



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS  
CÂMPUS PROF. DR. SÉRGIO JACINTHO LEONOR  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**CRISTH JÚNIOR PEREIRA CARVALHO**

**MODELO PREDADOR-PRESA: UMA APLICAÇÃO DE  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

ARRAIAS-TO  
2019

CRISTH JÚNIOR PEREIRA CARVALHO

**MODELO PREDADOR-PRESA: UMA APLICAÇÃO DE  
SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

Monografia apresentada à UFT – Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do Prof. Me. Adriano Rodrigues.

Orientador: Prof. Me. Adriano Rodrigues.

ARRAIAS-TO  
2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins**

---

- C331m Carvalho, Cristh Júnior Pereira.  
Modelo predador-presa: uma aplicação de sistemas de equações diferenciais ordinárias . / Cristh Júnior Pereira Carvalho. – Arraias, TO, 2019.  
65 f.
- Monografia Graduação - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Arraias - Curso de Matemática, 2019.  
Orientador: Adriano Rodrigues
1. Autovalores. 2. Modelo predador-presa. 3. Sistemas de EDO's. 4. Trajetórias. I. Título

**CDD 510**

---

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

**Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).**

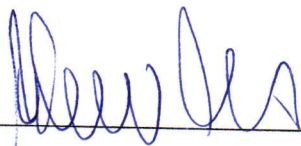
CRISTH JÚNIOR PEREIRA CARVALHO

**MODELO PREDADOR-PRESA: UMA APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.**

Monografia, foi avaliada e apresentada à UFT- Universidade Federal do Tocantins - Câmpus Universitário Prof. Dr. Sérgio Jacintho Leonor, Curso de Licenciatura em Matemática para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Data de Aprovação: 05 / 07 / 2019

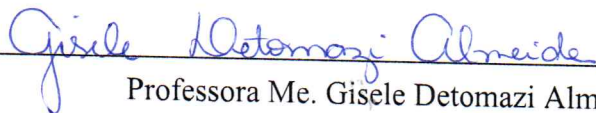
Banca Examinadora:



Professor Me. Adriano Rodrigues, UFT  
Orientador



Professora Dra. Alcione Marques Fernandes, UFT  
Examinadora 1



Professora Me. Gisele Detomazi Almeida, UFT  
Examinadora 2

*À minha mãe Clithenes Pereira de Souza, meu pai Liberato Ferreira de Carvalho, minha avó Edilene Pereira de Sousa, meus avôs Altino e Laurindo. Aos meus irmãos Hugo e Keslley e as minhas irmãs Keysllene, Kelly e Kesllany. E, também ao meu saudoso tio Domingos e minha saudosa avó Alexandrina.*

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar à minha família que sempre me apoiou.

Agradeço ao meu professor orientador Me. Adriano Rodrigues pelo compromisso com este trabalho. E, a professora, Dra. Alcione Marques Fernandes e a professora, Me. Gisele Detomazi Almeida pelas contribuições.

Aos serviços de assistência estudantil da instituição pela Casa dos Estudantes Renarly Gáspio dos Santos e também pelas cotas e auxílio permanência.

Quero agradecer de forma especial meus amigos Manelson Gomes Carvalho e Maurício Castro Gonçalves de Jesus que esteve comigo ao longo destes oito períodos de graduação.

Externo meus agradecimentos aos senhores Dilesmar Francisco e Wanderson Mamedes. Ao meu tio Enivalter Pereira e a Minha tia Ciciane Pereira que muitas vezes me ajudaram.

Por fim, agradeço a todos que me ajudaram com o LaTeX.

*“Sim, o mundo pode ser compreendido e a matemática é o meio de comunicação que temos com ele. Seria necessário algum outro motivo para amarmos a Rainha das Ciências, para querermos aprendê-la, para admirarmos as descobertas de Newton, Gauss, Euler e tantos outros? No entanto, muitas pessoas imaginam que detestam matemática. Na realidade não a detestam: simplesmente a desconhecem e não são culpadas disto. Escolas, professores, livros, em algum momento, traumatizaram-nas ou então, jamais tiveram reais oportunidades de aprendê-las e isto impossibilitou-as de saborear uma porção riquíssima dos prazeres da mente.”*

*(Gilberto Garbi)*

# RESUMO

Este trabalho apresenta a interação entre populações de presas e predadores, por meio das equações Lotka-Volterra. Tendo como objetivo analisar as trajetórias do sistema predador-presa. Para este fim, realizamos uma pesquisa bibliográfica e exploratória para aquisição de conhecimento necessário para o objeto de estudo. Então, apresentamos a solução geral para sistemas lineares homogêneos, em seguida analisamos as trajetórias para cinco casos de autovalores. Discutimos sistemas autônomos e estabilidade, sistemas não-lineares e, por fim analisamos o modelo predador-presa, do qual obtemos algumas informações.

**Palavras-chave:** Autovalores. Modelo Predador-Presa. Sistemas de EDO's. Trajetórias.



# ABSTRACT

This work presents the interaction between prey and predator populations, using the Lotka-Volterra equations. Aiming to analyze the trajectories of the predator-prey system. For this purpose, we performed a bibliographic and exploratory research to acquire the necessary knowledge for the object of study. Then, we present the general solution for homogeneous linear systems, next we analyze the trajectories for five cases of eigenvalues. We discuss autonomous systems and stability, non-linear systems, and finally we analyze the predator-prey model, from which we obtain some information.

**Keywords:** Eigenvalues. Predator-Prey Model. EDO systems. Trajectories.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Retrato de fase para autovalores reais distintos de mesmo sinal . . . . .	31
Figura 2 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 2.1.1 cujo os são reais de sinais opostos . . . . .	33
Figura 3 – Retrato de para uma solução com autovalores iguais e apenas um autovetor independente . . . . .	36
Figura 4 – Representação gráfica de um número complexo $Z$ . . . . .	39
Figura 5 – retrato de fase para sistema do Exemplo 3.1.3 cujo os autovalores são imaginários puros . . . . .	42
Figura 6 – Retrato de fase para o sistema do Exemplo 3.1.4 cujo os autovalores são complexos . . . . .	43
Figura 7 – Gráfico da equação (4.5) para dois valores distintos da constante $c$ . . . . .	51
Figura 8 – Retrato de fase do sistema linear associado ao sistema não-linear (4.2)	54
Figura 9 – gráfico das soluções do sistema (4.4) em função do tempo . . . . .	55
Figura 10 – Gráfico do sistema não-linear (4.2) com indicação dos pontos de: inflexão e máximos e mínimos, das curvas $x(t)$ e $y(t)$ . . . . .	62
Figura 11 – Comparações entre as populações de presas e predadores para o sistema linear (4.4) associado ao sistema não linear (4.2) . . . . .	63

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	PRELIMINARES . . . . .	13
2.1	Sistemas de Equações Diferenciais . . . . .	13
2.2	Solução Geral a partir dos Autovalores e Autovetores . . . . .	19
3	ANÁLISE DAS TRAJETÓRIAS . . . . .	27
3.1	Trajetórias correspondentes aos Autovalores . . . . .	28
3.2	Sistemas Autônomos e Estabilidade . . . . .	43
3.3	Sistemas Não Lineares . . . . .	45
4	MODELO PREDADOR-PRESA . . . . .	48
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	64
	REFERÊNCIAS . . . . .	66

# 1 INTRODUÇÃO

Apresentaremos, neste trabalho, através de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), a interação que há no ecossistema entre uma espécie denominada de predador que alimenta-se da outra espécie, denominada presa. Por exemplo, no distrito do Rio MacKenzie no Canadá, a principal presa do lince é a lebre da neve, e as duas espécies tem um ciclo de aproximadamente dez anos. Podemos ainda, citar o caso de raposas e coelhos numa floresta fechada onde as raposas comem os coelhos e estes alimentam-se da vegetação.

Essa dinâmica entre as duas populações pode ser compreendida por meio das equações Lotka-Volterra, mais conhecida por modelo predador-presa. Este modelo foi desenvolvido pelo biofísico americano Alfred J. Lotka (1880-1949) e pelo matemático italiano Vito Volterra (1860-1940).

A partir de algumas hipóteses, chegamos nas equações de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ dy/dt &= -cy + \beta xy = y(-c + \beta x). \end{aligned}$$

A constante  $a$  é a taxa de crescimento da presa na ausência do predador e  $c$  é a taxa de mortalidade do predador na ausência da presa,  $\alpha$  e  $\beta$  são medidas dos efeitos da interação entre as duas espécies.

Sistema como este é interessante porque evidencia a utilidade da matemática em situações reais. O interesse neste estudo surgiu ao fazer a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), onde percebemos um tópico com bastante aplicação. Vemos, com este trabalho a oportunidade de aprofundar o conhecimento sobre essa disciplina bem como aprender novos conceitos que não foram estudados durante a graduação. Como, por exemplo, sistema de equações diferenciais lineares e não-lineares e estabilidade local de EDO, bem como com o modelo predador-presa, que além de permitir compreender alguns fenômenos que ocorrem na natureza, permite explorar conhecimentos de matemática e biologia.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo apresentar e analisar as trajetórias de soluções de sistemas predador-presa. Para isso, desenvolvemos uma pesquisa bibliográfica e exploratória para aquisição de conhecimento necessário do objeto de estudo. Apresentaremos, então, no capítulo 2 conceitos preliminares necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Tais como, notação matricial de sistemas de EDO's lineares homogêneas, vetor solução, existência e unicidade de soluções e solução geral.

No capítulo 3, discutimos qualitativamente o comportamento das soluções no plano de fase. Apresentamos cinco casos de padrões de trajetórias, sistemas autônomos e estabilidade e sistema não-lineares. No capítulo 4, abordamos e analisamos o modelo predador-presa, onde coletamos algumas informações interessantes através da solução geral e análise de gráfico.

Os conceitos de Álgebra Linear tais como autovalores e autovetores, bem como métodos de soluções de EDO's serão tratados neste trabalho como conceitos já conhecidos. Além disso, os teoremas de existência e unicidade serão enunciados, porém não serão demonstrados, pois a demonstração envolve conceitos que fogem do objetivo deste trabalho. Entretanto, pode ser encontrada no apêndice do livro de Edwards Jr e Penney - Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valores de Contorno 3. ed. Rio de Janeiro: PHB, 1995. As figuras encontradas neste trabalho foram construídas no Geogebra Classic versão: 6.0.541.0.

## 2 PRELIMINARES

### 2.1 Sistemas de Equações Diferenciais

Paulek Jr (2013, p.30) mostra que se considerarmos uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea com coeficientes constantes em  $x$ , dependente de  $t$

$$x'' + px' + qx = 0.$$

E, fazendo a mudança de variável  $x'' = y'$  e  $x' = y$ , convertemos a primeira equação em um sistema linear de duas equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -py - qx \end{cases} \quad (2.1)$$

Este é um exemplo de um método que transforma uma EDO mais complexa em um sistema de EDO's mais simples.

#### Sistemas Lineares de Primeira Ordem

De acordo com Edwards Jr e Penney (1995), os sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas surge de forma natural em aplicações que requerem o uso de duas ou mais variáveis dependentes, cada qual sendo função de única variável. Vamos denotar por  $t$  a variável independente e as variáveis dependentes por  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  e  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ , chamadas funções de termos independentes, ou seja, não dependem de  $x$  ou  $y$ . Assim definimos um sistema de primeira ordem com  $n$  equações e  $n$  variáveis que dependem unicamente de  $t$ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Para facilitar a apresentação vamos utilizar a notação matricial. Logo o sistema (2.2) pode ser representado da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Onde  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , com  $i, j = 1, 2, \dots, n$  é a matriz dos coeficientes constantes,  $\mathbf{X} = [x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o vetor das funções incógnitas,  $\mathbf{X}' = [dx_i/dt]$  é vetor das derivadas das funções incógnitas e  $\mathbf{F} = [f_i(t)]$  é o vetor de termos independentes. Deste modo podemos reescrever o sistema (2.2) como segue:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F} \quad (2.3)$$

**Definição 2.1.1.** Diz-se que o sistema (2.3) é homogêneo se, e somente se, o vetor  $\mathbf{F}$  é identicamente nulo, caso o contrário é dito não-homogêneo.

Neste caso, a equação (2.3) se reduz a

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.4)$$

**Exemplo 2.1.1.** O sistema

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Notemos que a variável independente  $t$  não aparece explicitamente no lado direito desta última equação. Logo, é um sistema homogêneo.

**Definição 2.1.2.** Um **vetor solução** em um intervalo  $I \in \mathbb{R}$  é um vetor coluna

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

que verifica o sistema (2.3) no intervalo  $I$ .

Observe que o vetor nulo é solução trivial do sistema (2.4). Caso o sistema admita uma solução não nula, chamamos esta solução de não trivial.

Vejam os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.1.2.** *Verifique que*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

são soluções do sistema do Exemplo (2.1.1) no intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

**Resolução 2.1.1.** *Derivando  $\mathbf{X}_1$  temos*

$$\mathbf{X}'_1 = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} + 2e^{3t} \\ 2e^{3t} + e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'_1.$$

Agora derivando  $\mathbf{X}_2$

$$\mathbf{X}'_2 = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 2e^{-t} - e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \mathbf{X}'_2.$$

Geralmente, quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem encontramos uma família de curvas que verifica a equação diferencial. Neste caso  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são soluções particulares do sistema (2.5). Enunciaremos a seguir a definição de problemas de valores iniciais que será de bastante utilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

### Problema de Valores Iniciais:

Seja  $t_0$  um ponto no intervalo  $\mathbf{I}$  e

$$\mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

onde  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ , são constantes dadas. Então, encontrar uma solução para o sistema (2.3) sujeito a condição

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \tag{2.6}$$

é um problema de valor inicial no intervalo  $\mathbf{I}$ .



Dadas essas condições é interessante saber se as equações diferenciais possuem soluções únicas. A partir do teorema a seguir, poderemos verificar a existência e unicidade dessas soluções.

**Teorema 2.1.1. Existência e Unicidade**

Suponha que os elementos dos vetores  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{f}(t)$  da equação (2.3) sejam funções de classe  $C^1$  no intervalo  $\mathbf{I}$  que contenha o ponto  $t_0$ . Então, existe solução para o problema (2.3) e, considerando a condição inicial (2.6), esta solução é única.

Segundo Edwards Jr e Penney (1995, p. 15) "problemas de existência e unicidade têm relevância também no processo de modelagem matemática". Eles ilustram bem isto, quando comentam supostamente o estudo de um sistema físico onde o comportamento é totalmente determinado por certas condições iniciais, mas que o modelo matemático proposto envolve uma equação diferencial que não possui solução única. Logo, imediatamente tem-se de analisar se o modelo matemático representa adequadamente o sistema físico.

O teorema seguinte nos mostra que um múltiplo constante de um vetor solução do sistema (2.4) também será uma solução.

**Teorema 2.1.2. Princípio de Superposição**

Seja  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$  um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2.4) no intervalo  $\mathbf{I}$ . Se  $c_1, c_2, \dots, c_k$  são constantes arbitrárias, então, a combinação linear

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{X}_k,$$

é também uma solução em  $\mathbf{I}$ .

*Demonstração.* Seja

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{X}_k$$

derivando  $\mathbf{X}$  temos

$$\mathbf{X}' = c_1 \mathbf{X}'_1 + c_2 \mathbf{X}'_2 + \dots + c_k \mathbf{X}'_k$$

como  $\mathbf{X}'_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_i$ , para qualquer  $1 \leq i \leq k$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{X} &= \mathbf{A}(c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{X}_k) \\ &= c_1 \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{A}\mathbf{X}_k \\ &= \mathbf{X}' \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

**Definição 2.1.3. Dependência e Independência Linear**

Seja  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k$  um conjunto de vetores solução do sistema homogêneo (2.4) no intervalo

**I.** O conjunto é linearmente dependente, ou simplesmente LD, neste intervalo se existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_k$ , não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_k \mathbf{X}_k = 0$$

para todo  $t \in \mathbf{I}$ . Se o conjunto de vetores não é LD em  $\mathbf{I}$ , então, ele é **linearmente independente**, ou simplesmente LI.

Sejam

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$$

os vetores soluções do sistema homogêneo (2.4). Definimos o Wronskiano como

$$\det(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$$

em outras palavras, o Wronskiano é um determinante onde suas colunas são os vetores soluções de (2.4). Este determinante recebe esse nome em homenagem ao filósofo e matemático polonês Josef Maria Hoëné Wronski (1778-1853). O teorema que segue é uma condição suficiente para a independência linear de  $n$  vetores soluções no intervalo  $\mathbf{I}$ .

### **Teorema 2.1.3. Critério para Soluções Linearmente Independentes**

Sejam

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

$n$  vetores solução do sistema homogêneo (2.4) no intervalo  $\mathbf{I}$ . Estes vetores serão linearmente independentes se e, somente se,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo  $t \in \mathbf{I}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \neq 0$  para um ponto  $t_0$  no intervalo  $\mathbf{I}$ , e, suponha por contradição, que  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  sejam linearmente dependentes no intervalo. Como  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  são LD, e cada  $\mathbf{X}_i$  é de classe  $C^1$ , então existe constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  não simultaneamente nulas, tais que

$$c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_n \mathbf{X}_n = 0.$$

Para cada  $t \in \mathbf{I}$ , essa equação pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

a dependência linear de  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  implica que essa equação possui uma solução não trivial para cada  $t \in \mathbf{I}$ . Daí,

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

para todo  $t \in \mathbf{I}$ . Mas isto contradiz a suposição que  $W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \neq 0$ . Logo, a única solução para essa equação é  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Portanto,  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$  são linearmente independentes.  $\square$

**Exemplo 2.1.3.** *Mostramos no exemplo 2.1.2 que os vetores*

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad e \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

são soluções do sistema (2.5). Vamos mostrar, agora, que  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são linearmente independentes no intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Temos que

$$W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2e^{2t} \neq 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Uma vez que provamos um critério para soluções linearmente independentes podemos enunciar a seguinte definição:

**Definição 2.1.4.** *Conjunto Fundamental de Soluções*

Qualquer conjunto  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  de  $n$  vetores solução linearmente independentes do sistema homogêneo (2.4) no intervalo  $\mathbf{I}$  é denominado um **conjunto fundamental de soluções** neste intervalo.

Assim como a existência de solução única, precisamos garantir a existência de um conjunto fundamental de soluções so sistema homogêneo (2.4) no intervalo  $\mathbf{I}$ . Então, segue o teorema:

**Teorema 2.1.4. Existência de um Conjunto Fundamental**

Existe um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo (2.4) no intervalo  $I$ .

Esse teorema é uma consequência do Teorema 2.1.1. Uma vez garantida a existência de um conjunto fundamental de soluções, então, podemos definir a solução geral do sistema homogêneo (2.4):

**Definição 2.1.5. Solução Geral de Sistemas Homogêneos**

Seja  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$  um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (2.4) no intervalo  $I$ . A **solução geral** do sistema no intervalo é

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 + \dots + c_n \mathbf{X}_n,$$

onde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias.

**Exemplo 2.1.4.** No Exemplo 2.1.3 vimos que os vetores

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad e \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

são soluções linearmente independentes do sistema (2.5) em  $(-\infty, \infty)$ . Podemos afirmar então que  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  formam um conjunto fundamental de soluções no intervalo. Então, pela definição 2.1.5 e o teorema 2.1.2 a solução geral neste intervalo é

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

## 2.2 Solução Geral a partir dos Autovalores e Autovetores

Nesta seção vamos definir a solução geral para sistemas lineares homogêneos com coeficientes reais constantes.

Vimos no Exemplo 2.1.4 que a solução geral do sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Notemos que ambos os vetores soluções apresentam tipicamente a mesma forma:

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2.$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes. Estamos interessado em saber se é sempre possível encontrar uma solução da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda_i t} \quad (2.7)$$

para o sistema linear homogêneo de primeira ordem

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (2.8)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a coluna das constantes  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\mathbf{A}$  é uma matriz constantes  $n \times n$ .

Suponhamos que (2.7) é um vetor solução do sistema homogêneo (2.8), então

$$\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t},$$

isso implica que

$$\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{K}e^{\lambda t}$$

dividindo essa equação por  $e^{\lambda t}$ , obtemos

$$\lambda\mathbf{K} = \mathbf{A}\mathbf{K}$$

reordenando temos,

$$\mathbf{A}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{K} = 0$$

colocando o vetor coluna  $\mathbf{K}$  em evidência e de forma conveniente vamos multiplicar o escalar  $\lambda$  pela matriz identidade já que estamos operando com matriz. Assim,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = 0 \quad (2.9)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Notemos que  $\mathbf{K} = 0$  é solução de (2.9), no entanto, estamos interessados em soluções não triviais do sistema (2.8). Para encontrar um vetor solução  $\mathbf{X}$  não trivial do sistema homogêneo (2.8), temos que encontrar um vetor não trivial que satisfaz a equação (2.9). Desta forma, da álgebra linear, ver (BOLDRINI; et. al, 1980), o sistema (2.9) terá mais de uma solução se o

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Por exemplo, considere a matriz constante  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ , então

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 + (-a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \end{aligned}$$

Essa última expressão é um polinômio característico de grau 2, se a matriz de coeficientes for de ordem  $n$ , então o polinômio característico correspondente será de grau  $n$ . Em outras

palavras, para obtermos soluções não triviais de (2.9), devemos encontrar os zeros do polinômio característico. Um autovalor de  $\mathbf{A}$  é um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  e um autovetor é um vetor  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ , ou ainda,  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = 0$ .

Isso mostra que  $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$  será uma solução do sistema linear homogêneo (2.8) se, e somente se,  $\lambda$  for um autovalor da matriz de coeficientes constantes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{K}$  um autovetor correspondente a  $\lambda$ .

**Proposição 2.2.1.** *Se a matriz de coeficientes  $\mathbf{A}_{n \times n}$  do sistema homogêneo (2.8) possui  $n$  autovalores distintos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , então sempre é possível encontrar um conjunto com  $n$  autovetores linearmente independentes  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$ .*

*Demonstração.* Provaremos para o caso em que  $n = 2$ . Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  autovalores distintos, e  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente. Queremos mostrar que  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são L.I. Seja

$$a_1\mathbf{K}_1 + a_2\mathbf{K}_2 = 0 \quad (2.10)$$

multiplicando essa equação por  $\lambda_1$ , temos

$$\lambda_1 a_1 \mathbf{K}_1 + \lambda_1 a_2 \mathbf{K}_2 = 0 \quad (2.11)$$

e aplicando  $\mathbf{A}$  em (2.10), obtemos

$$\lambda_1 a_1 \mathbf{K}_1 + \lambda_2 a_2 \mathbf{K}_2 = 0 \quad (2.12)$$

agora subtraindo (2.12) de (2.11),

$$(\lambda_2 - \lambda_1)a_2\mathbf{K}_2 = 0 \quad (2.13)$$

como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e  $\mathbf{K}_2 \neq 0$  então  $a_2 = 0$ . Voltando em (2.10) e substituindo  $a_2$  concluímos que  $a_1 = 0$ . Portanto,  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são LI.

Usando sucessivamente este procedimento para  $n = 3, 4, \dots, n$  demonstra-se o caso geral.  $\square$

Logo, podemos encontrar um conjunto fundamental de soluções do sistema homogêneo (2.8) no intervalo  $(-\infty, \infty)$ :

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

Diante deste argumento e do Teorema 2.1.2 a solução geral do sistema homogêneo (2.8) segue imediatamente o corolário abaixo.

**Corolário 2.2.1. Solução Geral de Sistemas Homogêneos**

Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $n$  autovalores reais distintos da matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  do sistema (2.8), e sejam  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n$  os autovetores correspondentes. Então a solução geral do sistema (2.8) no intervalo  $(-\infty, \infty)$  é dada por

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{K}_n e^{\lambda_n t}$$

Por questão de objetividade e praticidade, iremos a partir de então trabalhar apenas com a matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  de ordem 2. Pois estamos interessados em estudar sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com duas equações. Assim sendo ( $n = 2$ ), as soluções do sistema homogêneo que vamos encontrar terá o seguinte formato:

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.14)$$

Dependendo dos coeficientes da matriz  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$ , pode ser que o polinômio característico tenha raízes complexas, ou seja, os autovalores de  $\mathbf{A}$  serão do tipo

$$\lambda = \alpha + \beta i; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{com} \quad i = \sqrt{-1}.$$

de acordo com Hefez e Villela (2012, p. 139) se um número complexo  $\lambda = \alpha + \beta i$  é raiz de um polinômio, então seu conjugado  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$  também é. Logo, se os autovalores da matriz  $\mathbf{A}$  são complexos, então um é conjugado do outro, isto é, seja  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  um autovalor complexo de  $\mathbf{A}$ , então  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ . Além disso, os autovetores correspondentes serão conjugados.

De fato, seja

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a matriz de coeficientes constantes. Suponhamos que seus autovalores sejam

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i \text{ e } \bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$$

substituindo  $\lambda_1$  na equação

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{K} = 0$$

temos

$$\begin{pmatrix} (a - \alpha) - \beta i & b \\ c & (d - \alpha) - \beta i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{cases} [(a - \alpha) - \beta i]k_1 + bk_2 = 0 \\ ck_1 + [(d - \alpha) - \beta i]k_2 = 0 \end{cases}$$

dessa primeira equação temos

$$[(a - \alpha) - \beta i]k_1 = -bk_2.$$

Isso implica que

$$k_1 = -\frac{b}{(a - \alpha) - \beta i} \cdot k_2,$$

escolhendo  $k_2 = -\frac{1}{b}$ ,

$$k_1 = \frac{1}{(a - \alpha) - \beta i},$$

logo o autovetor associado a  $\lambda_1$  é

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a - \alpha) - \beta i} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a - \alpha) + \beta i}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para  $\bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ ,

$$\begin{pmatrix} (a - \alpha) + \beta i & b \\ c & (d - \alpha) + \beta i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{cases} [(a - \alpha) + \beta i]k_1 + bk_2 = 0 \\ ck_1 + [(d - \alpha) + \beta i]k_2 = 0 \end{cases}$$

então,

$$k_1 = -\frac{b}{(a - \alpha) + \beta i} \cdot k_2$$

Novamente escolhendo  $k_2 = -\frac{1}{b}$ ,

$$k_1 = \frac{1}{(a - \alpha) + \beta i}.$$

Então o autovetor associado a  $\bar{\lambda}_1$  é

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a - \alpha) + \beta i} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(a - \alpha) - \beta i}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}.$$

Notemos que as coordenadas do autovetor  $\mathbf{K}_2$  associado ao autovalor  $\bar{\lambda}_1$  são os conjugados do autovetor  $\mathbf{K}_1$  associado a  $\lambda_1$ . Portanto,  $\mathbf{K}_2 = \bar{\mathbf{K}}_1$ . Assim, pelo Corolário 2.2.1 chegamos no seguinte resultado para soluções com autovalores complexos da matriz de coeficientes constantes do sistema homogêneo (2.8):



**Afirmção 2.2.1.** (*Soluções Correspondentes a Autovalores Complexos*)

Seja  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  a matriz de coeficientes constantes reais do sistema homogêneo (2.8), e seja  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) um autovalor de  $\mathbf{A}$ . Então,

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} \quad e \quad \mathbf{X}_2 = \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}$$

são soluções do sistema homogêneo (2.8).

Utilizando a fórmula de Euler, vamos escrever essas soluções como funções reais. Seja a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

E, sejam  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  soluções descritas na afirmação 2.2.1, então podemos escrevê-las da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{K}_1 e^{(\alpha + \beta i)t} = \mathbf{K}_1 e^{\alpha t} \cdot e^{\beta i t} \\ \mathbf{X}_2 &= \overline{\mathbf{K}}_1 e^{(\alpha - \beta i)t} = \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t} \cdot e^{-\beta i t} \end{aligned}$$

usando a fórmula (2.15) temos que

$$\begin{aligned} e^{\beta i t} &= \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t \\ e^{-\beta i t} &= \cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{K}_1 e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t) \\ \mathbf{X}_2 &= \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t - i \operatorname{sen} \beta t) \end{aligned}$$

A solução  $\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2$  do sistema (2.8) neste caso pode ser escrita como

$$\mathbf{X} = e^{\alpha t} [(c_1 \mathbf{K}_1 + c_2 \overline{\mathbf{K}}_1) \cos \beta t - i(-c_1 \mathbf{K}_1 + c_2 \overline{\mathbf{K}}_1) \operatorname{sen} \beta t].$$

Entretanto, é possível encontrar um conjunto fundamental de soluções que não envolvam números complexos. De fato, escolhendo as constantes  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$  obtemos uma solução

$$\mathbf{X}_1 = e^{\alpha t} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \cos \beta t - \frac{i}{2} (-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \operatorname{sen} \beta t \right]$$

agora para  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = -\frac{1}{2}$  obtemos uma outra solução

$$\mathbf{X}_2 = e^{\alpha t} \left[ -\frac{1}{2} (-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \cos \beta t + \frac{i}{2} (\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \operatorname{sen} \beta t \right]$$

multiplicando  $\mathbf{X}_2$  por  $-i$ ,

$$\mathbf{X}_2 = e^{\alpha t} \left[ \frac{i}{2} (-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \cos \beta t + \frac{1}{2} (\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \operatorname{sen} \beta t \right]$$

Considerando

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2 = \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$$

temos que  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  são vetores com coordenadas reais. Isto resulta do fato que dado um complexo  $z = a + bi$ , então

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = a \quad \text{e} \quad \frac{i}{2}(-z + \bar{z}) = b$$

são números reais. Dessa forma, podemos escrever as soluções como funções reais,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= e^{\alpha t}(\mathbf{P}_1 \cos \beta t - \mathbf{P}_2 \sin \beta t) \\ \mathbf{X}_2 &= e^{\alpha t}(\mathbf{P}_2 \cos \beta t + \mathbf{P}_1 \sin \beta t). \end{aligned}$$

Mostramos anteriormente que

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \frac{(a - \alpha) + \beta i}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{\mathbf{K}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{(a - \alpha) - \beta i}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

logo,

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{(a - \alpha)}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \\ -\frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Para mostrar que  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são soluções linearmente independentes vamos calcular o wronskiano e para facilitar os cálculos vamos denotar por  $a_1$  e  $a_2$  a primeira e segunda coordenada de  $\mathbf{P}_1$  respectivamente, e por  $b_1$  a primeira coordenada de  $\mathbf{P}_2$ , assim

$$\begin{aligned} W(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \begin{vmatrix} a_1 \cos \beta t - b_1 \sin \beta t & b_1 \cos \beta t + a_1 \sin \beta t \\ a_2 \cos \beta t & a_2 \sin \beta t \end{vmatrix} e^{\alpha t} \\ &= [(a_1 \cos \beta t - b_1 \sin \beta t)a_2 \sin \beta t - (b_1 \cos \beta t + a_1 \sin \beta t)a_2 \cos \beta t] e^{\alpha t} \\ &= [-a_2 b_1 (\sin^2 \beta t + \cos^2 \beta t)] e^{\alpha t} \\ &= -a_2 b_1 e^{\alpha t} \\ &= \frac{1}{b} \cdot \frac{\beta}{(a - \alpha)^2 + \beta^2} \cdot e^{\alpha t} \neq 0 \end{aligned}$$

Observamos que para esta última expressão ser igual a zero só é possível se  $\beta = 0$ , mas se isso ocorre, não temos um autovalor complexo, assim concluímos que esse determinante é diferente de zero. Logo, as soluções  $\mathbf{X}_1$  e  $\mathbf{X}_2$  são linearmente independentes. Assim, podemos reescrever a Afirmação 2.2.1 da seguinte forma:

**Afirmção 2.2.2.** *Seja  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  um autovalor complexo da matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  do sistema homogêneo (2.8). Então*

$$\mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{P}_1 \cos \beta t - \mathbf{P}_2 \operatorname{sen} \beta t)$$

$$\mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{P}_2 \cos \beta t + \mathbf{P}_1 \operatorname{sen} \beta t)$$

*são soluções linearmente independentes do sistema (2.8) no intervalo  $(-\infty, \infty)$ , onde  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  são como em (2.16).*

### 3 ANÁLISE DAS TRAJETÓRIAS

Neste capítulo, vamos introduzir e analisar as soluções dos sistemas de equações diferenciais ordinárias a partir dos autovalores da matriz de coeficientes constantes.

Consideremos o seguinte sistema linear homogêneo com duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x(t) + a_{22}y(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

A fim de encontrar a solução geral do sistema (3.1) vamos reescrevê-lo na forma matricial.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

este sistema pode ainda, ser denotado da seguinte maneira

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (3.3)$$

Como vimos no capítulo anterior para obtermos uma solução não trivial de (3.2) devemos encontrar os autovalores da matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$ , ou seja, as raízes da equação polinomial

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

e os seus autovetores associados. Segundo Boyce e Diprima (2006, p. 258), muitas vezes equações diferenciais não podem ser resolvidas por métodos analíticos. Daí, surge a questão de como podemos obter informação qualitativa das soluções sem resolvê-las de fato. Dada a equação  $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , podemos encontrar as inclinações das retas tangentes, calculando  $\mathbf{A}\mathbf{X}$  para diversos pontos. O conjunto dessas inclinações é chamado de **campo de direções**. E, a partir dele podemos ter uma noção do comportamento da curva.

Vimos na Definição 2.1.2 que uma solução do sistema (3.2) é uma função vetorial que satisfaz o sistema de equações diferenciais. Tal função pode ser representada por uma curva paramétrica no plano  $xy$ . Este plano é chamado de **plano de fase**. Muitas vezes vamos falar de trajetórias, que quer dizer olhar a curva solução como um caminho percorrido por uma partícula onde a velocidade  $d\mathbf{X}/dt$  é definida pela equação diferencial. O conjunto de trajetórias é definido por **retrato de fase**.

Os pontos onde o lado direito da equação (3.2) se anulam são bastante importantes, pois representam soluções constantes ou de equilíbrio do sistema de equações diferenciais

ordinárias. Tais pontos são chamados de **pontos críticos**. Suponhamos que o  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , assim,  $\mathbf{X} = 0$  é o único ponto crítico do sistema (3.2). Vamos analisar agora geometricamente as soluções do sistema (3.2) de acordo com seus autovalores.

Calculando  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \\ &= \lambda^2 - p\lambda + q = 0 \end{aligned}$$

onde  $p$  é o traço<sup>1</sup> da matriz de coeficientes  $\mathbf{A}_{2 \times 2}$  e  $q$  o seu determinante.

Note que se  $\Delta = p^2 - 4q = 0$  temos dois autovalores reais e iguais; se  $\Delta = p^2 - 4q > 0$  temos dois autovalores reais e distintos, podendo ser ambos de mesmo sinal ou com sinais opostos e; se  $\Delta = p^2 - 4q < 0$  temos dois autovalores complexos conjugados. Chamamos de imaginário puro o número complexo com parte real nula. Na próxima seção iremos analisar as trajetórias para cada um destes cinco casos.

## 3.1 Trajetórias correspondentes aos Autovalores

### Caso 1 - Autovalores Reais e Distintos de mesmo sinal

Sabemos que a solução geral do sistema homogêneo (3.3) neste caso é

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.4)$$

tal que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos negativos ou ambos positivos. Vejamos primeiro o comportamento da solução  $\mathbf{X}$ , quando  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Suponhamos que os autovetores correspondentes sejam como mostrados na figura 1.

Olhando para a equação (3.4) observemos que se os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são negativos,  $\mathbf{X}$  tende a zero quando  $t$  tende à infinito, independentemente dos valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0.$$

Isso quer dizer que todas as soluções estão convergindo para o ponto crítico na origem quando  $t$  tende a infinito. Se  $c_2 = 0$  e  $c_1 \neq 0$ , então a solução se torna

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Ou seja, a solução está sobre a reta determinada pelo autovetor  $\mathbf{K}_1$ , para todo  $t$ . Imaginemos que a solução é um caminho onde uma partícula se move. Então, quando  $t$  tende à infinito

<sup>1</sup> Traço de uma matriz quadrada é soma dos elementos da sua diagonal principal.

ela se move para origem sobre a reta suporte de  $\mathbf{K}_1$ . Se  $c_1 = 0$  e  $c_2 \neq 0$ , analogamente, a partícula se move para a origem sobre a reta suporte de  $\mathbf{K}_2$ , quando  $t$  tende a infinito.

Para entender melhor o comportamento das trajetórias, lembrando que  $\lambda_1 < \lambda_2$ , vamos reescrever a equação (3.4) evidenciando-se  $e^{\lambda_2 t}$ , ou seja:

$$\mathbf{X} = e^{\lambda_2 t} \left[ c_1 \mathbf{K}_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \mathbf{K}_2 \right]. \quad (3.5)$$

Observemos que quando  $c_2 \neq 0$  na equação (3.5) o termo  $c_1 \mathbf{K}_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$  é desprezível em comparação com  $c_2 \mathbf{K}_2$  quando  $t$  for bastante grande.

Dessa forma, quando  $t \rightarrow \infty$  a trajetória não apenas se aproxima da origem mas também tende para a reta definida pelo autovetor  $\mathbf{K}_2$ . Assim, todas as curvas soluções se aproximam do ponto crítico tangenciando a reta suporte do autovetor  $\mathbf{K}_2$ , exceto as que iniciam sobre a reta suporte de  $\mathbf{K}_1$ , ou seja, quando  $c_2 = 0$  e  $c_1 \neq 0$ .

Se os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos positivos as trajetórias possuem a mesma configuração, porém com as direções invertidas. Como os fatores exponenciais são positivos, então quando  $t$  tende à infinito a partícula se move afastando do ponto crítico na origem. Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.1.1.** *Considere*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & 1/2 \\ 1/2 & -7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

*um sistema homogêneo com duas equações diferenciais. Analise as trajetórias das curvas soluções.*

Calculando-se o  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ , obtemos os autovalores  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = -3$ . Substituindo  $\lambda_1$  na equação (2.9), temos

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 0 \\ \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -k_2$$

assim, os autovetores associados a  $\lambda_1 = -4$  tem a forma

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} k_1 \\ -k_1 \end{pmatrix}$$

com  $k_1$  qualquer número real. Em particular, vamos escolher  $k_1 = 1$ , e portanto

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, para  $\lambda_2 = -3$ , temos

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = 0 \\ \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_2$$

então, os autovetores associado a  $\lambda_2 = -3$  tem a forma

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

onde  $k_2$  é qualquer número real. Escolhendo  $k_2 = 1$ , temos

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De acordo com a equação (2.14) a solução geral deste sistema é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \quad (3.6)$$

Isto é equivalente a

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-3t} \\ y(t) &= -c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-3t} \end{aligned}$$

Como comentado anteriormente as soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  tendem a zero quando  $t$  tende à infinito. Se  $c_2 = 0$  e  $c_1 \neq 0$ , então, temos as seguintes soluções

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-4t} \\ y(t) &= -c_1 e^{-4t}. \end{aligned}$$

Observando o plano  $xy$ , percebemos que a curva solução é exatamente a reta a  $x = -y$  que nada mais é, a reta definida pelo autovetor  $\mathbf{K}_1$  associado a  $\lambda_1$ . Analogamente, quando  $c_1 = 0$  e  $c_2 \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} x(t) &= c_2 e^{-3t} \\ y(t) &= c_2 e^{-3t}. \end{aligned}$$

estas equações representam a reta  $x = y$ , que também é a reta suporte do autovetor  $\mathbf{K}_2$ . Escrevendo a solução (3.6) com base na equação (3.5), temos

$$\mathbf{X} = e^{-3t} \left[ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (3.7)$$

assim,

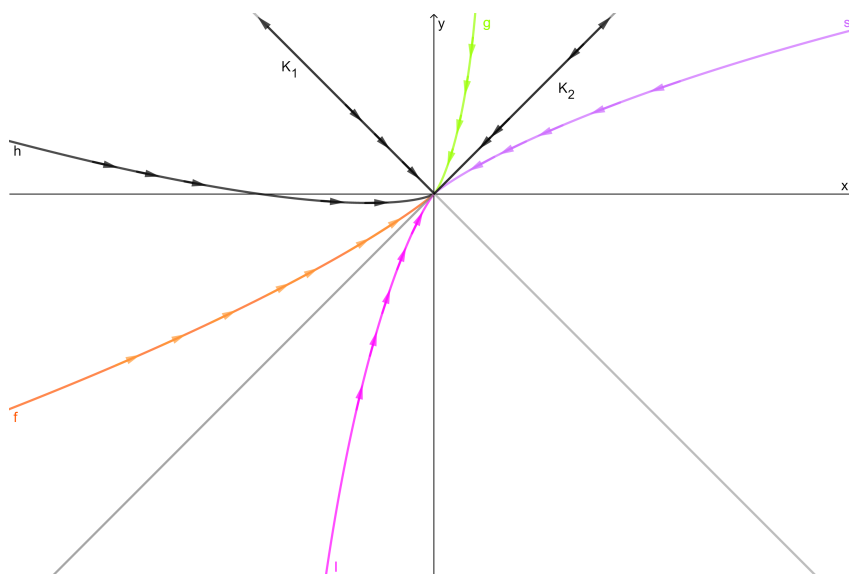
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-3t}(c_1 e^{-t} + c_2) \\ y(t) &= e^{-3t}(-c_1 e^{-t} + c_2). \end{aligned}$$

Quando  $c_2 \neq 0$ , podemos desprezar os termos  $\pm c_1 e^{-t}$  para  $t$  suficientemente grande. Logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_2 e^{-3t} \\ y(t) &= c_2 e^{-3t}. \end{aligned}$$

Isso mostra que quando  $t$  tende à infinito as soluções tendem para a reta de  $\mathbf{K}_2$ .

Figura 1 – Retrato de fase para autovalores reais distintos de mesmo sinal



Fonte: Produção própria

Veremos agora um exemplo que os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são positivos.

**Exemplo 3.1.2.** Considere o sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \\ 1/2 & 7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

estude as trajetórias das soluções.



utilizando os mesmos procedimentos do exemplo anterior encontramos os autovalores  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 3$ , e os autovetores correspondentes

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  respectivamente. Então a solução geral é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad (3.9)$$

As curvas soluções nesse caso tem o mesmo padrão do exemplo anterior, mas com sentido contrário. Quando  $t$  aumenta as trajetórias se afastam da origem devido a exponencial positiva.

De modo geral, quando os autovalores são ambos negativos as soluções convergem para a origem e, se a curva não começa sobre uma das retas suportes dos autovetores, as curvas soluções se aproximam da origem tangenciando a reta suporte do autovetor associado ao maior autovalor. Analogamente, acontece quando os autovalores são ambos positivos, no entanto, a direção do movimento tem sentido contrário em relação ao ponto crítico. Este tipo de ponto crítico é chamado de **nó atrator**.

## Caso 2 - Autovalores Reais de Sinais Opostos

Seja o sistema  $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$  sabemos que a solução geral da equação desse sistema é

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (3.10)$$

Podemos supor que  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$ . Se  $c_2 = 0$  então a curva solução estará contida na reta suporte de  $\mathbf{K}_1$ . Além disso,

$$\|\mathbf{X}\| \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

já que  $\lambda_1 > 0$ . Por outro lado, se  $c_1 = 0$  então a curva solução estará contida na reta suporte de  $\mathbf{K}_2$  e

$$\|\mathbf{X}\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty,$$

pois  $\lambda_2 < 0$ .

É necessário observar o comportamento das soluções quando  $t$  tende à menos infinito. Se  $c_1 = 0$ , a curva solução está contida na reta suporte de  $\mathbf{K}_2$  e,

$$\|\mathbf{X}\| \rightarrow \infty \text{ quando } t \rightarrow -\infty,$$

devido a variável  $t$  e  $\lambda$  serem ambos negativos. Se  $c_2 = 0$ , a curva solução estará contida na reta suporte de  $\mathbf{K}_1$ , logo

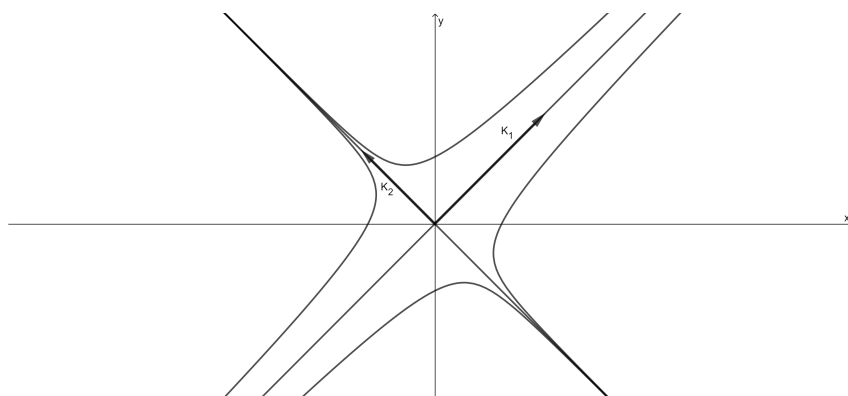
$$\|\mathbf{X}\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow -\infty,$$

pois  $t$  e  $\lambda_1$  são ambos positivos.

Se  $c_1$  e  $c_2$  são simultaneamente diferente de zero as soluções não estão contidas nas retas suporte de  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$ . Mas  $\|\mathbf{X}\|$  tende a infinito, seja quando  $t$  tende a infinito ou a menos infinito. Pois, de qualquer maneira temos a presença de uma exponencial positiva na equação (3.10) e, esta é o fator dominante. A origem nesse caso é um **ponto de sela**.

Um ponto de sela é um ponto de uma superfície onde a inclinação é nula. Entretanto, não corresponde a um ponto de máximo ou mínimo. Na verdade, é ponto de máximo numa direção e de mínimo noutra direção. O formato dessa superfície é similar a uma sela de cavalo. A Figura 2 mostra as curva de níveis no plano  $xy$ , que é a representação plana deste fenômeno.

Figura 2 – Retrato de fase do sistema do Exemplo 2.1.1 cujo os são reais de sinais opostos



**Fonte:** Produção própria

### Caso 3 - Autovalores Iguais

Sejam  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Consideramos o caso em que os autovalores sejam negativos, para os autovalores positivos, as trajetórias serão semelhantes, mas com a direção do movimento invertida. Existem duas situações a considerar, uma é se o autovalor repetido possui dois autovetores independentes e a outra é se possui apenas um.

#### (a) Dois autovetores independentes

Sendo o sistema  $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$  a solução geral é

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{K}_1 e^{\lambda t} + c_2 \mathbf{K}_2 e^{\lambda t}, \quad (3.11)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}x &= c_1 k_{11} e^{\lambda t} + c_2 k_{12} e^{\lambda t} \\y &= c_1 k_{21} e^{\lambda t} + c_2 k_{22} e^{\lambda t}\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são autovetores independentes. A razão  $y/x$  não é dependente de  $e^{\lambda t}$ , mas é dependente das constantes arbitrárias  $c_1$  e  $c_2$  e dos elementos dos autovetores  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$ . Vejamos,

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \frac{c_1 k_{21} e^{\lambda t} + c_2 k_{22} e^{\lambda t}}{c_1 k_{11} e^{\lambda t} + c_2 k_{12} e^{\lambda t}} \\&= \frac{e^{\lambda t} (c_1 k_{21} + c_2 k_{22})}{e^{\lambda t} (c_1 k_{11} + c_2 k_{12})} \\&= \frac{c_1 k_{21} + c_2 k_{22}}{c_1 k_{11} + c_2 k_{12}}.\end{aligned}$$

Notemos que a expressão do lado direito de da última equação é uma constante. Denominando esta, por  $\alpha$  temos

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad \Rightarrow \quad y = \alpha x \quad (3.12)$$

observemos que esta expressão representa uma reta que passa pela origem. Podemos concluir então, que toda trajetória está sobre uma reta que passa pela origem. O ponto crítico neste caso é um **nó próprio**.

### (b) Um autovetor independente

Suponhamos que  $\lambda$  seja um autovalor associado ao sistema  $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$  e que haja somente um autovetor associado a  $\lambda$ . Podemos encontrar uma segunda solução da forma

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t}. \quad (3.13)$$

Devido ao foco deste trabalho ser analisar as trajetórias das curvas soluções, não vamos adentrar muito no método de encontrar uma segunda solução. No entanto, segue uma justificativa simples. substituindo (3.13) no sistema  $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ , obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{K}e^{\lambda t} + \mathbf{K}te^{\lambda t} + \lambda \mathbf{V}e^{\lambda t} &= \mathbf{A}\mathbf{K}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{V}e^{\lambda t} \\ \mathbf{A}\mathbf{K}te^{\lambda t} - \mathbf{K}te^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{V}e^{\lambda t} - \lambda \mathbf{V}e^{\lambda t} - \mathbf{K}e^{\lambda t} &= 0 \iff \\ (\mathbf{A}\mathbf{K} - \mathbf{K})te^{\lambda t} + (\mathbf{A}\mathbf{V} - \lambda \mathbf{V} - \mathbf{K})e^{\lambda t} &= 0\end{aligned}$$

como essa equação deve ser válida para qualquer  $t$ , então

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = 0 \quad (3.14)$$

e

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}. \quad (3.15)$$

Daí, temos que  $\mathbf{K}$  é um autovetor associado a  $\lambda$ . Pela equação (3.15) encontramos uma solução  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ , então resolvendo a equação (3.15) encontramos o vetor  $\mathbf{V}$ , e consequentemente outra solução  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t}$ . Portanto, a solução geral neste caso é

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{K}te^{\lambda t} + \mathbf{V}e^{\lambda t}) \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{K}$  é o autovetor e  $\mathbf{V}$  um autovetor encontrado para uma segunda solução. Suponhamos que  $\lambda < 0$ , então

$$\mathbf{X} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty$$

e

$$\mathbf{X} \rightarrow \infty \quad \text{quando } t \rightarrow -\infty.$$

Para valores arbitrariamente grandes de  $t$  o termo dominante na equação (3.16) é  $c_2\mathbf{K}te^{\lambda t}$ . Então, quando  $t$  tende à infinito as trajetórias se aproximam da origem tangenciando a reta suporte do autovetor  $\mathbf{K}$ . Até mesmo quando  $c_2 = 0$ , pois a solução se torna

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}e^{\lambda t}$$

que está sobre esta reta. Analogamente, consideremos  $t$  assumindo um valor inicial grande com sinal negativo e tendendo para mais infinito, como

$$c_2\mathbf{K}te^{\lambda t}$$

é dominante, cada trajetória será assintótica a uma reta paralela a  $\mathbf{K}$ . A orientação das trajetórias depende das posições relativas de  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{V}$ . Para facilitar a localização das trajetórias vamos reescrever a solução (3.16) da forma

$$\mathbf{X} = [(c_1\mathbf{K} + c_2\mathbf{V}) + c_2\mathbf{K}t]e^{\lambda t} = \mathbf{Y}e^{\lambda t}, \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{Y} = (c_1\mathbf{K} + c_2\mathbf{V}) + c_2\mathbf{K}t$ . Notemos que o vetor  $\mathbf{Y}$  define a direção de  $\mathbf{X}$ , enquanto o termo dominante  $e^{\lambda t}$  impacta diretamente o módulo de  $\mathbf{X}$ . Vejamos também que, com  $c_1$  e  $c_2$  fixos, a expressão de  $\mathbf{Y}$  é uma equação vetorial da reta que passa pelo ponto

$$c_1\mathbf{K} + c_2\mathbf{V}$$

e é paralela a  $\mathbf{K}$ . Para traçar a trajetória correspondente a um dado par de valores  $c_1$  e  $c_2$ , basta primeiramente, traçar a reta dada por

$$(c_1\mathbf{K} + c_2\mathbf{V}) + c_2\mathbf{K}t$$

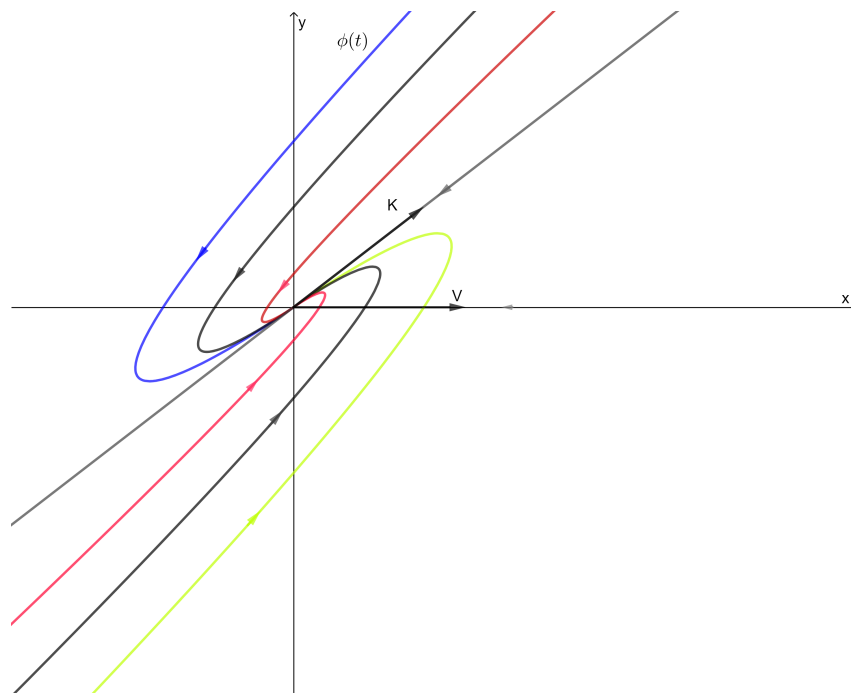
e depois verificar a direção dos  $t$  crescentes sobre esta reta. Depois notemos que a trajetória passa pelo ponto  $c_1\mathbf{K} + c_2\mathbf{V}$  quando  $t = 0$ .

Além disso, quando  $t$  cresce, a direção do vetor  $\mathbf{X}$  (dado por  $\mathbf{Y}$  na eq. (3.17)), acompanha a direção dos  $t$  crescentes sobre a reta, porém, o módulo de  $\mathbf{X}$  decresce rapidamente e tende a zero devido ao fator exponencial decrescente  $e^{\lambda t}$ . Mais quando  $t$  diminui para  $-\infty$ , a direção de  $\mathbf{X}$  está determinada pela reta e o módulo de  $\mathbf{X}$  tende a infinito. As trajetórias apresentadas na Figura 3 foram obtidas a partir desta análise para alguns pares de valores distintos de  $c_1$  e  $c_2$ . Considerando

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right].$$

Por exemplo, a curva  $\phi(t)$  é obtida considerando  $c_1 = c_2 = -5$ .

Figura 3 – Retrato de para uma solução com autovalores iguais e apenas um autovetor independente



Fonte: Produção própria

Se  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  podemos traçar as trajetórias seguindo este mesmo procedimento. No entanto, a direção e a orientação das trajetórias em relação a  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{V}$  serão invertidos, ou seja,

$$\mathbf{X} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty,$$

e

$$\mathbf{X} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow -\infty.$$

O ponto crítico neste caso é chamado **nó impróprio**.

### Caso 4 - Autovalores Imaginários Puros

Consideremos o sistema linear homogêneo com duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \quad (3.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y$$

isso é equivalente a

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Vimos anteriormente que o polinômio característico dessa matriz é

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

As raízes desse polinômio são

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}$$

notemos que  $\lambda$  será imaginário puro se, e somente se,

$$a_{11} + a_{22} = 0 \quad \text{e} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

pois caso  $a_{11} + a_{22} \neq 0$  existirão duas raízes reais, ou complexas com parte real diferente de zero. Mas, se  $a_{11} + a_{22} = 0$  e  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq 0$ , existirão apenas raízes reais.

Sem perda de generalidade, sistemas com autovalores complexos  $\lambda = \alpha \pm \beta i$  são tipicamente da seguinte forma:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Basta fazer  $\alpha = a_{11} + a_{22}$  e  $\beta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ . No caso de autovalores imaginários puros,  $\alpha = 0$ , então este sistema se torna

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

isso é equivalente a

$$\frac{dx}{dt} = \beta y(t) \quad (3.21)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta x(t)$$

Recordaremos a forma polar de um complexo. De acordo com Stewart (2010), um número complexo  $Z = a + bi$  pode ser escrito da seguinte maneira

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

tal que,

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

Com base nisso, vamos então escrever nossas soluções em coordenadas polares. Sejam

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad (3.22)$$

$$\text{e} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (3.23)$$

Derivando a equação (3.22), lembrando que  $r, x$  e  $y$  são funções de  $t$

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dt} &= \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt} \Rightarrow \\ 2r \frac{dr}{dt} &= 2\left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \\ r \frac{dr}{dt} &= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo as Eqs. (3.21) na equação (3.24), temos

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{dt} &= x(\beta y) + y(-\beta x) \\ &= \beta(xy - xy) = 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r = k,$$

onde  $k$  é uma constante.

Derivando a equação (3.23),

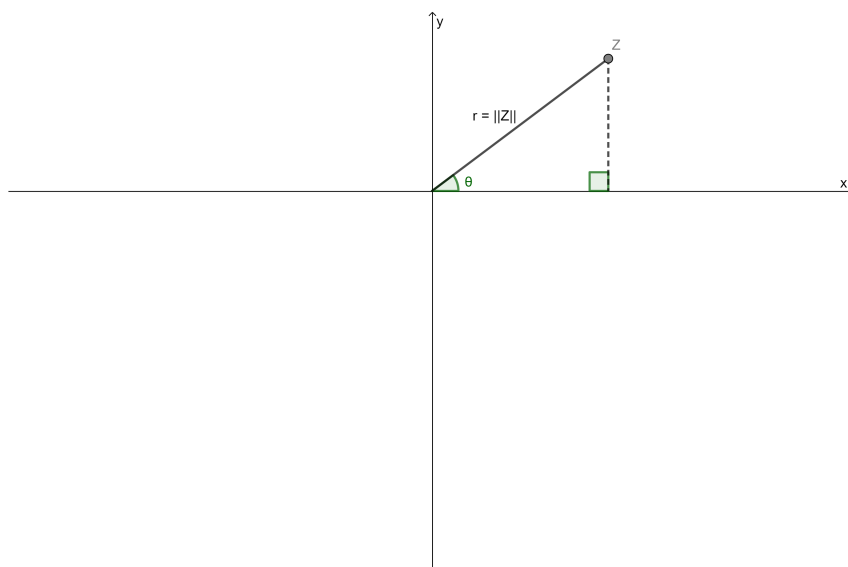
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tan\theta &= \frac{d}{dt}(y/x) \\ \Rightarrow (\sec^2\theta) \frac{d\theta}{dt} &= \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observemos agora que,

$$\sec^2\theta = \frac{r^2}{x^2}.$$

Pois,  $r$  significa distância de um complexo até a origem. De modo que, dado um complexo  $Z$  não nulo, podemos formar um triângulo retângulo como mostra a figura abaixo.  $\theta$  é o ângulo formado pelo eixo  $x$  e o vetor  $\vec{OZ}$ .

Figura 4 – Representação gráfica de um número complexo  $Z$



**Fonte:** Produção própria

Utilizando as relações trigonométricas neste triângulo, obtemos

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad \Rightarrow \quad \sec^2 \theta = \frac{r^2}{x^2}$$

Substituindo (3.21) em (3.25)

$$(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = x(-\beta x) - y(\beta y) \Rightarrow$$

$$(\sec^2 \theta) \frac{d\theta}{dt} = -\beta(x^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{x^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{-\beta r^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\beta$$

Daí,

$$\theta = -\beta t + \theta_0 \quad (3.26)$$

Então as curvas soluções para autovalores da forma  $\pm\beta i$  são

$$x(t) = c_1 k \cos(-\beta t + \theta_0) \quad (3.27)$$

$$y(t) = c_2 k \text{sen}(-\beta t + \theta_0) \quad (3.28)$$



ou,

$$\mathbf{X} = k(c_1 \cos(-\beta t + \theta_0), c_2 \sin(-\beta t + \theta_0)) \quad (3.29)$$

É possível ver na Figura 5 que as trajetórias são círculos centrados na origem. Se  $\beta > 0$ , vemos na equação (3.26), que  $\theta$  diminui quando  $t$  aumenta, assim, o movimento das trajetórias possuem sentido horário e se  $\beta < 0$  tem sentido trigonométrico. Além disso, estas soluções são periódicas com período  $\frac{2\pi}{\beta}$ . Para além disso, vamos mostrar que as trajetórias são elipses quando os autovalores são imaginários puros.

Consideremos o sistema (3.19), vimos que os autovalores são imaginários puros se, e somente se,

$$a_{11} + a_{22} = 0 \quad \text{e} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \quad (3.30)$$

Podemos encontrar as trajetórias do sistema (3.18), dividindo a segunda pela primeira equação:

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

isso é equivalente a

$$-(a_{21}x + a_{22}y)dx + (a_{11}x + a_{12}y)dy = 0 \quad (3.31)$$

seja  $M(x, y) = -(a_{21}x + a_{22}y)$  e  $N(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y)$ , temos que (3.31) é uma equação exata. Pois

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -a_{22} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = a_{11}$$

de (3.30) temos que,

$$a_{11} + a_{22} = 0 \quad \text{isso implica que} \quad a_{11} = -a_{22},$$

logo  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ . Para encontrar a solução  $f$  da equação diferencial (3.31), basta fazer

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= M(x, y) \\ &= -a_{21}x - a_{22}y \end{aligned} \quad (3.32)$$

integrando (3.32) em relação a  $x$  obtemos,

$$f(x, y) = -\frac{a_{21}x^2}{2} - a_{22}xy + g(y).$$

Agora derivando esta última expressão em relação a  $y$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -a_{22}x + g'(y) = a_{11}x + a_{12}y$$

daí,

$$g' = a_{12}y \quad \text{e} \quad g(y) = \frac{a_{12}y^2}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\frac{a_{21}x^2}{2} - a_{22}xy + \frac{a_{12}y^2}{2} \\ &= a_{21}x^2 + 2a_{22}xy - a_{12}y^2 = k \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde  $k$  é uma constante de integração.

De acordo com a geometria analítica a equação (3.33) é uma equação do segundo grau na variável  $x$  e  $y$ , da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0, \quad (3.34)$$

onde  $A = a_{21}$ ,  $B = 2a_{22}$ ,  $C = -a_{12}$  e  $F = -k$ . Chama-se indicador da equação (3.34) o número real  $I = B^2 - 4AC$ . Um resultado importante da geometria analítica diz que se o indicador for menor que zero ( $I < 0$ ), então a equação (3.34) representa uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.

Calculando o indicador em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned} I &= 4a_{22}^2 + 4(a_{21}a_{12}) \\ &= 4a_{22}^2 + 4(a_{21}a_{12}) + 4(a_{22}a_{11}) - 4(a_{22}a_{11}) \\ &= 4a_{22}(a_{22} + a_{11}) - 4(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

de (3.30) concluimos que

$$4a_{22}(a_{22} + a_{11}) - 4(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) < 0$$

logo  $I < 0$ .

Devido a natureza das soluções  $x$  e  $y$  do sistema (3.19) a equação (3.33) não é nem um ponto e nem é um conjunto vazio. Portanto, (3.33) é uma elipse de centro na origem. Neste caso o ponto crítico é chamado de **centro**.

**Exemplo 3.1.3.** *Seja o sistema homogêneo*

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Calculando as raízes do polinômio característico encontramos  $\lambda = \pm 3i$ . Então, a solução geral desse sistema é

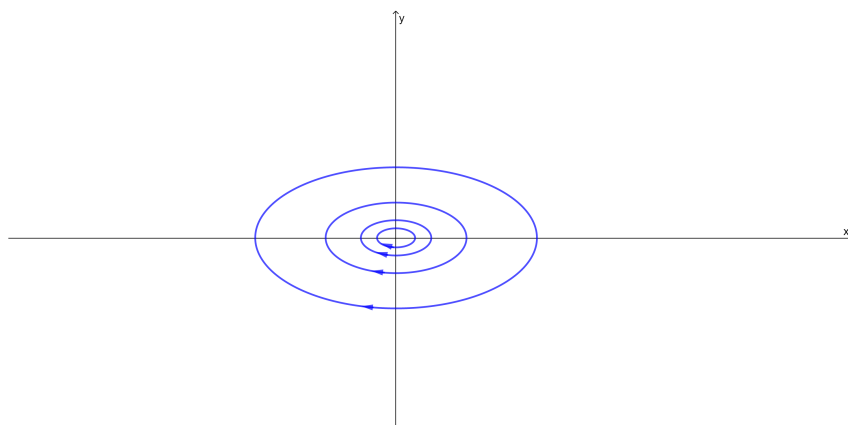
$$\mathbf{X} = k(c_1 \cos(-3t + \theta_0), c_2 \sin(-3t + \theta_0)),$$

e escolhendo  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 1$ , temos

$$\mathbf{X} = k(2 \cos(-3t + \theta_0), \sin(-3t + \theta_0)).$$

Essas soluções são elipses de centro no origem como mostra a figura 5.

Figura 5 – retrato de fase para sistema do Exemplo 3.1.3 cujo os autovalores são imaginários puros



Fonte: Produção própria

## Caso 5 - Autovalores Complexos

Sejam  $\lambda = \alpha \pm \beta i$  autovalores complexos. Vimos no capítulo anterior que a solução do sistema  $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$  para esse caso é

$$\mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{P}_1 \cos \beta t - \mathbf{P}_2 \sin \beta t)$$

$$\mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{P}_2 \cos \beta t + \mathbf{P}_1 \sin \beta t)$$

assim,

$$x(t) = e^{\alpha t}(c_{11} \cos \beta t - c_{12} \sin \beta t)$$

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_{21} \cos \beta t + c_{22} \sin \beta t).$$

Vimos no caso anterior (quando  $\alpha = 0$ ) que essas soluções são elipses que circulam em torno da origem. No entanto, se  $\alpha \neq 0$ , o fator exponencial faz as soluções espiralar. Se  $\alpha < 0$  então  $e^{\alpha t}$  tende à zero quando  $t$  tende à infinito, logo as soluções semelhantes a elipses circulam cada vez mais próximas da origem. Se  $\alpha > 0$ ,  $e^{\alpha t}$  tende à infinito quando  $t$  tende à infinito, as soluções são semelhantes a elipses, mas cada vez mais se afasta da origem. Neste caso o ponto crítico é chamado **ponto espiral**.

**Exemplo 3.1.4.** *Seja o sistema*

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

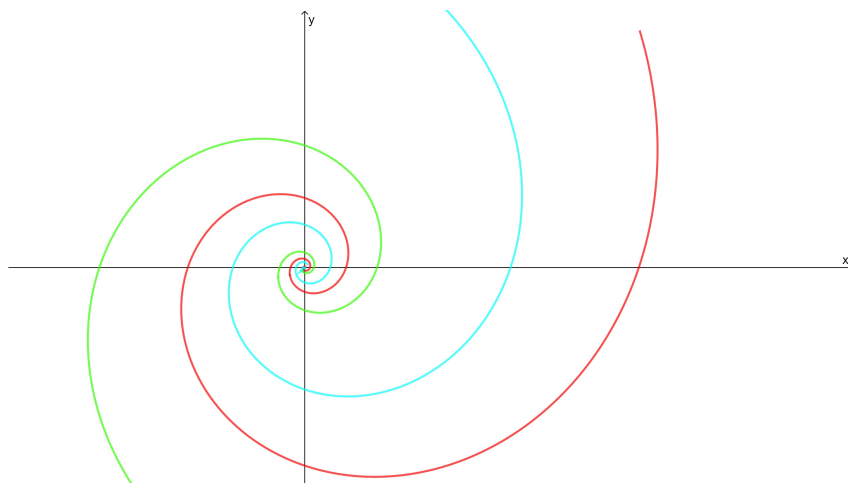
calculando as raízes do polinômio característico dessa matriz, encontramos os autovalores  $\lambda = 1 \pm 3i$ , então as soluções são

$$x(t) = e^t(c_{11} \cos 3t - c_{12} \sin 3t)$$

$$y(t) = e^t(c_{21} \cos 3t + c_{22} \sin 3t)$$

quando  $t$  tende à infinito, a exponencial positiva faz as soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  tender ao infinito como mostra na figura 6

Figura 6 – Retrato de fase para o sistema do Exemplo 3.1.4 cujo os autovalores são complexos



**Fonte:** Produção própria

Nas próximas seções estaremos interessados apenas no caso em que os autovalores são imaginários puros.

## 3.2 Sistemas Autônomos e Estabilidade

### Sistemas Autônomos

Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é chamado autônomo quando pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

desse modo, a variável independente  $t$  não aparece explicitamente no membro direito das equações. Seja o sistema autônomo com duas equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y) \tag{3.35}$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

Podemos escrever esse sistema na seguinte forma vetorial

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

onde  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$ . O sistema

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (3.36)$$

é um exemplo simples de um sistema autônomo. No entanto, se pelo menos um elemento da matriz de coeficiente  $\mathbf{A}$  for uma função da variável independente  $t$ , então o sistema não é autônomo. A discriminação entre sistemas autônomos e não-autônomos faz-se necessário para análise qualitativa geométrica que desenvolveremos neste trabalho.

Suponhamos que  $F$  e  $G$  sejam funções de classe  $C^1$  em algum domínio  $D$  do plano  $xy$ . Seja  $(x_0, y_0)$  um ponto pertencente a  $D$ , então, pelo Teorema 2.1.1 existe uma única solução do sistema (3.35) que satisfaz as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (3.37)$$

A solução está definida em algum intervalo de tempo  $I$  que contém o ponto  $t_0$ . Muitas vezes é mais prático escrever o problema de valor inicial (3.37) também na forma vetorial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (3.38)$$

onde  $\mathbf{x}^0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$ . O sistema autônomo (3.35) tem um campo de direções associado que não depende do tempo. Um dado importante que decorre disso, é que todas as soluções que satisfazem uma condição inicial do tipo (3.37) possuem a mesma trajetória, independente do instante  $t_0$  no qual elas estão em  $(x_0, y_0)$ . Dessa forma, podemos obter, simultaneamente, através de um único retrato de fase do sistema linear (3.36), informações qualitativas sobre todas as soluções do sistema (3.35).

## Estabilidade e Instabilidade

Considere o sistema autônomo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.39)$$

Os pontos onde  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , se existirem, implica que  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  e, portanto, são chamados de pontos críticos do sistema autônomo (3.39). Estes pontos correspondem as soluções de equilíbrio ou constantes do sistema de equações diferenciais autônomos.

Um ponto crítico do sistema (3.39) será considerado **estável** se, para algum  $\epsilon > 0$  existir um  $\delta > 0$ , tal que toda solução  $\mathbf{x} = \phi(t)$  do sistema (3.35), satisfaz, em  $t = 0$ ,

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta,$$

de modo que para todo  $t > 0$

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon. \quad (3.40)$$

Em outras palavras isso quer dizer que todas as soluções que iniciam próximas, isto é, a uma distância menor do que  $\delta$  de  $\mathbf{x}^0$  permanecem próximas, ou seja, a uma distância menor do que  $\epsilon$  de  $\mathbf{x}^0$ . Apesar disso, a trajetória da solução não necessariamente precisa tender ao ponto crítico  $\mathbf{x}^0$  quando  $t$  à infinito. Um ponto crítico que não obedece a condição (3.40) é considerado **instável**. Em particular o ponto crítico centro é estável.

Para um ponto crítico  $\mathbf{x}^0$  ser denominado **assintoticamente estável** é preciso ser estável e existir um  $\delta_0 > 0$  tal que, se uma solução  $\mathbf{x} = \phi(t)$  satisfaz

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0, \quad (3.41)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0. \quad (3.42)$$

Assim, as trajetórias que iniciam próximas do ponto crítico  $\mathbf{x}^0$  além de permanecerem próximas têm que acabar tendendo a  $\mathbf{x}^0$  quando  $t$  tende à infinito. Veja que a estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte que a estabilidade, pois um ponto crítico tem que ser estável antes de ser assintoticamente estável. Porém, somente a condição (3.42), que é inconcebível para a estabilidade assintótica, não garante nem estabilidade simples.

### 3.3 Sistemas Não Lineares

Nas seções 3.1 e 3.2 apresentamos o comportamento das curvas soluções de sistemas lineares homogêneos para cada tipo de autovalor e propriedades de estabilidade do ponto crítico. Nessa seção iremos nos concentrar em soluções com autovalores complexos. De acordo com os conceitos discutidos nas seções precedentes, podemos afirmar:

**Corolário 3.3.1.** *O ponto crítico  $\mathbf{x}^0 = 0$  do sistema linear homogêneo (3.36) é estável se  $\lambda = \pm\beta i$  são imaginários puros.*

A partir desse corolário percebemos que um autovalor da matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  pode determinar o tipo de ponto crítico e sua estabilidade. Por outro lado, os autovalores dependem dos coeficientes de  $\mathbf{A}$ .

Segundo Boyce e Diprima (2006, p. 269) "Quando um sistema desses aparece em algum campo aplicado os coeficientes resultam, em geral, de medidas de determinadas quantidades físicas." Estas medidas podem sofrer pequenas mudanças, isto é, os coeficientes podem sofrer pequenas perturbações e isso pode afetar a estabilidade do ponto crítico, bem como a configuração das trajetórias. Por exemplo, considere o sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

calculando as raízes do polinômio característico encontramos os autovalores  $\lambda = \pm\beta i$ , logo o ponto crítico  $(0,0)$  é um ponto de centro estável. Considere agora o sistema

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \epsilon & \beta \\ -\beta & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

tal que  $|\epsilon|$  é arbitrariamente pequeno. Calculando as raízes do polinômio característico encontramos os autovalores  $\lambda = \epsilon \pm \beta i$ . Observe que independente de quanto  $|\epsilon|$  for pequeno o autovalor  $\lambda = \epsilon \pm \beta i$  transforma o ponto de centro num ponto espiral. Se  $\epsilon < 0$ , o ponto espiral é assintoticamente estável e, se  $\epsilon > 0$  o ponto espiral é instável.

Contudo, quando os autovalores são imaginários puros  $\lambda = \pm\beta i$  o ponto crítico é um centro e as trajetórias são curvas fechadas em volta dele. Mas se os coeficientes da matriz  $\mathbf{A}$  sofre pequenas perturbações os autovalores se tornam  $\lambda = \alpha \pm \beta' i$ , onde  $|\alpha|$  é pequeno e  $\beta' \approx \beta$ . Logo, as novas trajetórias são espirais em vez de curvas fechadas. Se  $\alpha < 0$  o sistema é assintoticamente estável e, se  $\alpha > 0$  é instável.

Seja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.43}$$

um sistema autônomo com duas equações diferenciais ordinárias não-lineares. Vamos analisar agora as trajetórias deste sistema na vizinhança de um ponto crítico  $\mathbf{x}^0$ . Para isso precisamos aproximar o sistema não-linear (3.43) à um sistema linear, pois deste último sabemos descrever o comportamento das trajetórias.

Consequentemente é necessário saber como encontrar um sistema linear apropriado, de tal forma que as trajetórias sejam boas aproximações do sistema não-linear. Sem perda de generalidade, podemos escolher o ponto crítico sendo a origem, pois se  $\mathbf{x}^0 \neq 0$ , sempre podemos fazer a substituição  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$  na equação (3.43). Seja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{3.44}$$

um sistema não linear. Suponha que  $\mathbf{x} = 0$  é um ponto crítico isolado do sistema (3.44). Ou seja, existe algum círculo em torno da origem, no qual não existem nem um outro ponto crítico. Suponhamos também que  $\det \mathbf{A} \neq 0$  então  $\mathbf{x} = 0$  é um ponto isolado do sistema  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .

O sistema não-linear (3.44) será próximo do sistema linear  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , se  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  for pequeno.

**Definição 3.3.1.** *Seja o sistema não-linear (3.44). Suponha que  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  seja de classe  $C^1$ , se  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  satisfaz a condição*

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mathbf{x} \rightarrow 0, \tag{3.45}$$

então o sistema (3.44) é **quase linear** na vizinhança do ponto crítico  $\mathbf{x} = 0$ .

A definição 3.3.1 diz que  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$  é pequeno em comparação a  $\|\mathbf{x}\|$  próximo da origem. Escrevendo o sistema não-linear (3.44) em forma escalar, temos

$$x' = F(x, y) \quad \text{e} \quad y' = G(x, y). \quad (3.46)$$

Seja  $(x_0, y_0)$  ponto crítico de (3.46), suponhamos que as funções  $F(x, y)$  e  $G(x, y)$  têm derivadas parciais contínuas até a segunda ordem, então pela série de Taylor em torno do ponto  $(x_0, y_0)$ , temos

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \mu_1(x, y) \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \mu_2(x, y) \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\mu_1(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad \text{e,}$$

analogamente para  $\mu_2$ .

Observe que

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

e que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d(x - x_0)}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d(y - y_0)}{dt}. \end{aligned}$$

Assim o sistema (3.46) se torna

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1(x, y) \\ \mu_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Portanto, se as funções  $F$  e  $G$  forem de classe  $C^2$ , então o sistema (3.46) é quase linear. Além disso, o sistema linear correspondente, isto é, que aproxima o sistema não-linear (3.46) na vizinhança de  $(x_0, y_0)$  é dado pela parte linear da equação (3.47):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

onde  $u = x - x_0$  e  $v = y - y_0$ .

Como o termo não-linear  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é pequeno comparado ao termo linear  $\mathbf{A}\mathbf{x}$  quando  $\mathbf{x}$  é pequeno, podemos presumir que as trajetórias do sistema linear (3.36) sejam boas aproximações do sistema não-linear (3.43).



## 4 MODELO PREDADOR-PRESA

Assim como comentamos na introdução deste trabalho, neste capítulo iremos discutir a interação ao longo do tempo entre duas espécies, das quais uma se alimenta da outra, ou seja, uma espécie predadora e outra a presa. Vamos apresentar as equações Lotka-Volterra, que é um modelo predador simples e, portanto não descreve completamente as relações que ocorrem no ecossistema. Apesar disso, este modelo é o primeiro passo para compreender outros modelos mais próximos da realidade.

É recorrente em modelagem de problemas físicos, atribuir notações simbólicas para aquilo se deseja estudar. Nesse sentido, vamos chamar de  $x$  e  $y$  as populações da presa e do predador, respectivamente e de  $t$  o tempo.

Suponhamos que num certo instante não exista a espécie predadora, então a população de presa cresce a uma taxa proporcional à população existente. Em termos matemáticos isso significa:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \text{quando } y = 0,$$

onde  $a > 0$ .

Em outras palavras isso quer dizer que a variação da população de presa em relação ao tempo é igual ao produto da população atual naquele instante por uma taxa de proporção. Suponhamos agora que não exista presa, então a população de predador não têm do que se alimentar, logo tende a extinção. Assim,

$$\frac{dy}{dt} = -cy, \quad \text{quando } x = 0,$$

onde  $c > 0$ . Ou seja, a população de predadores ao no decorrer do tempo é decrescida por uma taxa proporcional a população atual.

Por fim, suponhamos que no ambiente tenha a presença das duas espécies. Quanto maiores as populações, maiores as possibilidades de encontros entre as espécies. Quanto menores as populações, menores as possibilidades. Logo, o número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações.

Sendo que a cada encontro a população de predador tende a crescer e a de presa tende a diminuir. Assim, a população de predador cresce a uma taxa  $\gamma xy$  e a de presa decresce a uma taxa  $-\omega xy$ , onde  $\gamma$  e  $\omega$  são constantes positivas. A partir dessas hipóteses

chegamos nas equações Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - \omega xy = x(a - \omega y) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x)\end{aligned}\tag{4.1}$$

As constantes  $a$  e  $\omega$  são, respectivamente a taxa de crescimento da presa na ausência do predador e a taxa de mortalidade com a presença do mesmo. As constantes  $c$  e  $\gamma$  são, respectivamente a taxa de mortalidade do predador na ausência da presa e a taxa de crescimento com a presença da presa.

Antes de adentrar no caso geral de soluções deste modelo faremos um exemplo. Suponhamos que uma espécie de presa na ausência do predador mantenha constante sua população atual, ou seja,  $a = 1$ , mas com a presença do predador sua população tende diminuir a uma taxa  $\omega = \frac{1}{2}$ . Suponhamos agora que a população de predador tende a morrer a uma taxa  $c = \frac{3}{4}$ , quando não tem presa, mas com a presença da presa tem sua população aumentada a uma taxa  $\gamma = \frac{1}{4}$ .

Assim temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(1 - \frac{1}{2}y\right) = x - \frac{1}{2}xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}xy.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Os pontos críticos desse sistema são tais que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0,$$

logo

$$x\left(1 - \frac{1}{2}y\right) = 0 \quad \text{e} \quad y\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) = 0$$

daí  $x = y = 0$  ou  $x = 3$  e  $y = 2$ .

Então os pontos críticos são  $(0, 0)$  e  $(3, 2)$ . O primeiro não nos interessa, pois não faz sentido analisar um sistema que não haja nem presa nem predador. Vamos analisar então o ponto  $(3, 2)$ .

Sejam

$$F(x, y) = x - \frac{1}{2}xy \quad \text{e} \quad G(x, y) = -\frac{3}{4}y + \frac{1}{4}xy.$$

Para facilitar as contas vamos fazer  $x = 3 + u$  e  $y = 2 + v$ , assim obtemos

$$\frac{du}{dt} = -\frac{3}{2}v - \frac{1}{2}uv = v\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}u\right) \quad (4.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}uv = u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}v\right),$$

onde

$$F(u, v) = -\frac{3}{2}v - \frac{1}{2}uv \quad \text{e} \quad G(u, v) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}uv.$$

Como  $F$  e  $G$  são de classe  $C^2$ , pois são funções polinomiais em duas variáveis, vamos utilizar a equação (3.48) para encontrar o sistema linear correspondente ao sistema não-linear (4.3). As derivadas parciais são,

$$F_u = -\frac{1}{2}v \quad \text{e} \quad F_v = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}u$$

e,

$$G_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}v \quad \text{e} \quad G_v = \frac{1}{4}u.$$

Logo o sistema linear

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u(0,0) & F_v(0,0) \\ G_u(0,0) & G_v(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

é igual a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

O polinômio característico desse sistema é

$$\lambda^2 + \frac{3}{4} = 0,$$

logo os autovalores são  $\lambda = \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Então o ponto crítico é um centro estável para o sistema linear (4.4). No entanto não podemos concluir nada a respeito das trajetórias do sistema não-linear (4.3), pois como vimos na Seção 3.3, esse é um caso sensível que qualquer mínima perturbação no sistema pode alterar o padrão das trajetórias. Voltamos então ao sistema (4.2) e dividimos a segunda equação pela primeira:

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{y(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x)}{x(1 - \frac{1}{2}y)}.$$

Veja que esta equação é separável

$$\frac{1 - \frac{1}{2}y}{y} dy = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x}{x} dx$$

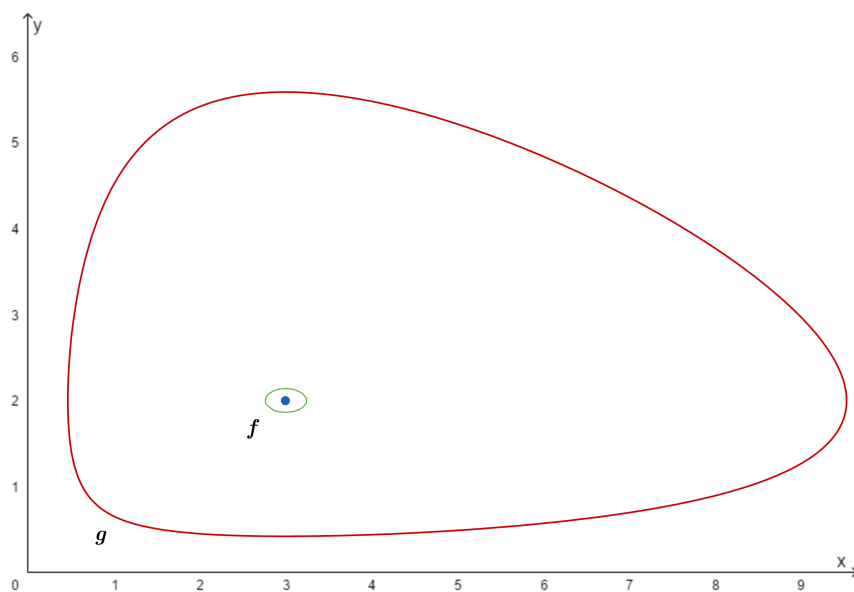
e integrando-a, temos

$$\frac{3}{4} \ln x + \ln y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}x = c \quad (4.5)$$

onde  $c$  é uma constante de integração.

A prova que a equação (4.5), é uma curva fechada por métodos analíticos é bastante complexa e isto desvia do propósito desse trabalho, que é analisar as trajetórias das soluções. Entretanto, utilizando o Geogebra temos seu gráfico apresentado na Figura 7 com a constante  $c_1$  obtida a partir de condições iniciais  $x(0) = \frac{13}{4}$  e  $y(0) = 2$  originando a curva  $f$  e com a constante  $c_2 = -1$  a curva  $g$ . O ponto  $A = (3, 2)$ .

Figura 7 – Gráfico da equação (4.5) para dois valores distintos da constante  $c$



**Fonte:** Produção própria

Uma vez que as curvas são fechadas, isso nos indica que o ponto crítico  $(3, 2)$  é um ponto de centro também para o sistema não-linear (4.2), então podemos analisar o sistema linear correspondente sem nos preocupar com casos em que perturbações no sistema implique em situações indesejadas. Dessa forma prosseguimos com a análise do sistema linear correspondente (4.4).

Logo os autovalores associados ao sistema (4.4) são  $\lambda = \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Então fazendo  $\mathbf{AK} = \lambda \mathbf{K}$ , temos

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}k_2 = i \frac{\sqrt{3}}{2}k_1 \\ \frac{1}{2}k_1 = i \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 \end{cases}$$

escolhendo  $k_1 = 1$  obtemos  $k_2 = -\frac{i}{\sqrt{3}}$ , assim um autovetor desse sistema é

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

e conseqüentemente,

$$\bar{\mathbf{K}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Por (2.16) temos que

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Decorre da Afirmação 2.2.2, lembrando que a parte real  $\alpha = 0$ , que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] \\ \mathbf{U}_2 &= \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]. \end{aligned}$$

A solução geral desse sistema é

$$\mathbf{U} = c_1 \mathbf{U}_1 + c_2 \mathbf{U}_2$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} u &= c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ v &= \frac{c_1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{c_2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right). \end{aligned}$$

Considerando as seguintes condições iniciais:

$$u(0) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad v(0) = 0,$$

assim

$$u(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{4}$$

e

$$v(0) = \frac{c_1}{\sqrt{3}} \sin(0) - \frac{c_2}{\sqrt{3}} \cos(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0.$$

Daí temos que

$$u = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{4.6}$$

$$v = \frac{1}{4\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{4.7}$$

utilizando a identidade trigonométrica da soma de argumentos para o cosseno, podemos escrever a equação (4.6) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u &= 3k \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right) \\ &= 3k \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cos\theta - 3k \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \sin\theta \end{aligned}$$

de modo que

$$3k \cos\theta = \frac{1}{4}, \quad 3k \sin\theta = 0 \quad (4.8)$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 \cos^2\theta = \frac{1}{16} \quad (4.9)$$

$$9k^2 \sin^2\theta = 0$$

somando as equações (4.10) temos que

$$\begin{aligned} 9k^2 &= \frac{1}{16} \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

substituindo  $k$  em (4.8) encontramos  $\theta = 0$ .

Analogamente, podemos escrever (4.7) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{3}k \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right) \\ &= \sqrt{3}k \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \cos\theta + \sqrt{3}k \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \sin\theta \end{aligned}$$

usando o mesmo raciocínio,

$$\sqrt{3}k \cos\theta = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad \sqrt{3}k \sin\theta = 0 \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow 3k^2 \cos^2\theta = \frac{1}{48} \quad (4.11)$$

$$3k^2 \sin^2\theta = 0$$

novamente somando as equações (4.12),

$$\begin{aligned} 3k^2 &= \frac{1}{48} \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

substituindo  $k$  em (4.10) encontramos  $\theta = 0$ , como esperado.

Com isto, mostramos que as constantes  $k$  e  $\theta$  podem ser determinadas pelas condições iniciais. Assim, podemos escrever as curvas soluções da seguinte maneira:

$$u = 3k \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right)$$

$$v = \sqrt{3}k \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right)$$

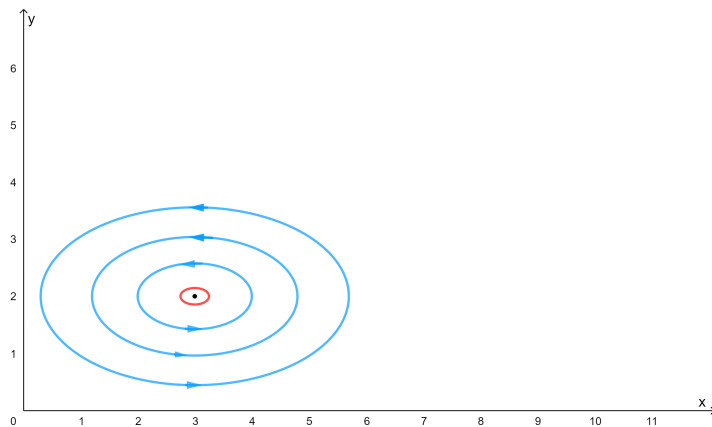
voltando o problema para as variáveis  $x$  e  $y$  temos

$$x = 3 + 3k \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right)$$

$$y = 2 + \sqrt{3}k \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \theta\right).$$

Essas soluções são curvas periódicas que circulam em torno do ponto crítico  $(3, 2)$ . Próximo ao ponto crítico essas soluções representam boas aproximações do sistema não-linear (4.2). A Figura 8 apresenta o retrato de fase para o sistema (4.4) associado ao sistema não-linear (4.2), para alguns valores de  $k$ . A curva em vermelho é obtida com  $k = \frac{1}{12}$  e  $\theta = 0$ .

Figura 8 – Retrato de fase do sistema linear associado ao sistema não-linear (4.2)

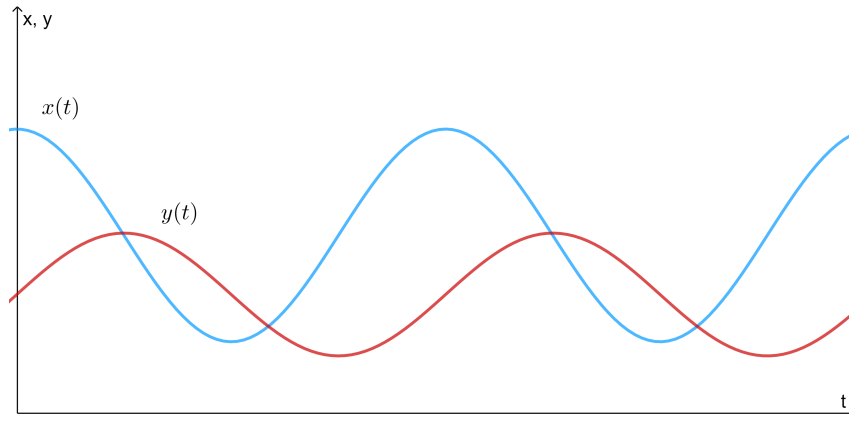


**Fonte:** Produção própria

Observe que em um certo instante as populações das duas espécies são pequenas. Daí, com poucos predadores, a presa começa a se reproduzir mais e sua população começa a crescer enquanto a população de predador permanece pequena. No entanto, em outro instante há bastante alimento para os predadores e sua população também começa a

crescer. Com o crescimento da população de predadores a população de presa tende a diminuir. Então, com menos comida os predadores também diminuem e o sistema volta à situação inicial. A Figura 9 mostra as curvas  $x$  e  $y$  em função de  $t$ , onde  $k = 0,6$  e  $\theta = 0$ .

Figura 9 – gráfico das soluções do sistema (4.4) em função do tempo



**Fonte:** Produção própria

Na figura 9, o gráfico se torna melhor para visualizar a comparação entre as duas espécies. A curva  $x(t)$  representa a variação da população de presa e a curva  $y(t)$  a população de predador.

Observe que as curvas são semelhantes. Entretanto, a medida que a população de presa cresce a população de predadores cresce também. Após atingir uma valor máximo a população de presa começa a decrescer, enquanto a população de predador continua crescendo. Em um determinado instante a população de predador atinge também um valor máximo.

No instante seguinte, começa a decrescer com o decrescimento da população de presa. Este fenômeno se repete periodicamente. Este fato vai ficar mais claro ao final da análise que se segue.

Vamos agora apresentar o caso geral utilizando o mesmo procedimento do exemplo. Seja o sistema predador-presa:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \omega xy = x(a - \omega y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x) \end{cases} \quad (4.12)$$

os pontos críticos são as soluções das equações,

$$x(a - \omega y) = 0 \quad \text{e} \quad y(-c + \gamma x) = 0.$$

Resolvendo essas equações encontramos os pontos críticos  $(0,0)$  e  $(c/\gamma, a/\omega)$ . Como dito antes o ponto  $(0,0)$  não tem relevância neste estudo. Vamos analisar as soluções na



vizinhança do ponto crítico  $(c/\gamma, a/\omega)$ . Primeiro vamos fazer a mudança de variável:

$$x = \frac{c}{\gamma} + u \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{\omega} + v.$$

Então temos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\omega c}{\gamma}v - \omega uv = v\left(-\frac{\omega c}{\gamma} - \omega u\right) \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{a\gamma}{\omega}u + \gamma uv = u\left(\frac{a\gamma}{\omega} + \gamma v\right). \end{aligned}$$

Recorrendo a equação (3.48) obtemos o seguinte sistema linear correspondente.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega c/\gamma \\ \gamma a/\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

o polinômio característico desse sistema é  $\lambda^2 + ac = 0$ , logo os autovalores são  $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$ , então o ponto crítico é um centro estável para o sistema linear (4.13). Como comentamos no exemplo com essa informação não podemos concluir nada a respeito do comportamento das trajetórias do sistema não-linear (4.12). Dividindo, então, a segunda equação pela primeira equação em (4.12),

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \omega y)}.$$

Note que essa equação é separável

$$\frac{a - \omega y}{y} dy = \frac{-c + \gamma x}{x} dx$$

integrando-a, obtemos

$$a \ln y - \omega y + c \ln x - \gamma x = r \quad (4.14)$$

onde  $r$  é uma constante de integração. Aqui também é possível mostrar que (4.14) é uma curva fechada, entretanto os recursos para este fim fogem da proposta deste trabalho e, obviamente, não podemos abrir mão do geogebra para construir este caso geral. Logo vamos considerar este fato como verdadeiro. Zill e Cullen (2001, p. 189), esboçam uma demonstração deste caso. Contudo, o ponto crítico  $(c/\gamma, a/\omega)$ , é um ponto de centro também para o sistema não-linear (4.12).

Como mostramos no exemplo a solução do sistema linear (4.13) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{\gamma} k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) \\ v &= \frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \operatorname{sen}(t\sqrt{ac} + \theta) \end{aligned}$$

onde os parâmetros  $k$  e  $\theta$  são determinados pelas condições iniciais. Voltando nas variáveis  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) \\ y &= \frac{a}{\omega} + \frac{a}{\omega}\sqrt{\frac{c}{a}}k \operatorname{sen}(t\sqrt{ac} + \theta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Essas curvas são boas aproximações para as trajetórias perto do ponto crítico  $(c/\gamma, a/\omega)$ . Destas equações podemos coletar as seguintes informações:

- A variação das populações das espécies ocorrem de forma senoidal com período de  $\frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$ , que é independente das condições iniciais. De fato, fazendo

$$t_1 = t + \frac{2\pi}{\sqrt{ac}},$$

temos

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}k \cos(\sqrt{ac}(t + \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}) + \theta) \\ &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}k \cos((t\sqrt{ac} + \theta) + 2\pi) \\ &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) \cos 2\pi - \operatorname{sen}(t\sqrt{ac} + \theta) \operatorname{sen} 2\pi \\ &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) \end{aligned}$$

note que  $x(t_1) = x(t)$ , isso implica que o período  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$ .

- As amplitudes das soluções são  $k\frac{c}{\gamma}$  para a presa e  $\frac{a}{\omega}\sqrt{\frac{c}{a}}k$  para o predador, logo dependem das condições iniciais e dos parâmetros do modelo.
- As populações médias de presas e predadores em um ciclo completo são dadas, respectivamente, por

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_A^{A+T} x(t) dt \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_A^{A+T} y(t) dt \quad (4.16)$$

onde  $T$  é o período e  $A$  é uma constante não negativa qualquer. Usando as equações (4.15) em (4.16), temos

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_A^{A+T} \left[ \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) \right] dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_A^{A+T} \frac{c}{\gamma} dt}_* + \underbrace{C \int_A^{A+T} \cos(t\sqrt{ac} + \theta) dt}_{**} \end{aligned}$$

onde  $C = \frac{1}{T} \frac{c}{\gamma} k$ . Integrando (\*), temos

$$\frac{1}{T} \int_A^{A+T} \frac{c}{\gamma} dt = \frac{c}{\gamma}.$$

E integrando (\*\*), temos

$$\frac{C}{\sqrt{ac}} \left[ \sin(\sqrt{ac}A + \theta) \cos \sqrt{ac}T + \sin \sqrt{ac}T \cos(\sqrt{ac}A + \theta) - \sin(\sqrt{ac}A + \theta) \right] = 0.$$

Como  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$  temos que  $\sqrt{ac}T = 2\pi$ . Consequentemente,  $\bar{x} = \frac{c}{\gamma}$ .

Calculando, agora,  $\bar{y}$  temos:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{T} \int_A^{A+T} \left[ \frac{a}{\omega} + \frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \sin(t\sqrt{ac} + \theta) \right] dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{T} \int_A^{A+T} \frac{a}{\omega} dt}_{***} + \underbrace{R \int_A^{A+T} \sin(t\sqrt{ac} + \theta) dt}_{****} \end{aligned}$$

onde  $R = \frac{1}{T} \frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k$ . Integrando (\*\*\*) , temos

$$\frac{1}{T} \int_a^{A+T} \frac{a}{\omega} dt = \frac{a}{\omega}.$$

E integrando (\*\*\*\*), considerando novamente  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$ , temos que

$$\frac{R}{\sqrt{ac}} \left[ \cos(\sqrt{ac}A + \theta) \cos(\sqrt{ac}T) + \sin(\sqrt{ac}A + \theta) \sin(\sqrt{ac}T) - \cos(\sqrt{ac}A + \theta) \right] = 0.$$

Assim,  $\bar{y} = \frac{a}{\omega}$ .

Portanto, as populações média de presa e predador em ciclos completos são respectivamente,  $\frac{c}{\gamma}$  e  $\frac{a}{\omega}$ .

- Suponha que  $k > 0$ . Usando a aproximação (4.15) vamos calcular as populações máximas de presas e predadores. Primeiro vamos encontrar os pontos críticos  $t_x$  e  $t_y$  de  $x$  e  $y$ . Fazendo  $\frac{dx}{dt} = 0$ , temos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{c}{\gamma} k \sin(t\sqrt{ac} + \theta) \sqrt{ac} = 0.$$

Isso implica que

$$\sin(t\sqrt{ac} + \theta) = 0.$$

Ou seja,

$$t_x = \frac{n\pi - \theta}{\sqrt{ac}},$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Fazendo  $\frac{dy}{dt} = 0$ , temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{a}{c}} k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) \sqrt{ac} = 0.$$

Isso implica que

$$\cos(t\sqrt{ac} + \theta) = 0.$$

Ou seja,

$$t_y = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

Os pontos críticos de  $x$  e  $y$  são, respectivamente,

$$t_x = \frac{n\pi - \theta}{\sqrt{ac}} \quad \text{e} \quad t_y = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}}$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Vamos analisar os pontos críticos  $t_x$  e  $t_y$  quando  $n = 0$ . Para isso utilizamos o teste da segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{c}{\gamma} k \cos(t\sqrt{ac} + \theta) ac \\ \frac{d^2x}{dt^2}(t_x) &= -\frac{c}{\gamma} k \cos\left(\sqrt{ac}\left(\frac{-\theta}{\sqrt{ac}}\right) + \theta\right) ac \\ &= -\frac{c}{\gamma} k \cos(0) ac < 0. \end{aligned}$$

Então  $t_x$  é ponto de máximo. Analogamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \sin(t\sqrt{ac} + \theta) ac \\ \frac{d^2y}{dt^2}(t_y) &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \sin\left(\sqrt{ac}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} + \theta\right) ac \\ &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) ac < 0. \end{aligned}$$

Então  $t_y$  é também ponto de máximo. Como  $x$  e  $y$  são funções periódicas de período  $T$ , as populações atingirão seus máximos  $t_x + T$  e  $t_y + T$ . Quando  $n = 1$ ,  $t_x$  e  $t_y$  são pontos de mínimos. Observe que as populações de presa e predador não atingem seus máximos no mesmo tempo  $t$ . Na verdade, a população de predador atinge o máximo um quarto do período  $T$  após a população de presa atingir seu máximo. De fato,

$$\begin{aligned} t_x - t_y &= \left(\frac{n\pi - \theta}{\sqrt{ac}}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{ac}} \\ &= \frac{1}{4}T. \end{aligned}$$

Deste modo, podemos concluir que, embora os ciclos fechados de presa e predador tenha períodos iguais a  $T$ , a população de predador tem um atraso de  $\frac{1}{4}T$  com relação ao ciclo da população de presas.

Vamos agora analisar a velocidade de crescimento da população de presa. Para isso vamos encontrar o ponto de inflexão  $t_{x_0}$  da curva  $x(t)$ .

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{x_0} = t_y = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

Para  $n = 0$ ,  $t_{x_0} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}}$ . Assim, o ponto onde a curva  $x$  tem uma inflexão, coincide com ponto onde a população de predador atinge seu máximo. A fim de analisar este ponto de inflexão  $t_{x_0}$ , considere os pontos

$$t_{x_1} = \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} \quad \text{e} \quad t_{x_2} = \left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}},$$

ou seja,  $t_{x_1} < t_{x_0} < t_{x_2}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}(t_{x_1}) &= -\frac{c}{\gamma} k \cos\left(\sqrt{ac}\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} + \theta\right) ac \\ &= -\frac{c}{\gamma} k \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) ac < 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}(t_{x_2}) &= -\frac{c}{\gamma} k \cos\left(\sqrt{ac}\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} + \theta\right) ac \\ &= -\frac{c}{\gamma} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) ac > 0. \end{aligned}$$

Assim, no intervalo  $[t_{x_1}, t_{x_0}[$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} < 0.$$

E no intervalo  $]t_{x_0}, t_{x_2}]$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} > 0.$$

Portanto, quando o predador atinge sua população máxima, velocidade de crescimento da população de presas é a menor possível. Para  $n = 1$ ,

$$t_{x_0} = \left(\frac{\pi}{2} + \pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}}$$

logo o ponto de inflexão  $t_{x_0}$  coincide com o ponto onde a população de predador atinge seu mínimo. Considere os pontos

$$t_{x_1} = \left(\frac{\pi}{3} + \pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} \quad \text{e} \quad t_{x_2} = \left(\frac{2\pi}{3} + \pi - \theta\right) \frac{1}{\sqrt{ac}},$$

isto é,  $t_{x_1} < t_{x_0} < t_{x_2}$ . De modo análogo ao caso anterior, temos que no intervalo  $[t_{x_1}, t_{x_0}[$ ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} > 0,$$

e no intervalo  $]t_{x_0}, t_{x_2}]$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} < 0.$$

Portanto, quando o predador atinge sua população mínima a velocidade de crescimento da população de presas é a maior possível.

Analogamente, vamos analisar a velocidade de crescimento do predador. Então, vamos encontrar o ponto de inflexão da curva  $y(t)$ .

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{y_0} = t_x = \frac{n\pi - \theta}{\sqrt{ac}}.$$

Para  $n = 0$ ,

$$t_{y_0} = -\frac{\theta}{\sqrt{ac}},$$

ou seja, o ponto de inflexão  $t_{y_0}$  coincide com o ponto onde a população de presas atinge seu máximo. Para analisar este ponto de inflexão, considere os pontos

$$t_{y_1} = \left(-\theta - \frac{\pi}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} \quad \text{e} \quad t_{y_2} = \left(-\theta + \frac{\pi}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{ac}},$$

$t_{y_1} < t_{y_0} < t_{y_2}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2}(t_{y_1}) &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{a}{c}} k \operatorname{sen}\left(\sqrt{ac}\left(-\theta - \frac{\pi}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} + \theta\right) ac \\ &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{a}{c}} k \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) ac > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2}(t_{y_2}) &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \operatorname{sen}\left(\sqrt{ac}\left(-\theta + \frac{\pi}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} + \theta\right) \\ &= -\frac{a}{\omega} \sqrt{\frac{c}{a}} k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) ac < 0. \end{aligned}$$

Assim, no intervalo  $[t_{y_1}, t_{y_0}[$ , temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} > 0.$$

E no intervalo  $]t_{y_0}, t_{y_2}]$ , temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} < 0.$$

Assim, quando a presa atinge sua população máxima, a velocidade de crescimento da população do predador é a maior possível. Para  $n = 1$ ,

$$t_{y_0} = \frac{\pi - \theta}{\sqrt{ac}},$$

que é igual a tempo  $t_x$  onde a população de presa atinge seu mínimo. Considere os pontos

$$t_{y_1} = \left(\pi - \theta - \frac{\pi}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{ac}} \quad \text{e} \quad t_{y_2} = \left(\pi - \theta + \frac{\pi}{6}\right) \frac{1}{\sqrt{ac}},$$

$t_{y_1} < t_{y_0} < t_{y_2}$ . De modo análogo ao caso antecedente, no intervalo  $[t_{y_1}, t_{y_0}[$ , temos

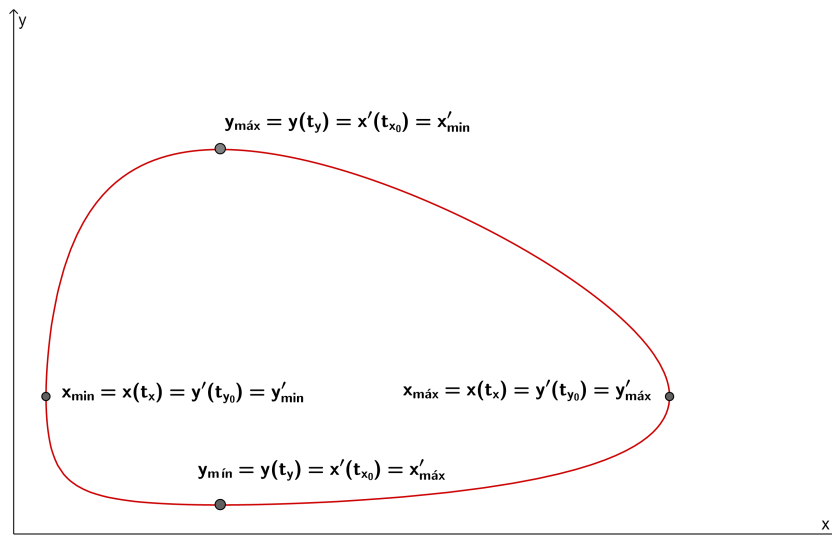
$$\frac{d^2y}{dt^2} < 0.$$

E no intervalo  $]t_{y_0}, t_{y_2}]$ , temos

$$\frac{d^2y}{dt^2} > 0.$$

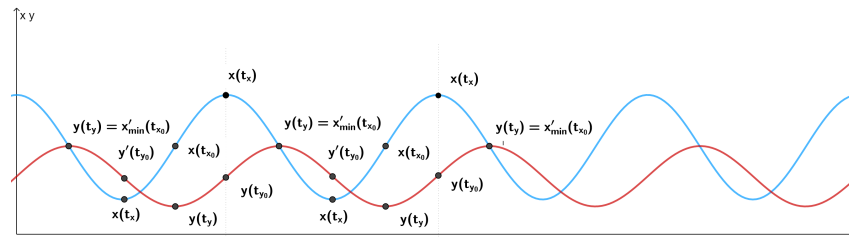
Então, quando a presa atinge sua população mínima, a velocidade de crescimento da população do predador é menor possível. Os gráficos 10 e 11 representam estas análises.

Figura 10 – Gráfico do sistema não-linear (4.2) com indicação dos pontos de: inflexão e máximos e mínimos, das curvas  $x(t)$  e  $y(t)$



Fonte: Produção própria

Figura 11 – Comparações entre as populações de presas e predadores para o sistema linear (4.4) associado ao sistema não linear (4.2)



**Fonte:** Produção própria

Resumindo, as variações das populações de presas e predadores são periódicas. A população de presas atinge seu máximo primeiro e depois de um quarto de ciclo a população de predadores atinge seu máximo. Além disso, quando a população de presas atinge seu número máximo, a velocidade de crescimento da população do predador é maior possível e quando a população de presas atinge seu número mínimo, a velocidade de crescimento da população do predador é a menor possível. Por outro lado, quando a população de predadores atinge seu número máximo, a velocidade de crescimento da população da presa é menor possível e quando a população de predadores atinge seu número mínimo, a velocidade de crescimento da população da presa é maior possível.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das informações obtidas através do modelo matemático, percebemos quão bem, o mesmo expressa o modelo biológico de interação entre as espécies. Existem modelos mais precisos, como por exemplo, modelos que consideram as interações das duas espécies com o meio. Entretanto, novamente os modelos matemáticos se mostram eficientes para descrevê-los. Para além disso, modelos como este que aproximam a matemática da realidade, torna esta ciência ainda mais bela. Assim, como diz o epígrafe deste trabalho, a matemática é o meio de comunicação que temos com o mundo.

No desenvolvimento deste trabalho, na inter-relação, dos conteúdos foi possível reforçar e aprofundar noções de álgebra linear, de geometria analítica, de cálculo e de equações diferenciais ordinárias. Além disso, este trabalho proporcionou consolidar os conhecimentos relacionados ao uso da diferenciação para esboçar gráficos, ao estudo de elipse a partir de sua forma quadrática, campos de direções de funções com duas variáveis, entre outros.

Outra aprendizagem significativa foi operar o Geogebra que auxilia bastante na compreensão dos objetos matemáticos e também o LaTeX, pois cada vez mais exige-se um pouco de domínio de informática pelo professor. O primeiro contato com a pesquisa em matemática, ocorreu de fato com este trabalho. O exercício de buscar e estudar os conhecimentos matemáticos e depois escrever justificando cada informação é muito enriquecedor para nossa profissão, cuja a missão é tornar os conhecimentos científicos mais acessíveis às pessoas.

Ao fazer a disciplina de EDO surgiu o interesse em pesquisar nesta área. Então o primeiro passo foi delinear um tema para restringir melhor nosso campo de estudo. Assim, por meio de busca e sugestões resolvemos estudar o modelo predador-presa. Em seguida, precisávamos direcionar bem nossa pesquisa, daí definimos como objetivo analisar as soluções do modelo predador-presa.

Dados esses passos, era necessário um percurso metodológico para atingir tal objetivo. Para isso, realizamos um estudo bibliográfico e exploratório para obter os conhecimentos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Nisto, muitas vezes, tivemos que retomar conteúdos estudados antes e também aprender novos conceitos.

Após feito todo o estudo do tema, foi o momento de organizar a estrutura do texto. De forma que cada capítulo fosse base para compreensão do seguinte. Além disso, tivemos a exigência de justificar cada passagem do texto, com a escrita clara e objetiva. Buscando sempre atrair a atenção do leitor.

Diante disso, estes procedimentos podem servir de base para os estudantes que ainda não teve contato com a pesquisa em matemática, mas que almejam pesquisar nesta área. Por fim, este trabalho pode servir de auxílio para estudantes que têm dificuldades em estudar diretamente nos livros, pois, muitas vezes, omitem passagens e/ou apresentam linguagem que dificultam a compreensão.

## Referências

- BOLDRINI, José Luiz; et. al. **Álgebra Linear**. 3 . ed. São Paulo: HRB, 1980.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problema de Valores de Contorno**. Tradução Horcio Macedo. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002. 365 p. Tradução de: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.
- DELGADO, Jorge; FRENSNEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 405 p. (Coleção PROFMAT, 11).
- EDWARDS, JR., C. H.; PENNEY, David E. **Equações Diferenciais Elementares: com Problemas de Contorno**. Tradução Celso Wilmer. 3. ed. Rio de Janeiro: PHB, 1995. 600 p. tradução de: Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems.
- GARBI, Gilberto Geraldo. **O Romance das Equações Algébricas**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 280 p. (coleção PROFMAT, 04)
- STEWART, James. **Cálculo. v.1**. Tradução Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. 6. ed. São paulo: Cengage Learning, 2010. 535 p. Tradução de: Cálculus.
- PAULEK, JR., Ivo. Dinâmica Populacional e o Modelo Predador - Presa . 2013. 68 p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura)- Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2013. Disponível em: <<<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/105449/Ivo20Paulek20Junior.pdf?sequence=1>>> Acesso em: 13 Mai. 2019.
- ZIIL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Tradução Alfredo Alves de Farias. 3. ed. São Paulo: MAKRON Books, 2001. 422 p. v. 2. Tradução de: Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems