}\left[1 - \dfrac{a}{x^n}\right]$ *é tal que* $0 \leq N'(x) \leq \dfrac{(n-1)}{n} < 1$ *para todo* $x \in [\sqrt[n]{a}, +\infty)$. *Pelo Teorema do Valor Médio*

$$|N(x) - N(y)| = |N'(x)| \cdot |x - y| \leq \frac{(n-1)}{n}|x - y|,$$

onde nos mostra que $N(x)$ *é uma contração. Assim, pelo método iterativo, fixando um ponto* $x_0 \in [\sqrt[n]{a}, +\infty)$ *qualquer, definamos a sequência recursiva,*

$$\begin{aligned} x_1 &= N(x_0) \\ x_2 &= N(x_1) \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ &\;\;. \\ x_{n+1} &= N(x_n) = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_n + \frac{a}{(x_n)^{n-1}}\right]. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, como $N(x)$ *é uma contração definido no espaço métrico completo* $[\sqrt[n]{a}, +\infty)$, *temos que a sequência* (x_n) *é convergente, isto é, existe* $L \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{n \to \infty} x_n = L$. *Assim,*

$$L = \frac{1}{n}\left[(n-1)L + \frac{a}{L^{n-1}}\right] \Rightarrow L = \sqrt[n]{a},$$

ou seja, $\lim_{n \to \infty} x_n = \sqrt[n]{a}$. *Isto nos mostra que* $\sqrt[n]{a}$ *é o único ponto fixo de* $N(x)$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho baseou-se no estudo de espaços métricos e espaços métricos completos, onde o intuito principal era mostra que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ satisfaz ambas as condições. Para isso tivemos a necessidade de construir o conjunto $\mathbb{R}^n$ de forma adequada, mostrando seu aspectos topológicos, para que assim tivéssemos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

O foco principal deste trabalho era enunciar, demonstrar e apresentar algumas aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações a qual nos garante que sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço métrico completo, toda contração $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ possui um único ponto fixo em $\mathbb{R}^n$, isto é, existe um único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x$. Para tal demonstração foi utilizado um método iterativo bastante eficaz conhecido como Método das Aproximações Sucessivas, que consiste na construção de uma sequência convergente, onde seus termos depende um do outro partindo de uma condição arbitraria.

Com isso, fica claro a importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach para contrações onde na prática, usar tal resultado, é muito conveniente pois além de garantir a existência e unicidade de um ponto fixo, ele ainda possui diversas aplicações em diferentes áreas da matemática além das expostas aqui. Temos ainda que ao longo do desenvolvimento deste trabalho, puderam ser identificadas possibilidades de melhoria e de continuação do estudo a partir de futuras pesquisas, as quais pretendo explorá-las.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA; Elon Lages. *Análise Real: Funções de n Variáveis*. vol. 2. 3ª ed. Rio de Janeiro: 2007. Editora IMPA. 202 p.

[2] LIMA; Elon Lages. *Espaço Métrico*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), CNPq: : Editora S. A. 1977, (Projeto Euclides). 299 p.

[3] LIMA; Elon Lages. *Análise Real*. vol. 1. 4ª ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1999. 200 p.

[4] BARROS; Cícero Demétrio Vieira de. *O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas Aplicações*. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2013.

[5] DOMINGUES; Hygino Huguero. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*. 2ª.ed. São Paulo: Editora Atual. 1982. 468 p.

[6] MOURA; Carlos A. de. *Análise Funcional Para Aplicações*: Posologio. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2002.